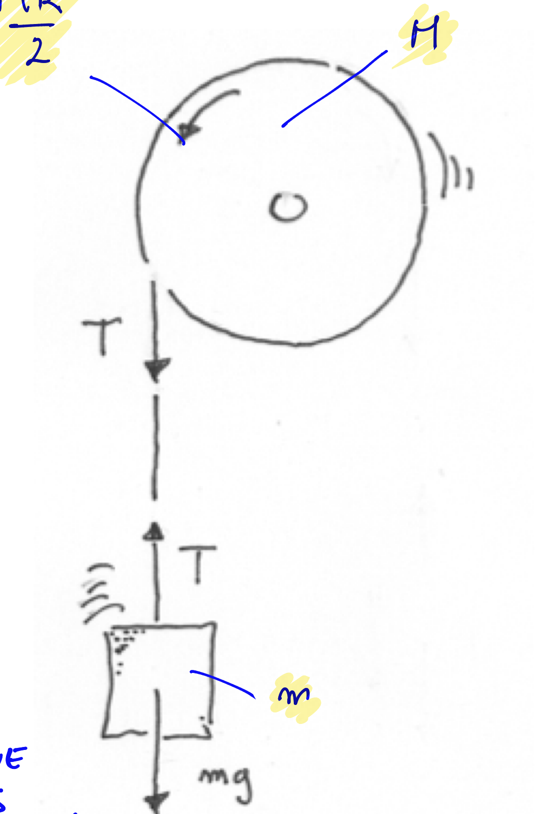
On lache un bloc attaché à une poulie

$I = \frac{MR^2}{2}$

LA POULIE EST UN CYLINDRE PLEIN !



Quelle est la vitesse angulaire de la poulie après 3 secondes ?
Vitesse du bloc lorsqu'il est descendu de 1.6 mètre ?

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{2}I\,\omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) = \sum M_i$$

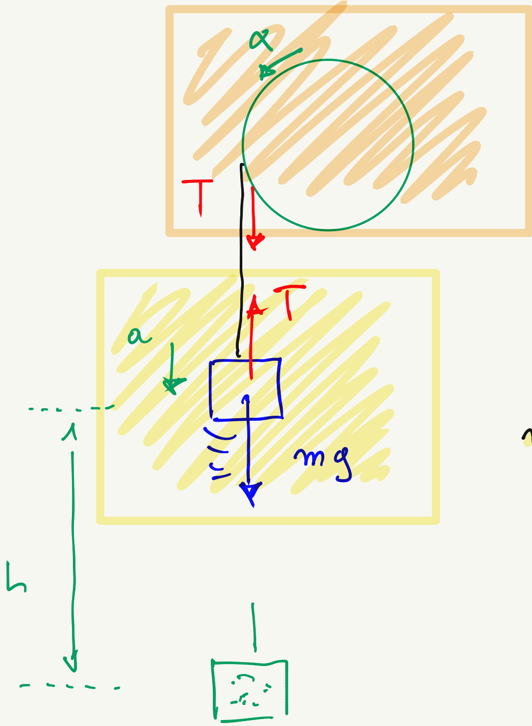
APPROCHE CLASSIQUE POUR LES "PLOUCS" !

APPROCHE ENERGETIQUE

LA VOIE RAPIDE ET ROYALE POUR LES "WINNERS" !

$\boxed{1}$

BLOC
QUI
TOMBE !



$$TR = \frac{MR^2}{2}\alpha = \frac{MR^2}{2}\frac{a}{R}$$

$$\boxed{T = \frac{Ma}{2}}$$

$\alpha R = a$
RELATION CINEMATIQUE

2 EQUATIONS
2 INCONNUES
a, T

$$ma = mg - T$$

$$\boxed{T = m(g-a)}$$

$$m(g-a) = \frac{Ma}{2}$$

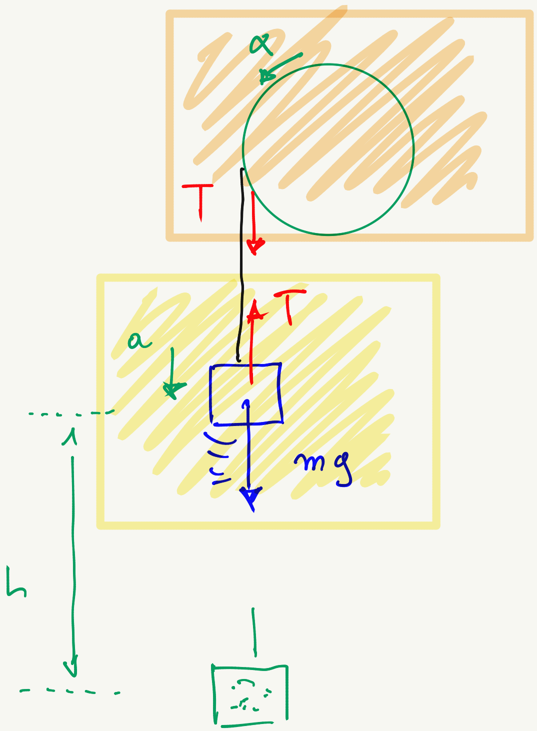
$$2mg - 2ma = Ma$$

$$2mg = (M+2m)a$$

$$a = \frac{2mg}{(M+2m)}$$

LA REPONSE
EST ICI

$$\boxed{a = \frac{2m}{(M+2m)}g}$$



$$a = \frac{2m}{(M+2m)} g$$

ET LA VITESSE DU BLOC LORSQU'IL A CHUTE D'UNE HAUTEUR h ?

$$h = a\frac{t^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

$$v = at = \sqrt{2ha}$$

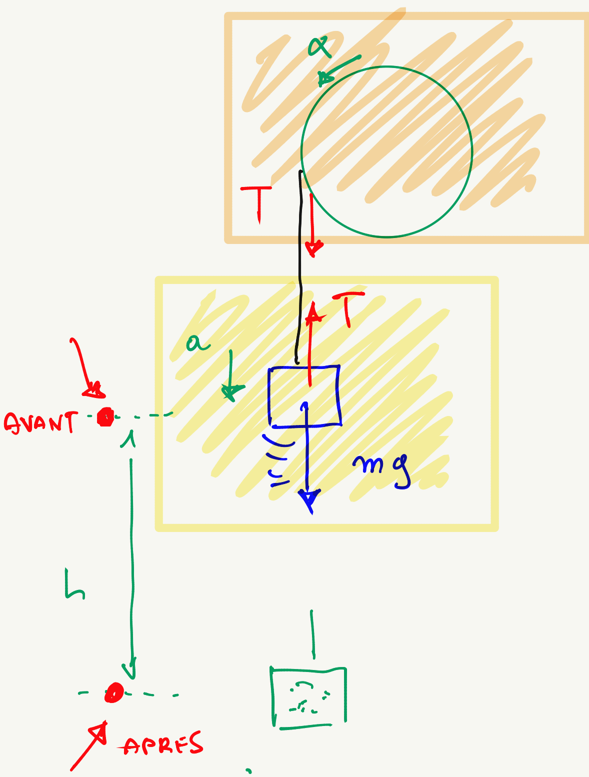
$$\boxed{v = \sqrt{\frac{4mgh}{(M+2m)}}}$$

LA REPONSE EST ICI

SO EASY !

L'APPROCHE ENERGETIQUE .....

ET LA VITESSE DU BLOC LORSQU'IL A CHUTE D'UNE HAUTEUR h ?



AVANT

mgh

0

APRES

0

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

$$\frac{MR^2}{2} = I$$

$$\frac{v^2}{R^2} = \omega^2$$

$$mgh = m\frac{v^2}{2} + \frac{M}{4}v^2$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{4mgh}{(2m+M)}}}$$

C'EST LA MEME REPONSE

Théorème de Huygens
Moment d'inertie quelconque

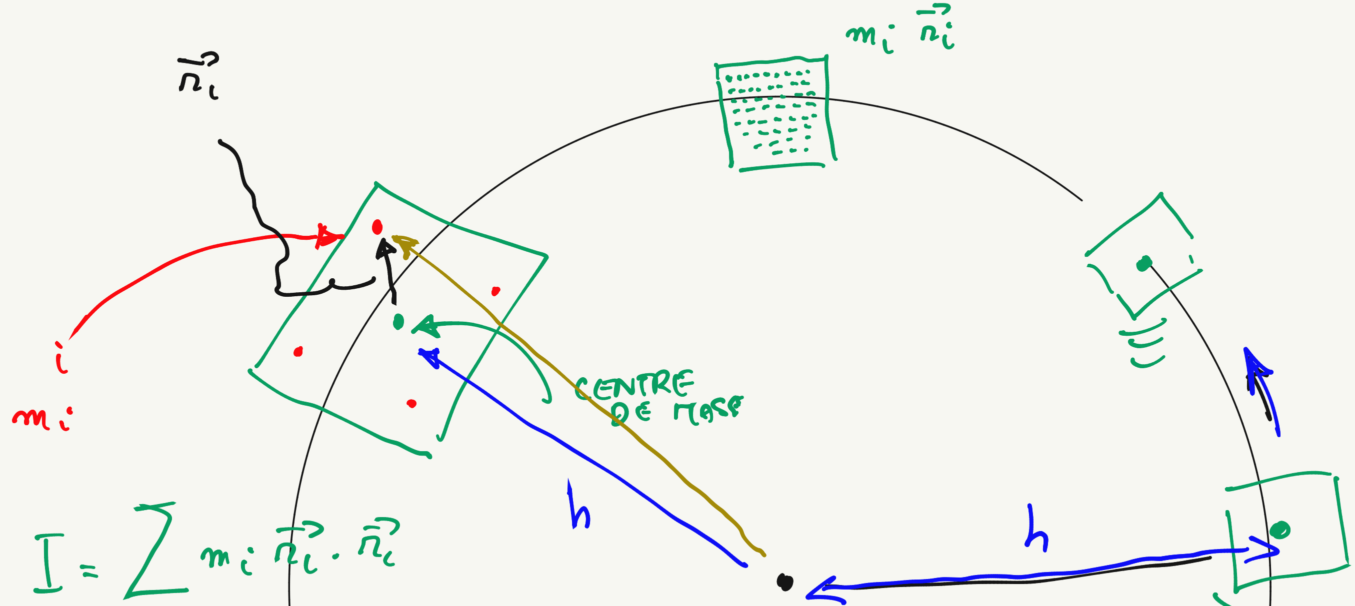
$$
\begin{aligned}
I_h &= \sum m_i \left(\vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{h}}\right) \cdot \left(\vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{h}}\right) \\
&= \underbrace{\sum m_i \, \vec{\mathbf{r}}_i \cdot \vec{\mathbf{r}}_i}_{=I} + \underbrace{\sum m_i \, \vec{\mathbf{h}} \cdot \vec{\mathbf{h}}}_{=mh^2} + 2 \left(\cancel{\underbrace{\sum m_i \, \vec{\mathbf{r}}_i}_{=0}}\right) \cdot \vec{\mathbf{h}}
\end{aligned}
$$

En vertu de la définition du centre de masse !

Une conséquence immédiate de ce théorème est qu'il est moins coûteux (en énergie) de faire tourner un corps autour d'un axe passant par le centre de masse.

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\,h^2 + I$$



$$I = \sum m_i\, \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i$$

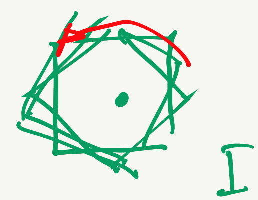
$$0 = \underbrace{\sum m_i \vec{r}_i}$$

PAR DEFINITION DU CENTRE DE MASSE

$$\boxed{I = \sum_i \overbrace{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i}^{r_i^2}\, m_i}$$

I_h

$$\boxed{I_h = \sum_i (\vec{h} + \vec{r}_i) \cdot (\vec{h} + \vec{r}_i)\, m_i}$$



INERTIE POUR TOURNER AUTOUR DU CENTRE DE MASSE !

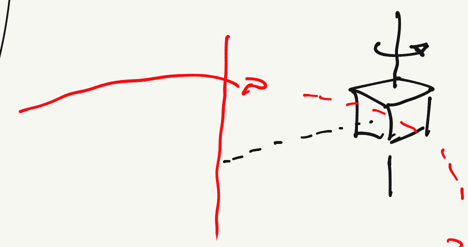
$$I_h = \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i \, m_i}_{I} + \underbrace{\sum_i \vec{h} \cdot \vec{h} \, m_i}_{h^2 m} + 2\,\vec{h} \cdot \underbrace{\sum \cancel{m_i}\, \vec{r}_i}_{=0}$$

PAR DEFINITION DU CENTRE DE MASSE

$$\sum m_i \vec{x}_i = \sum m \vec{x}$$

$$\vec{r} = (\vec{x}_i - \vec{x})$$

$$\boxed{I = \sum_i \overbrace{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i}^{r_i^2} \, m_i}$$



$$\boxed{I_h = \sum_i \underbrace{(\vec{h} + \vec{r}_i)}_{} \cdot \underbrace{(\vec{h} + \vec{r}_i)}_{} \, m_i}$$

$$\underbrace{(\vec{a} + \vec{b})}_{} \cdot \underbrace{(\vec{a} + \vec{b})}_{}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\,\vec{a} \cdot \vec{b} \quad :-)$$

$$I_h = I + m h^2$$

THEOREME DES AXES //

Accélération dans l'avant-bras due à la gravité

Quelle est l'accélération angulaire pour un angle quelconque ?
Quelle est l'accélération tangentielle lorsque l'avant-bras est horizontal ?

$$\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\ v^2 + \frac{1}{2}I\ \omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(I\ \omega\right) = \sum M_i$$

2

BAISSER LE BRAS !

$$I = \frac{mL^2}{12}$$

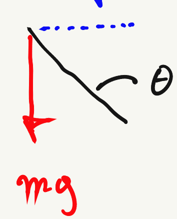
BRAS DE LONGUEUR L

ACCELERATION ANGULAIRE [½ !]

$$\alpha L = a$$

$$\boxed{\underbrace{I_h}\alpha = mg\frac{L}{2}\sin\theta}$$

bras de levier



$$\underbrace{\frac{mL^2}{12}} + \underbrace{m\left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

$$mL^2\left(\underbrace{\frac{1}{12} + \frac{1}{4}}\right)$$

$$\frac{1+3}{12} = \frac{mL^2}{3}$$

$$\frac{\cancel{m}L^{\cancel{2}}}{3}\frac{\alpha}{\cancel{L}} = \cancel{m}g\frac{\cancel{L}}{2}\underbrace{\sin\theta}_{=1}$$

$\sin\theta = 90°$

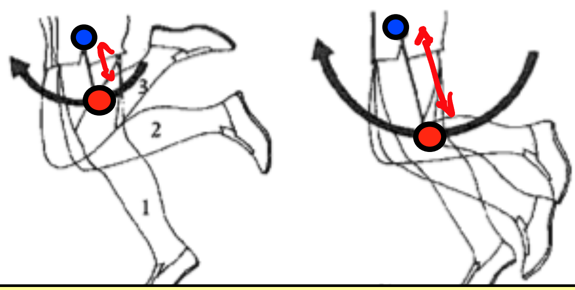
$$\boxed{\alpha_{MAX} = \frac{3g}{2}}$$

LA REPONSE EST ICI

Moment d’inertie de la jambe par rapport à la hanche

Lors d’un sprint, le coureur va chercher à ramener ses jambes le plus rapidement possible en avant.

Il va attirer le talon vers le haut durant la phase d’oscillation.
Le moment d’inertie par rapport à la hanche est diminué.



Pour les courses de fond, le coureur va dépenser moins d’énergie à relever le talon.

Le moment d’inertie par rapport à la hanche reste plus grand.
La vitesse est évidemment aussi moins rapide !

- La masse mesure la résistance d'un corps à une accélération causée par une force.
- Le moment d'inertie mesure la résistance d'un corps à une accélération angulaire causée par un moment de force.

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{2}I\,\omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) = \sum M_i$$

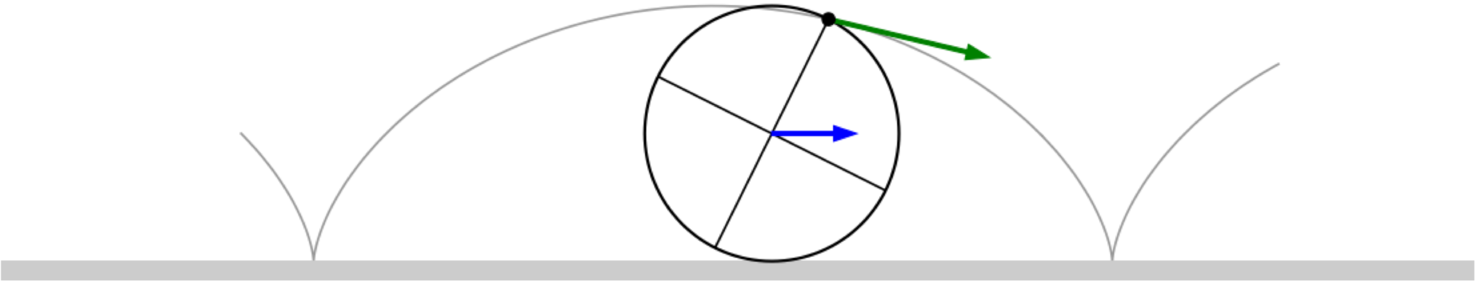
Equilibre statique

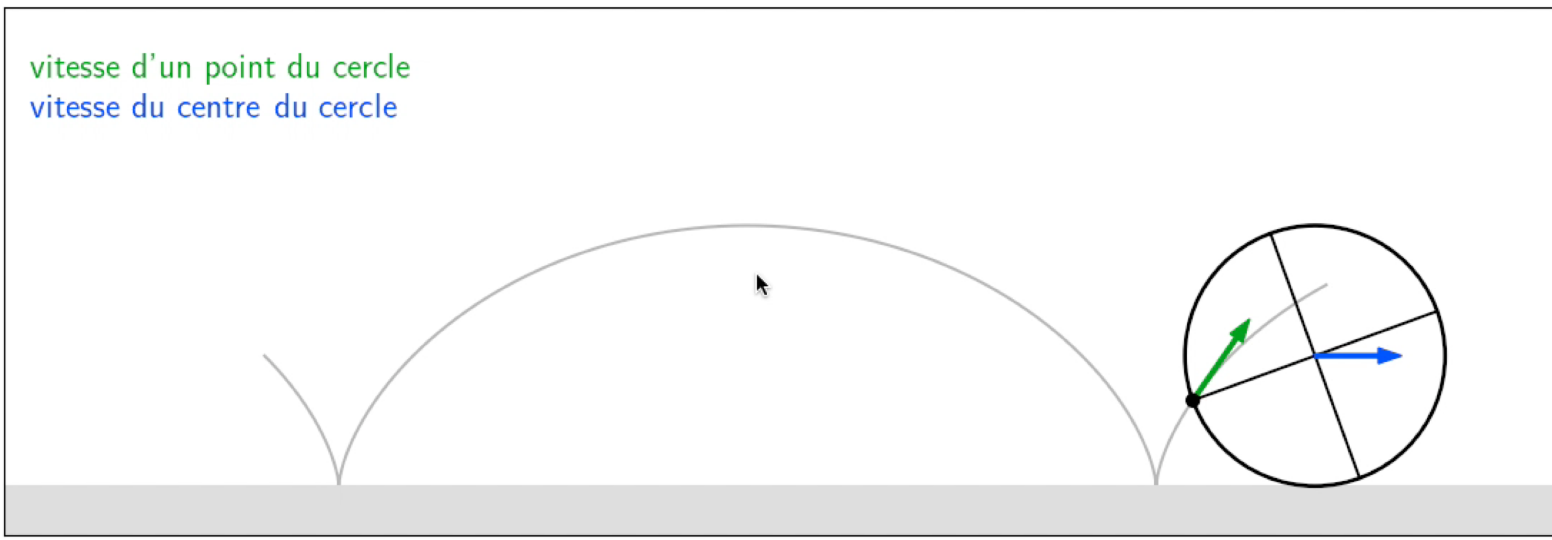
$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$0 = \sum M_i$$

Faisons un peu de vélo...

Comme la roue ne glisse pas, le point bas est très brièvement en contact avec la route.
Ce point est au repos et la roue tourne autour ce point.



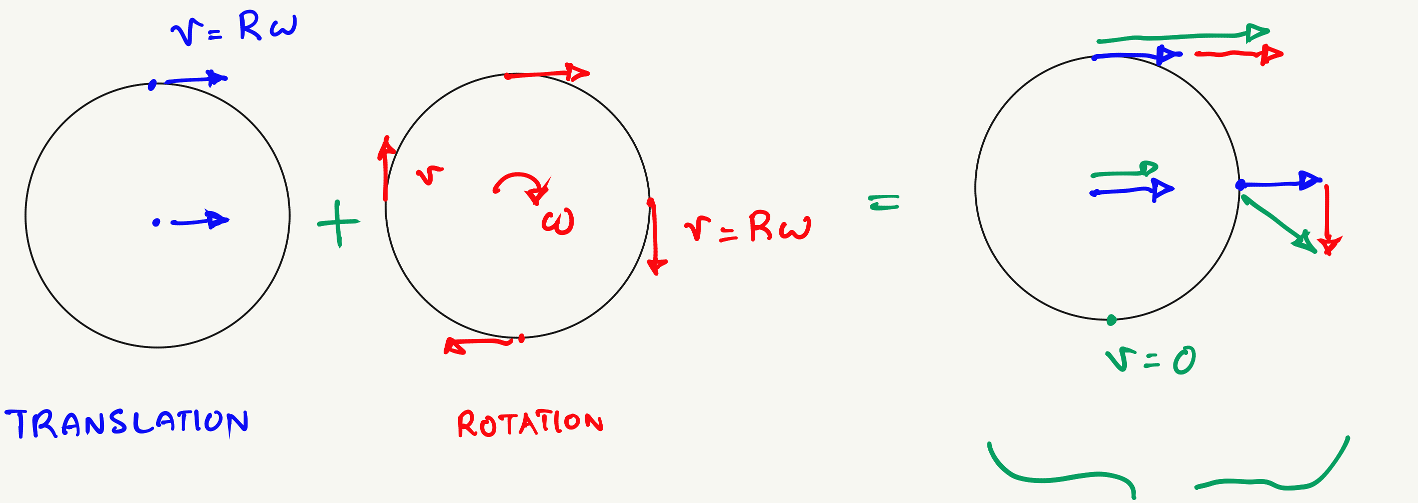

vitesse d'un point du cercle
vitesse du centre du cercle

Le roulement : c'est combiner une translation et une rotation !

Rotation autour du centre

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \boxed{\vec{\mathbf{v}}_c} + \boxed{\vec{\mathbf{v}}_t(t)}$$

Translation du centre



ROULEMENT
SANS GLISSEMENT

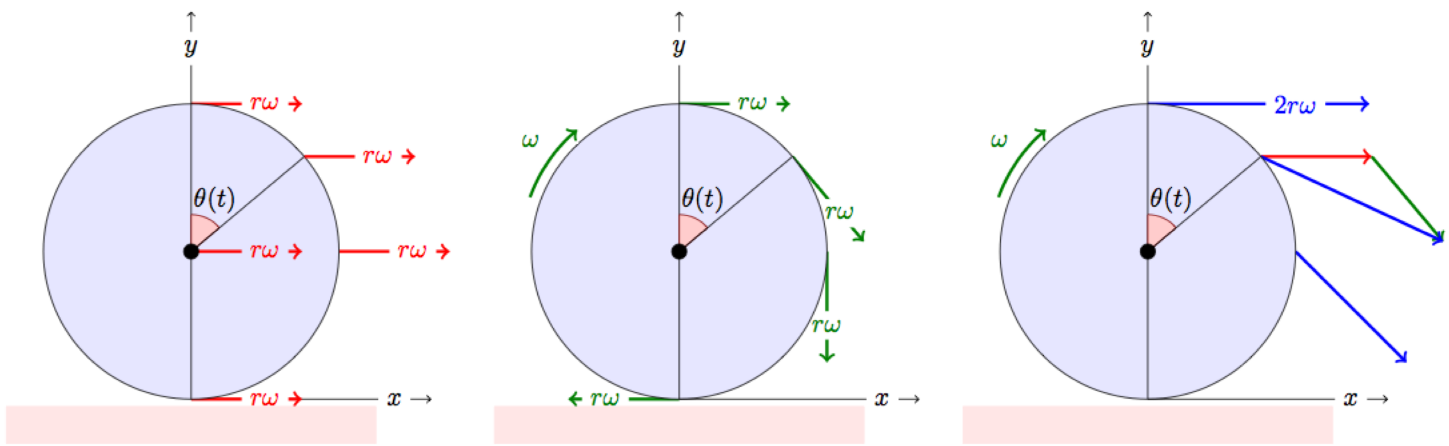
ROULEMENT
SANS GLISSEMENT

$$v = \omega R$$
$$a = \alpha R$$

GLISSEMENT
.... AVEC / SANS
ROULEMENT !!!

DERAPAGE !

Le roulement, c'est
une translation du centre avec
une rotation autour du centre



$$\boxed{\vec{\mathbf{v}}(t)} = \boxed{\vec{\mathbf{v}}_c} + \boxed{\vec{\mathbf{v}}_t(t)}$$

Rotation autour du centre

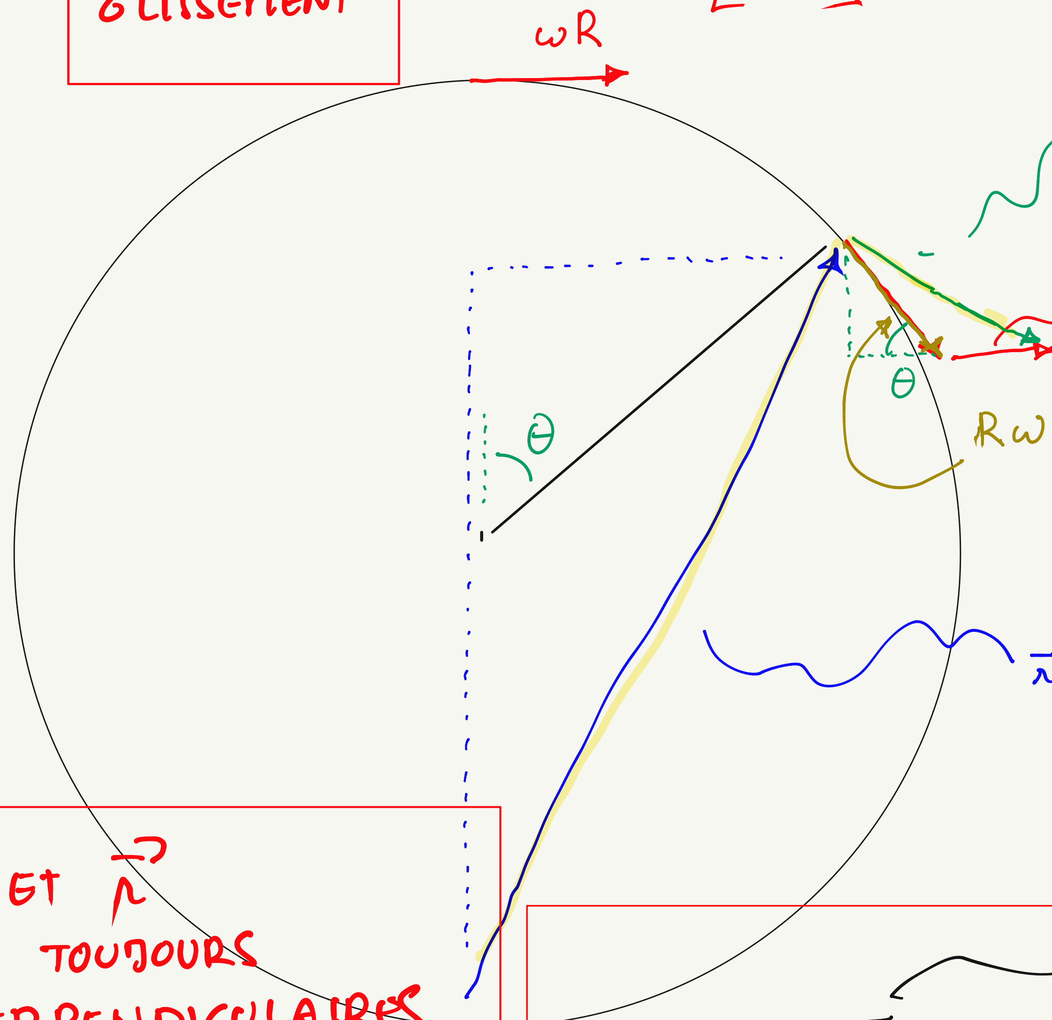
Translation du centre

$\boxed{2}$

ROULEMENT SANS GLISSEMENT

$$\begin{bmatrix}\omega R\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1+\cos\theta\\ -\sin\theta\end{bmatrix}\omega R = \vec{v}$$



$$\begin{bmatrix}R\omega\\ 0\end{bmatrix}$$

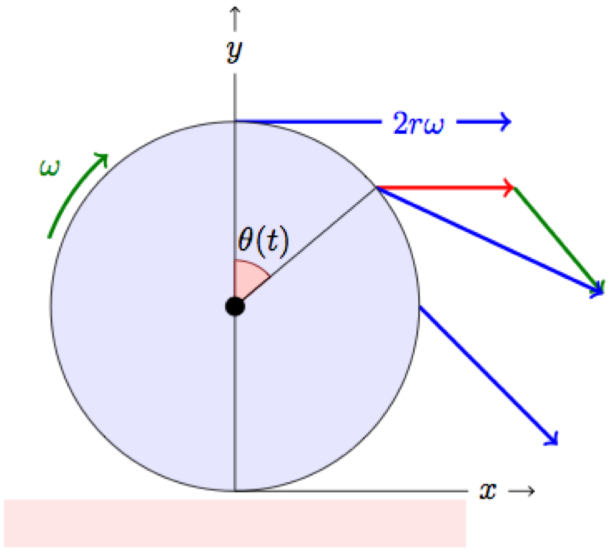
$$R\omega\begin{bmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\end{bmatrix}$$

$$\vec{r} = R\begin{bmatrix}\sin\theta\\ 1+\cos\theta\end{bmatrix}$$

$\vec{v}$ ET $\vec{r}$ SONT TOUJOURS PERPENDICULAIRES ENTRE EUX !

$$\vec{v}\cdot\vec{r} = R^2\omega\left[\overbrace{\underbrace{(1+\cos\theta)}_{v_x}\underbrace{\sin\theta}_{r_x} \underset{+}{-} \underbrace{\sin\theta}_{v_y}\underbrace{(1+\cos\theta)}_{r_y}}^{=0\ !!}\right]$$

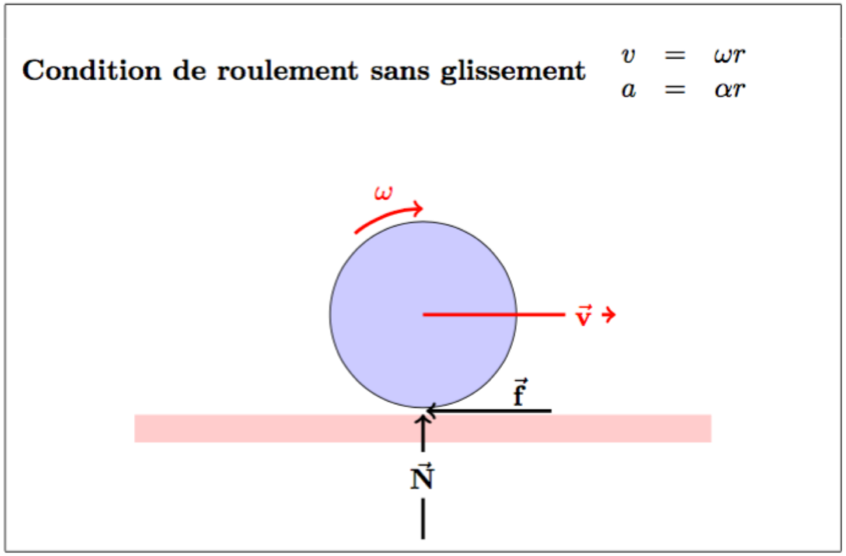
Le roulement, c'est une translation du centre avec une rotation autour du centre



Le mouvement circulaire est dans le sens horlogique.
La roue avance vers la droite.

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} v_c(t) \\ 0 \end{bmatrix} + r\omega(t)\begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \begin{bmatrix} a_c(t) \\ 0 \end{bmatrix} + r\omega^2(t)\begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ -\cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\alpha(t)\begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$



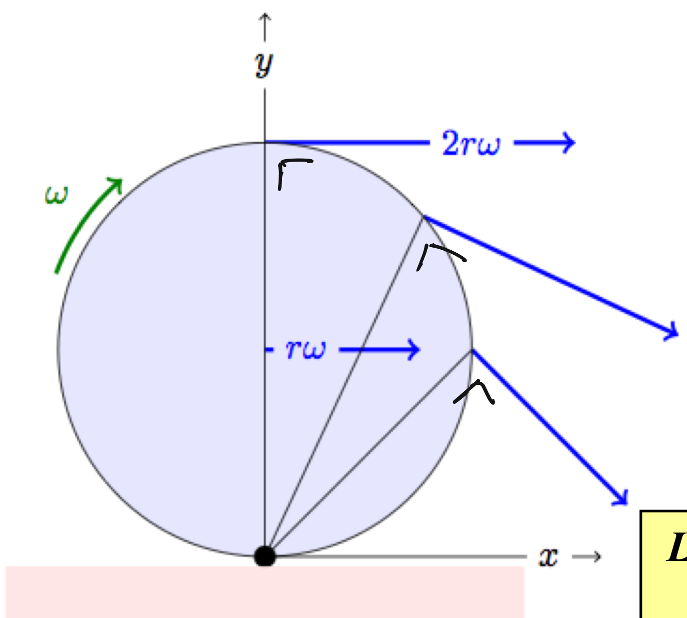
Comme la roue ne glisse pas, le point bas est très brièvement en contact avec la route.
Ce point est au repos et la roue tourne autour ce point.

Roulement sans glissement d'une roue !

C'est l'inverse du glissement sans roulement ou dérapage incontrolé !

La roue tourne autour du point de contact

En un tour de roue, le centre avance d'une distance $2\pi R$



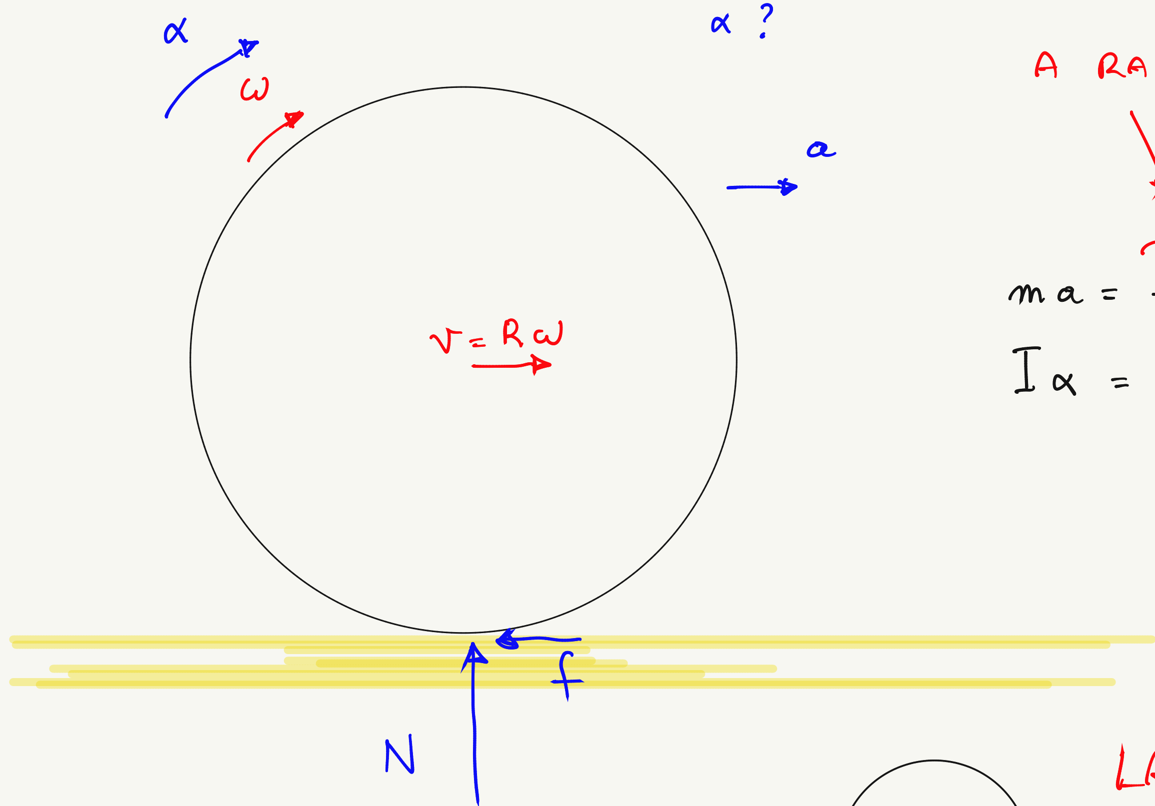
La norme de la vitesse du centre est égale à la norme de la vitesse tangentielle de rotation !

On en déduit la même relation pour les accélérations

Condition de roulement sans glissement

$$\begin{aligned} v &= \omega r \\ a &= \alpha r \end{aligned}$$

a ?
α ?

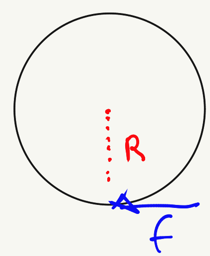


LE FROTTEMENT TEND A RALENTIR LA TRANSLATION DE LA ROUE

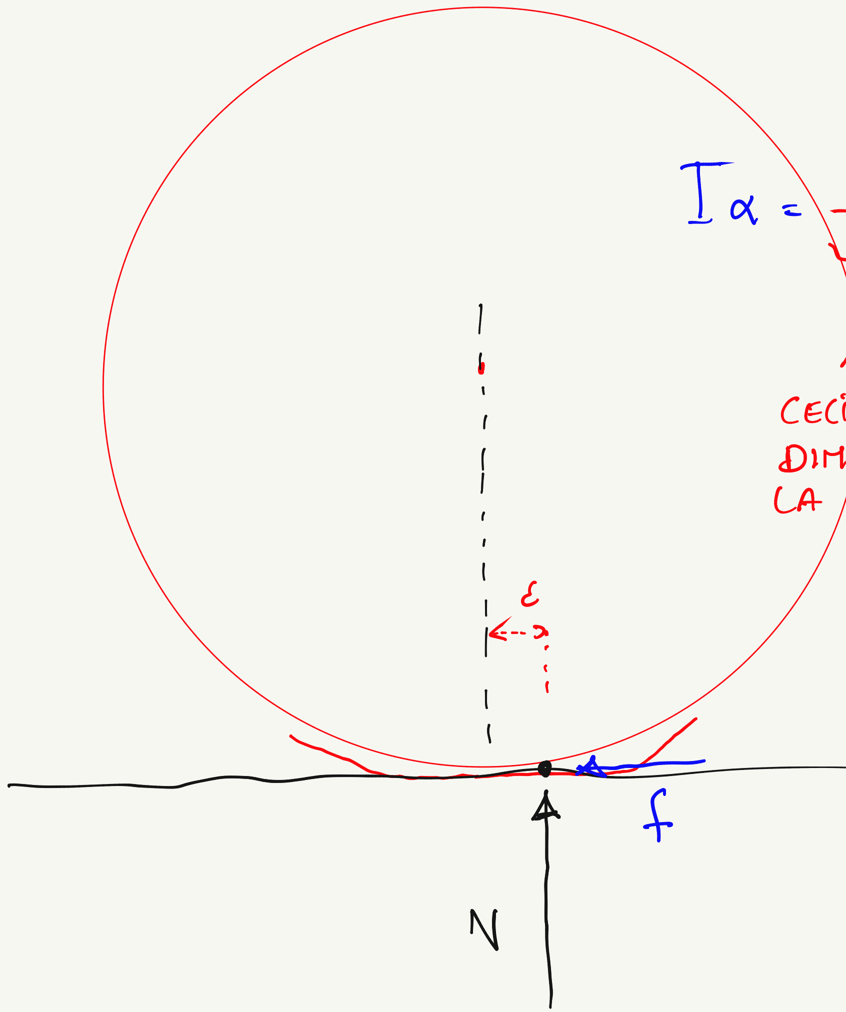
$$\underbrace{m a = -f}$$

$$I\alpha = \underbrace{R f}$$

LE FROTTEMENT TEND À ACCELERER LA ROTATION DE LA ROUE



C'EST ABSURDE NON ?



$$I\alpha = \underbrace{-\varepsilon N}_{} + Rf$$

CECI VA DIMINUER LA ROTATION DE LA ROUE

FROTTEMENT DE ROULEMENT

$$ma = -\mu_r N$$

- **Le frottement joue un rôle essentiel dans le roulement sans glissement d'une roue.**
  On le modélise comme le frottement de roulement

- **Il y a roulement sans glissement lorsque la norme de la vitesse du centre est égale à celle de la vitesse de rotation tangentielle.**