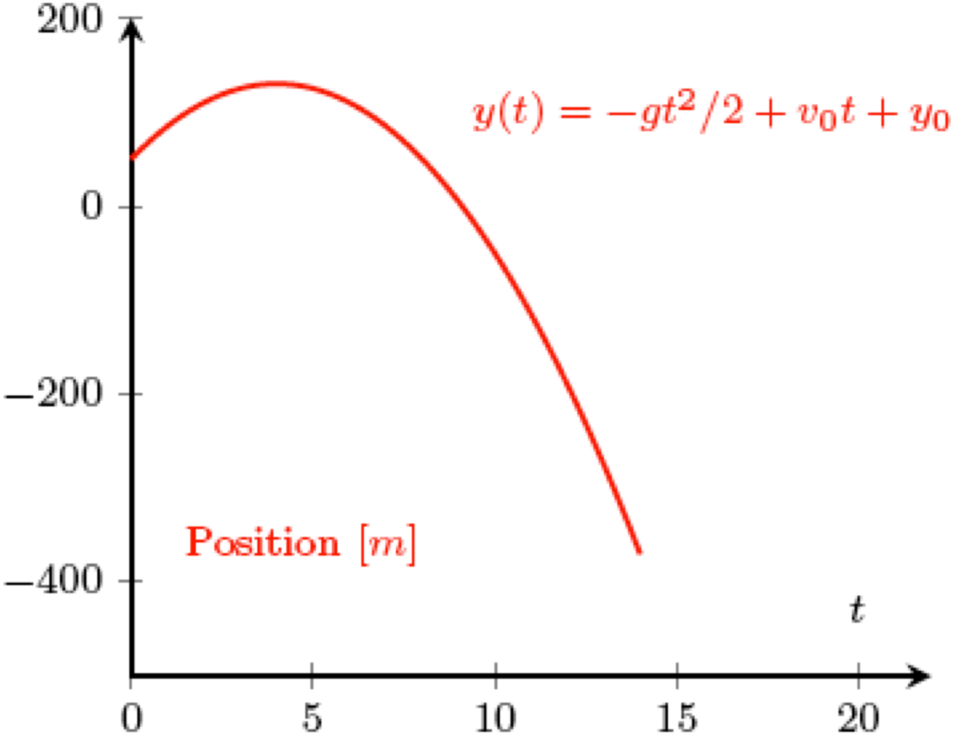
La chute libre de la pomme de Newton

$$\begin{cases} a(t) & = & -g \\ v(t) & = & -gt + v_0 \\ y(t) & = & -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{cases}$$

La description mathématique de la chute d'une pomme sous l'effet de la gravité est décrit par les équations du MRUA
C'est le mouvement rectiligne uniformément accéléré !

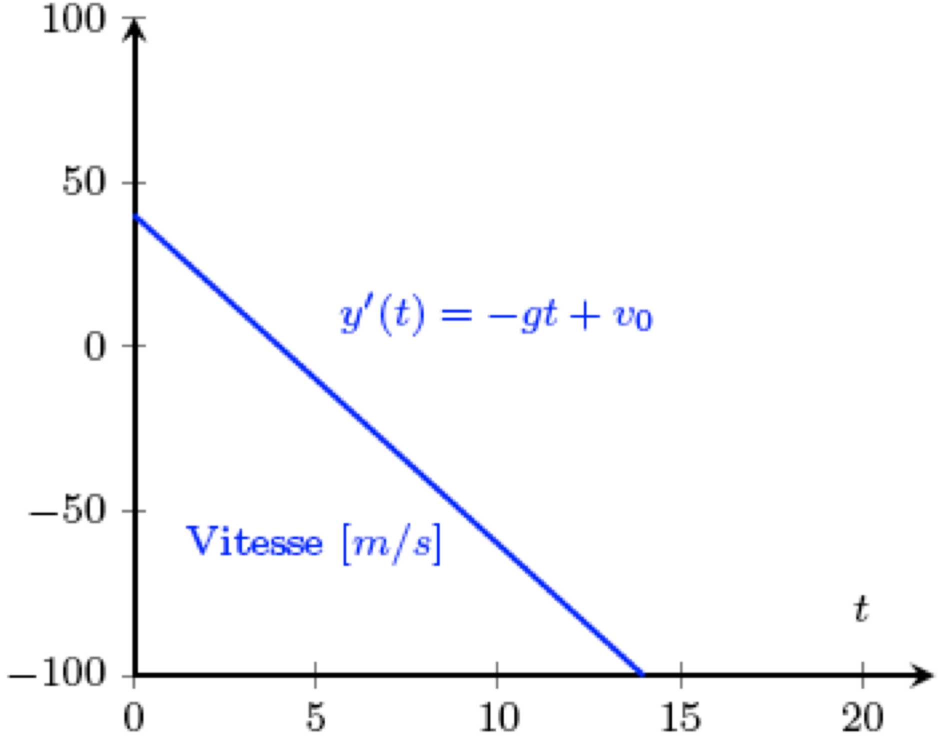
La position y(t)



$$\begin{cases} a(t) = -g \\ v(t) = -gt + v_0 \\ \boxed{y(t) = -gt^2/2 + v_0 t + y_0} \end{cases}$$

La description mathématique de la chute d'une pomme sous l'effet de la gravité est décrit par les équations du MRUA
C'est le mouvement rectiligne uniformément accéléré !

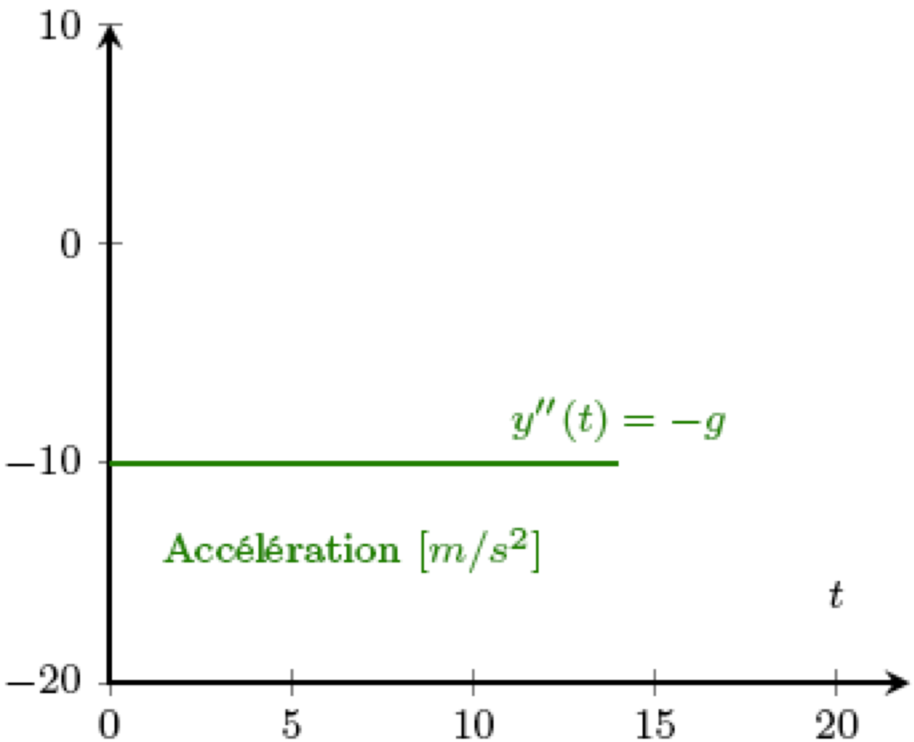
La vitesse v(t) = y'(t)



$$\begin{cases} a(t) = -g \\ \boxed{v(t) = -gt + v_0} \\ y(t) = -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{cases}$$

La description mathématique de la chute d'une pomme sous l'effet de la gravité est décrit par les équations du MRUA C'est le mouvement rectiligne uniformément accéléré !

L’accélération a(t) = y’’(t)



$$\left\{\begin{array}{lcl} \boxed{a(t) = -g} \\ v(t) & = & -gt + v_0 \\ y(t) & = & -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{array}\right.$$

La description mathématique de la chute d’une pomme sous l’effet de la gravité est décrit par les équations du MRUA C’est le mouvement rectiligne uniformément accéléré !

- La vitesse est la dérivée temporelle du vecteur position.
- L'accélération est la dérivée temporelle de la vitesse.
- La chute libre verticale est un mouvement dont l'accélération est constante. La vitesse de chute croît linéairement en fonction du temps.

Cinématique

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{v}}(t) \\ \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{a}}(t) \end{aligned}}$$

$$m\,\vec{\mathbf{a}}(t) = \sum \vec{\mathbf{F}}(t)$$

La cinématique est la description mathématique des mouvements sans se soucier de leur origine !

Le mouvement est décrit par des vecteurs dont les composantes sont des fonctions du temps

$\boxed{1}$

LES VECTEURS

60 [km/h]

POSITION $\vec{x}(t)$

VITESSE $\vec{v}(t)$

ACCELERATION $\vec{a}(t)$

FORCES $\vec{F}(t)$

$$\begin{bmatrix} x_x \\ x_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

LES SCALAIRES

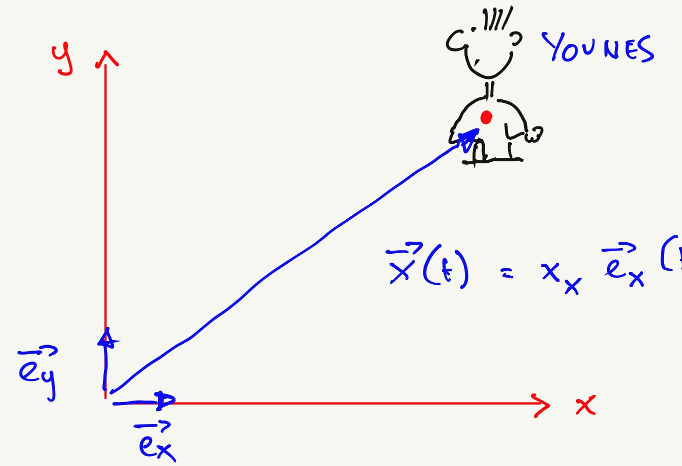
6,78 [m]

MASSE

TEMPERATURE

ENERGIE

NORME DE LA VITESSE $v(t)$

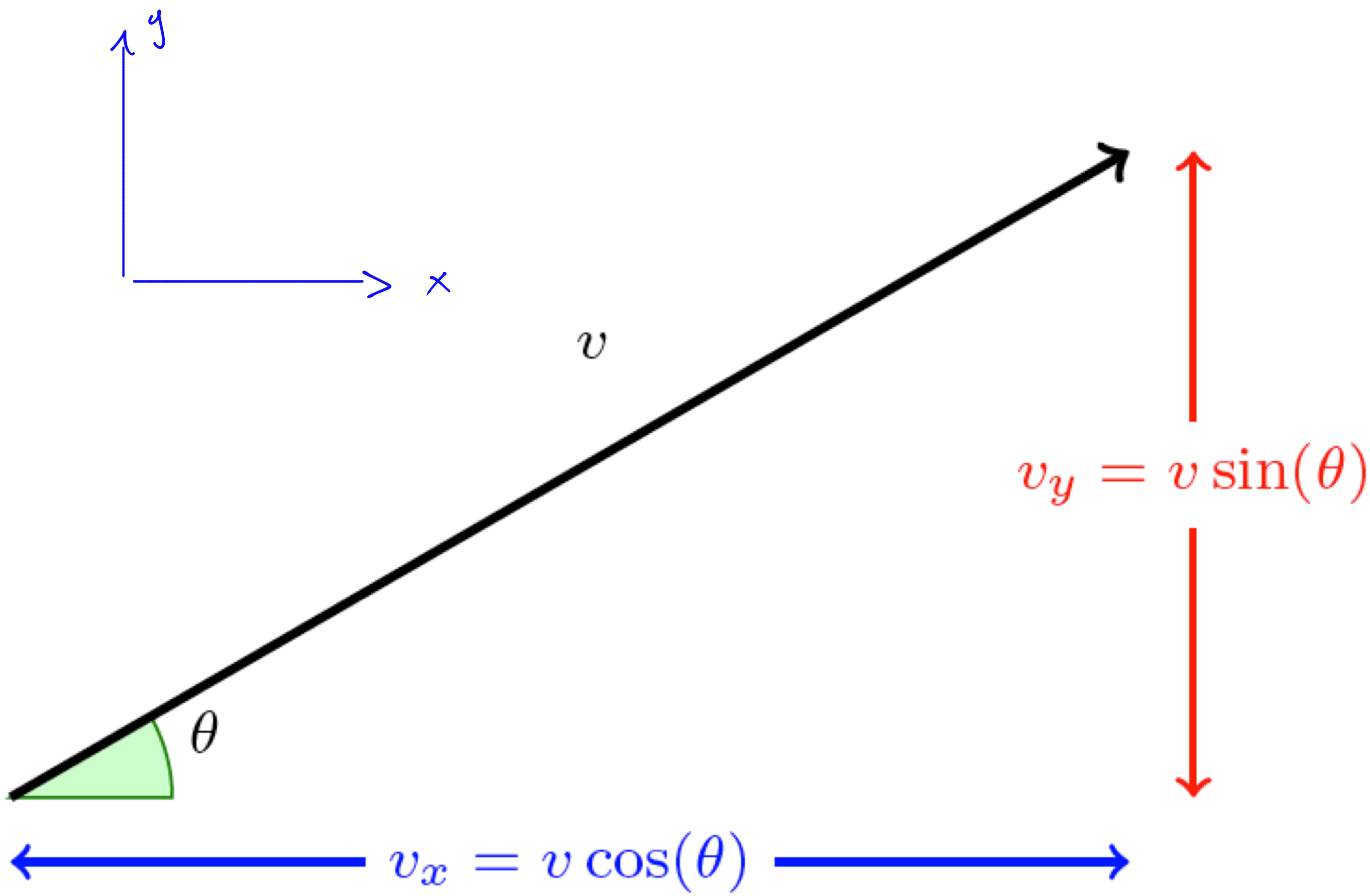


$$\vec{x}(t) = x_x\,\vec{e}_x(t) + x_y\,\vec{e}_y$$

Un vecteur
C'est quoi cela ?

$$\text{module : } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

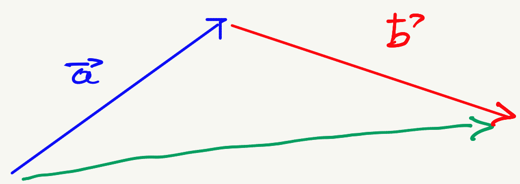
$$\text{orientation : } \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{v_y}{v_x}$$



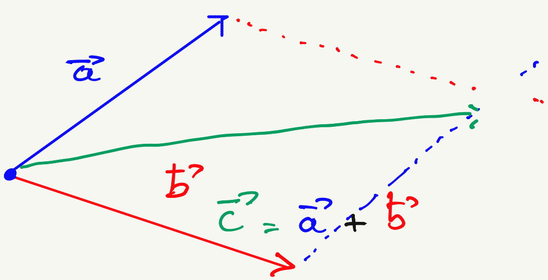
$\boxed{2}$

SOMME DE DEUX VECTEURS

2 TECHNIQUES GÉOMÉTRIQUE

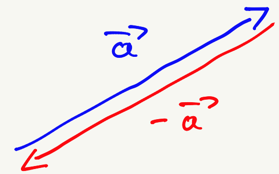


$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

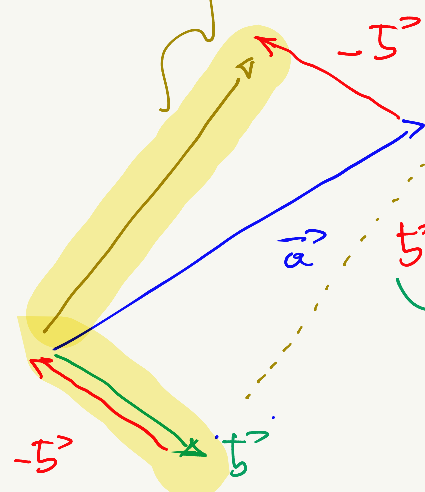


$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

SOUSTRACTION DE DEUX VECTEURS



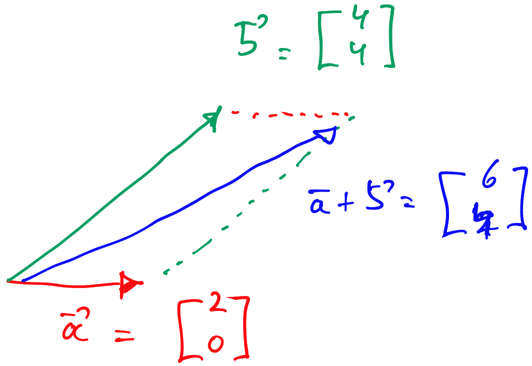
$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$



$\underbrace{\vec{b} + \vec{c}}\, = \underbrace{\vec{a} - \vec{b}}\, \cancel{+\vec{b}}$

$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

Somme de vecteurs

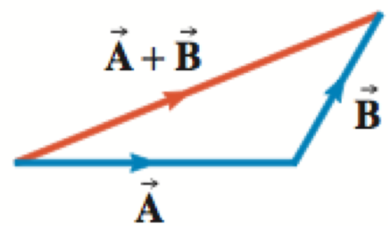


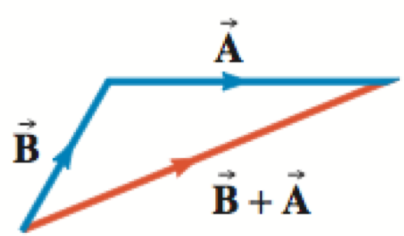
$$\vec{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} A_x + B_x \\ A_y + B_y \\ A_z + B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

On peut aussi additionner tout simplement les composantes !





$$\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}}$$

C'est commutatif !

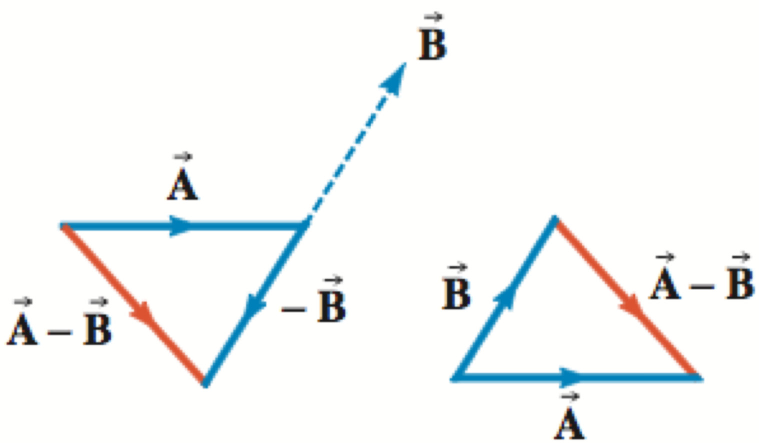
$$\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} A_x - B_x \\ A_y - B_y \\ A_z - B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

On peut aussi soustraire tout simplement les composantes !

$$\vec{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

Soustraction de vecteurs



3

DECOMPOSITION D'UN VECTEUR

C'EST INDEPENDANT DU REPERE !

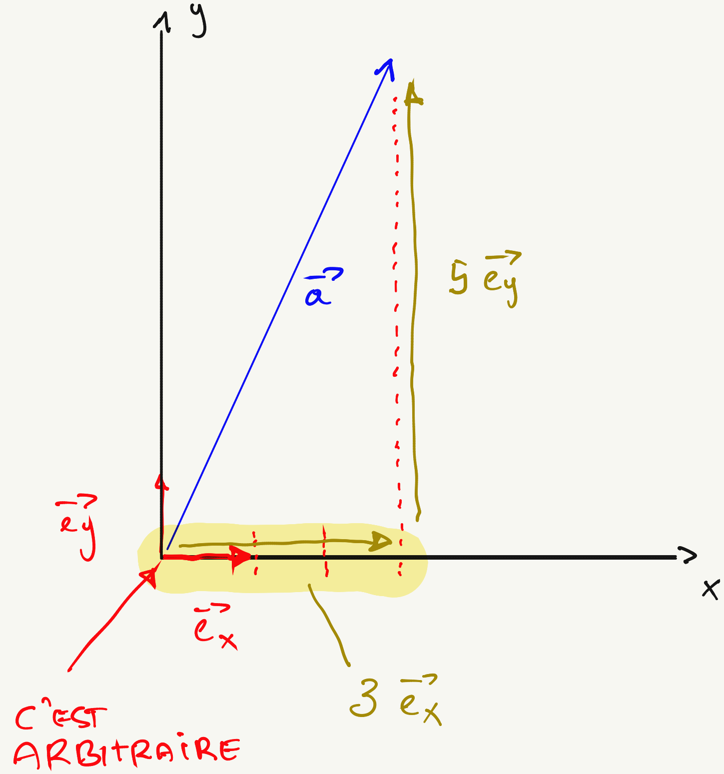
$$\vec{a} = a_x \underbrace{\vec{e}_x}_{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{xy}} + a_y \underbrace{\vec{e}_y}_{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{xy}}$$

$$\begin{bmatrix}a_x\\0\end{bmatrix}_{xy} \qquad \begin{bmatrix}0\\a_y\end{bmatrix}_{xy}$$

$$\begin{bmatrix}a_x\\a_y\end{bmatrix}_{xy}$$

C'EST POUR <u>UN</u> REPERE xy <u>PRECIS</u>

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$



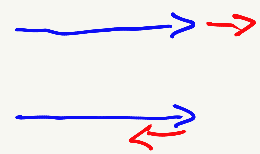
$a = 5$ $\vec{a}$

$b = 1$ $\vec{b}$ $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

? c

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

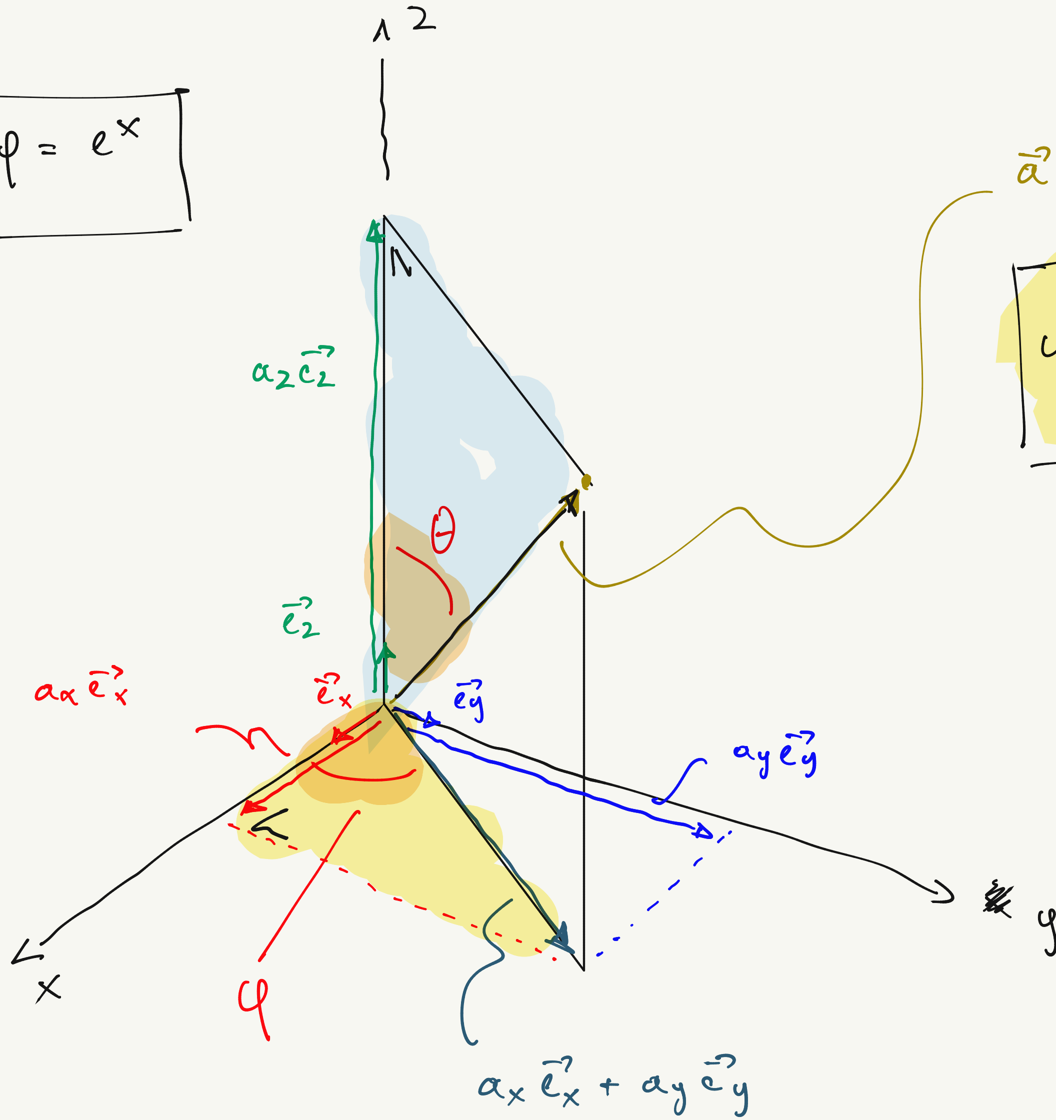
$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$c \in [6, 4]$

D

$$\boxed{\cos\varphi = e^x}$$



$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = a_x\vec{e_x} + a_y\vec{e_y} + a_z\vec{e_z}$$

A

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}}$$

$$a\cos\theta = a_z$$

$$\cos\theta = \frac{a_z}{a}$$

B

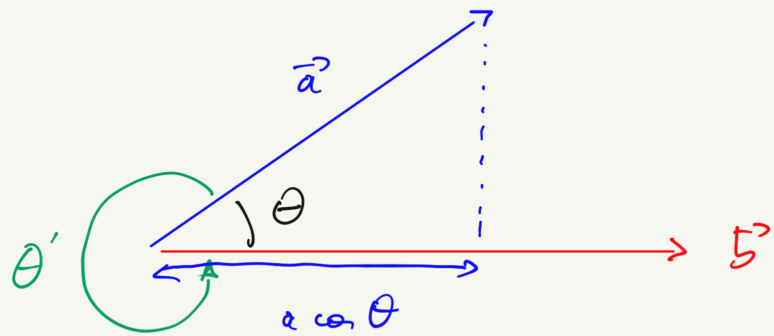
$$\boxed{\cos\varphi = \frac{a_y}{a}}$$

C

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{a_x}{a}}$$

$\boxed{4}$

PRODUIT SCALAIRE



$\cdot$ ET $\times$

C'EST POUR LES VECTEURS

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

$$= a\, b\, \cos(\theta)$$

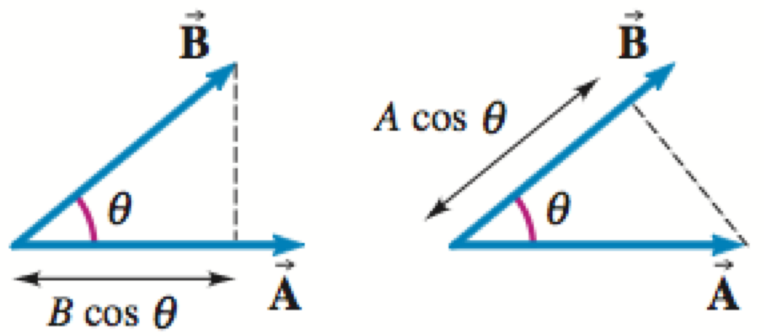
$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underbrace{3 \times 2}_{6} + \underbrace{(-5 \times 0)}_{}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$$

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB\cos(\theta)$$



Dot Product

$$\vec{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

Produit scalaire de vecteurs

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}}$$

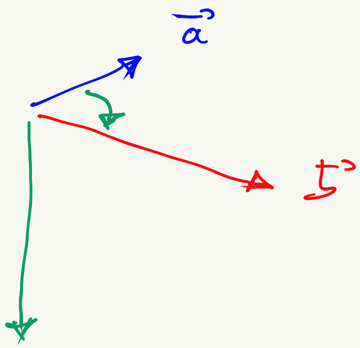
C'est commutatif !

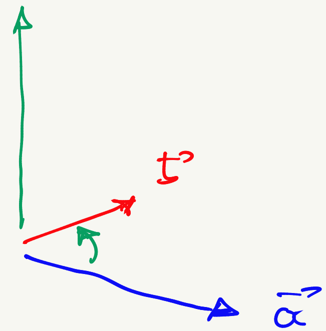
$\boxed{5}$

PRODUIT VECTORIEL

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

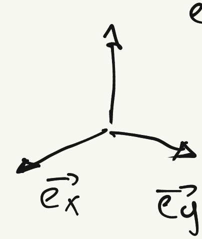
$$c = ab \sin(\theta)$$





$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{e_z} = \vec{e_x} \times \vec{e_y}$$



$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{bmatrix}$$

$$C = AB\sin(\theta)$$

Cross Product

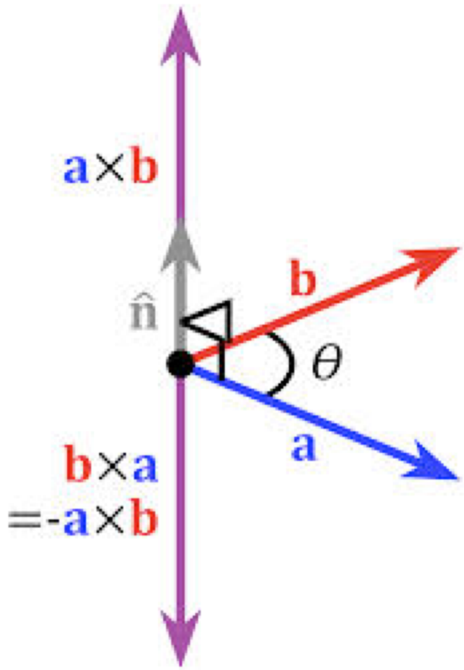
$$\vec{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

Produit vectoriel de vecteurs

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$$

Attention !
Le produit vectoriel n'est pas commutatif !

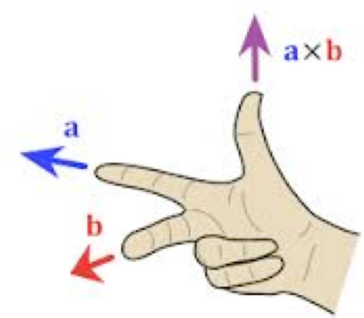


$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \left[\begin{array}{c} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{array}\right]$$

$$C = AB\sin(\theta)$$

Cross Product

Produit vectoriel de vecteurs



$\boxed{6}$

$\boxed{\text{MOUVEMENT 2D}}$ = $\boxed{\text{2 MOUVEMENTS 1D :-)}}$

$$\vec{x}(t) = \underbrace{x_x(t)}_{x(t)}\,\vec{e}_x + \underbrace{x_y(t)}_{y(t)}\,\vec{e}_y + \underbrace{x_z(t)}_{z(t)}\,\vec{e}_z$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\vec{e}_x + v_y(t)\,\vec{e}_y \quad \dots\dots$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\,\vec{e}_x + a_y(t)\,\vec{e}_y$$

$x(t)$
$x'(t)$
$x''(t)$

$y(t)$
$y'(t)$
$y''(t)$

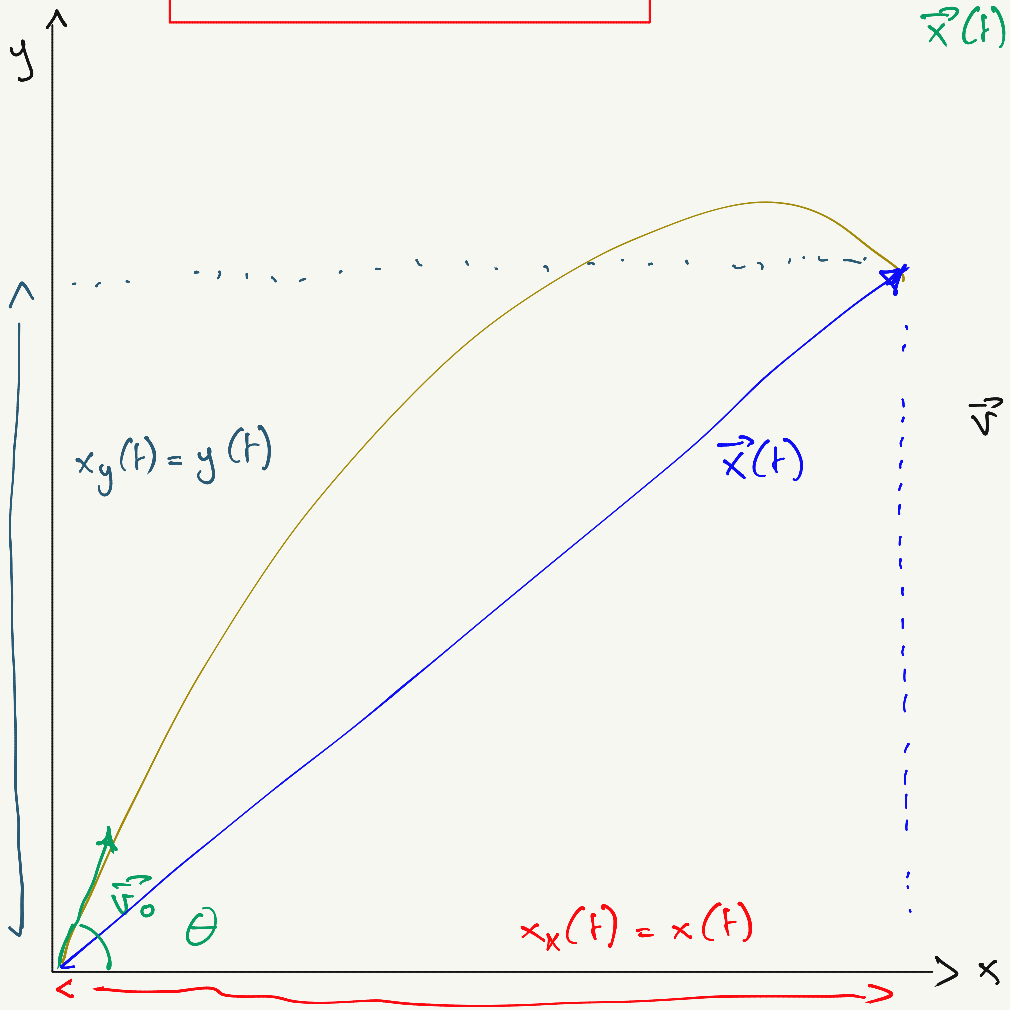
⚠ ATTENTION IL Y A UNE AMBIGUITE

$$|x| = \|x\| = x = \sqrt{x_x^2 + x_y^2 + x_z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

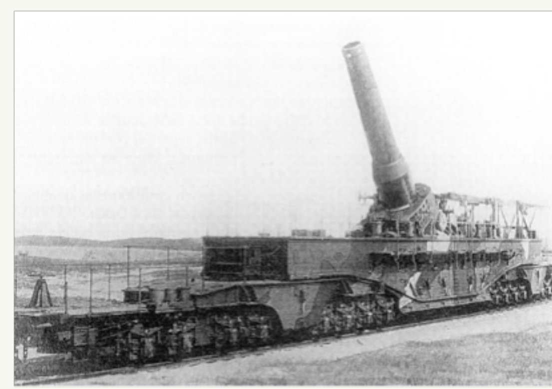
LA TRAJECTOIRE DE L'OBUS !

$$\vec{v}_0 = \begin{bmatrix} v_0 \cos\theta \\ v_0 \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} v_0 \cos\theta \; t \\ v_0 \sin\theta \; t - g\, t^2/2 \end{bmatrix}$$

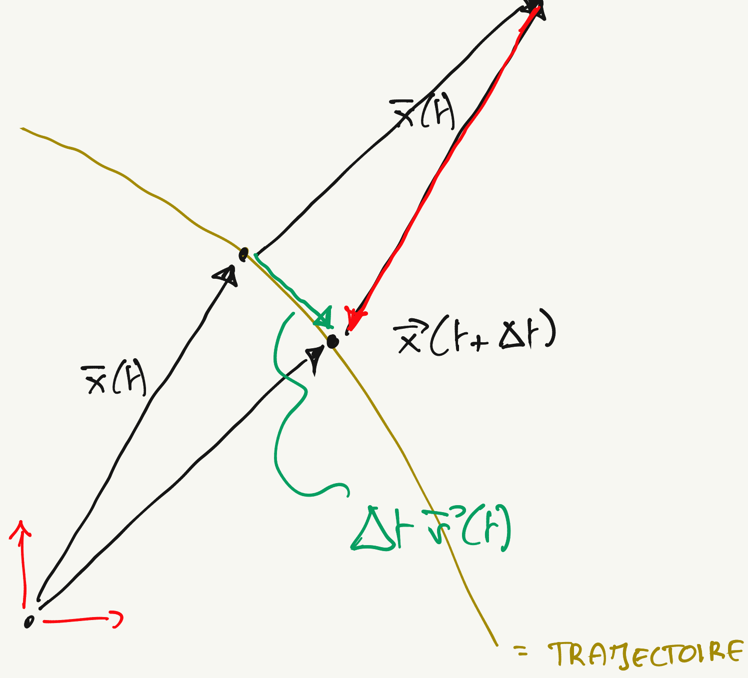


$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{x}(t+\Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t}$$

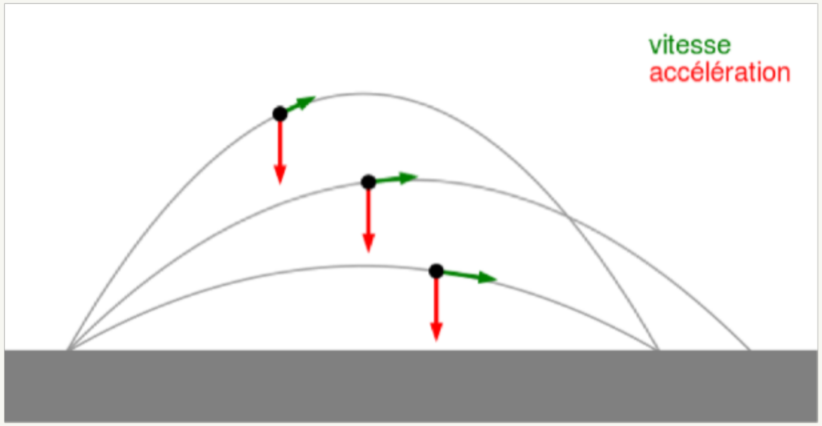


7

LA VITESSE EST TANGENTE A LA TRAJECTOIRE

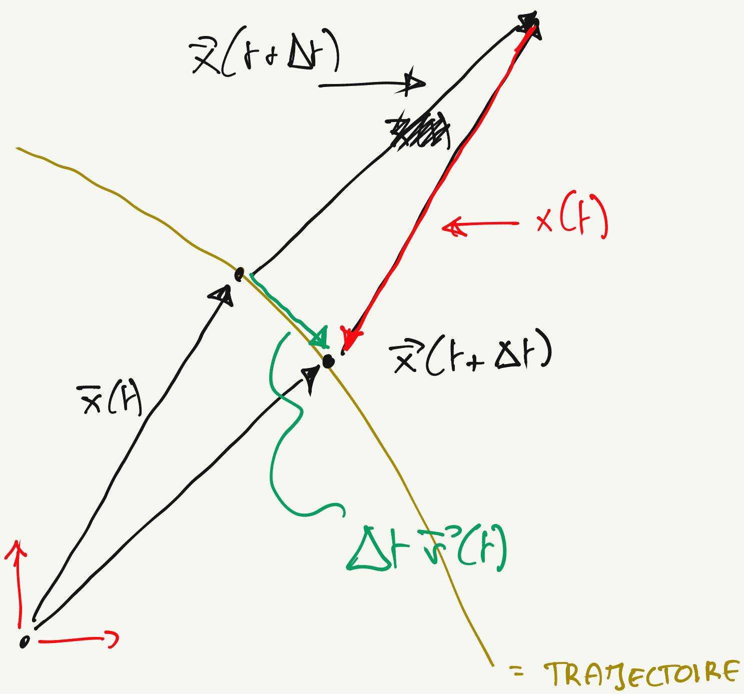


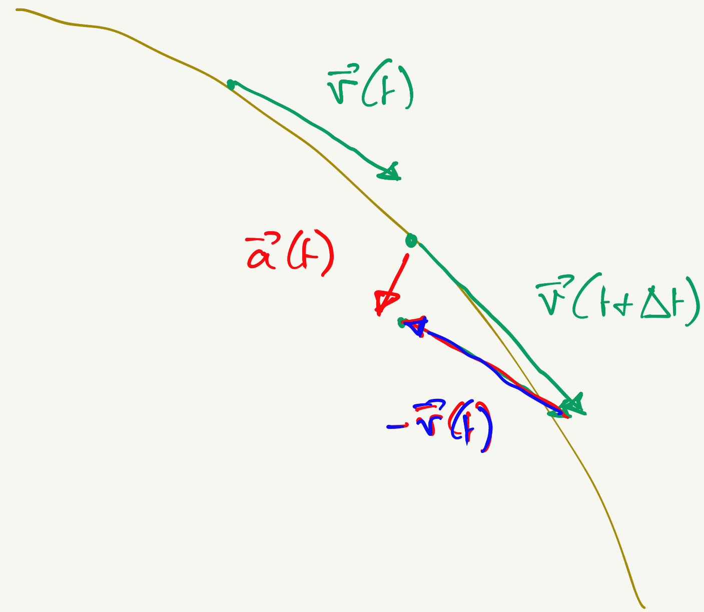
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{x}(t+\Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t}$$



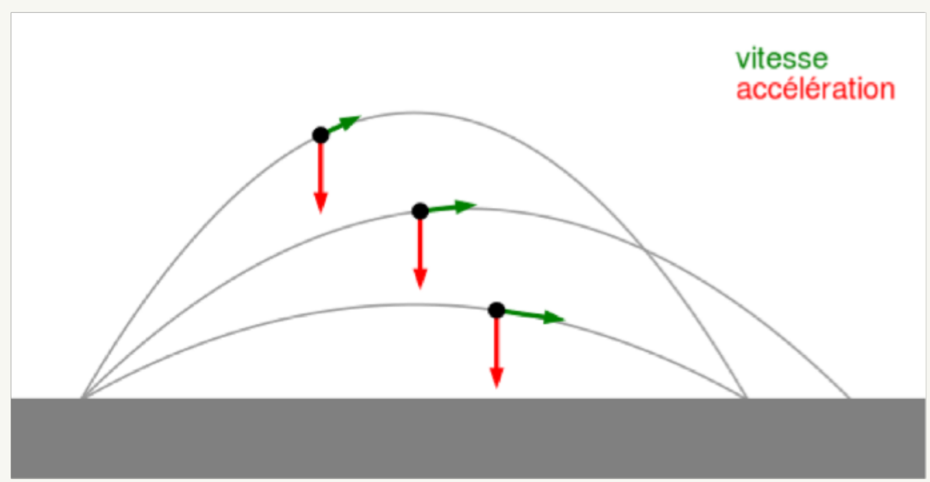
$\boxed{8}$

L'ACCELERATION EST CENTRIPÈTE

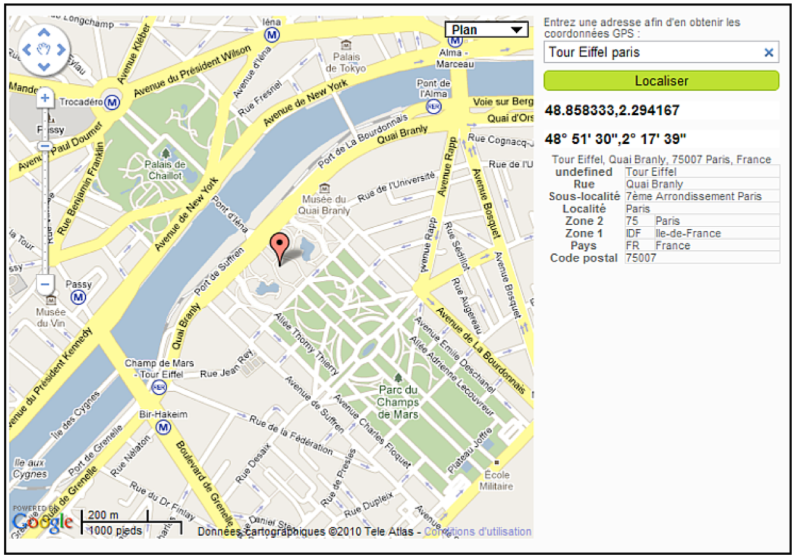




$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta}$$



$$\vec{\mathbf{x}}(t) = x(t)\ \vec{\mathbf{e}}_x + y(t)\ \vec{\mathbf{e}}_y + z(t)\ \vec{\mathbf{e}}_z$$



$$\vec{\mathbf{x}}(t) : \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

Les composantes,
ce n'est qu'une représentation
particulière du vecteur !

Ce n'est donc pas vraiment une égalité !

Le vecteur position d'un point

Composantes cartésiennes du vecteur !

La position est indépendante du système d'axes choisis.
Les composantes sont dépendantes du système d'axes

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t)\ \vec{\mathbf{e}}_x + \frac{dy}{dt}\ \vec{\mathbf{e}}_y + \frac{dz}{dt}\ \vec{\mathbf{e}}_z$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) : \left[\begin{array}{c} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{array}\right]$$

Les composantes,
ce n'est qu'une représentation
particulière du vecteur !

Ce n'est donc pas une égalité !

La vitesse d'un point

Composantes cartésiennes du vecteur vitesse !

La vitesse est indépendante du système d'axes choisis.
Les composantes sont dépendantes du système d'axes

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t)\ \vec{\mathbf{e}}_x + \frac{dy}{dt}\ \vec{\mathbf{e}}_y + \frac{dz}{dt}\ \vec{\mathbf{e}}_z$$

Velocity

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}$$

Speed

Il y a vitesse, vitesse et vitesse !

Il y a le vecteur vitesse : c'est cela notre vitesse :-)
Le module de la vitesse : c'est la vitesse indiquée sur le tableau de bord de votre voiture !
La direction horizontale de la vitesse : c'est le cap suivi par le marin !
La direction verticale de la vitesse : c'est la pente de la route !

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) = \frac{dv_x}{dt}(t)\ \vec{\mathbf{e}}_x + \frac{dv_y}{dt}\ \vec{\mathbf{e}}_y + \frac{dv_z}{dt}\ \vec{\mathbf{e}}_z$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{d^2\vec{\mathbf{x}}}{dt^2}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t)\ \vec{\mathbf{e}}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\ \vec{\mathbf{e}}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\ \vec{\mathbf{e}}_z$$

L'accélération d'un point

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \begin{bmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{bmatrix}$$

Composantes cartésiennes du vecteur accélération !

L'accélération est indépendante du système d'axes choisis.
Les composantes sont dépendantes du système d'axes

Tout mouvement présente toujours une accélération,
sauf si c'est un mouvement rectiligne uniforme.
C'est dû au changement de direction ou du module de la vitesse !

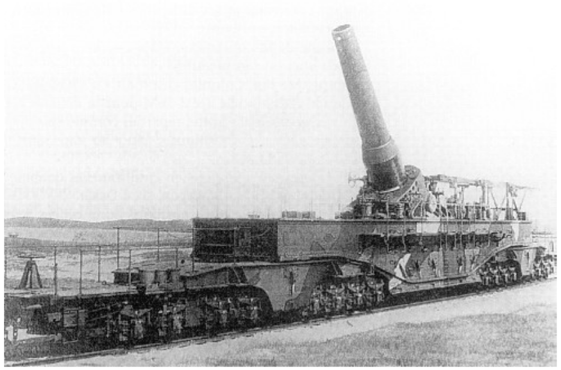
Le MRUA :-)

$$\vec{\mathbf{x}}(t) : \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix}$$

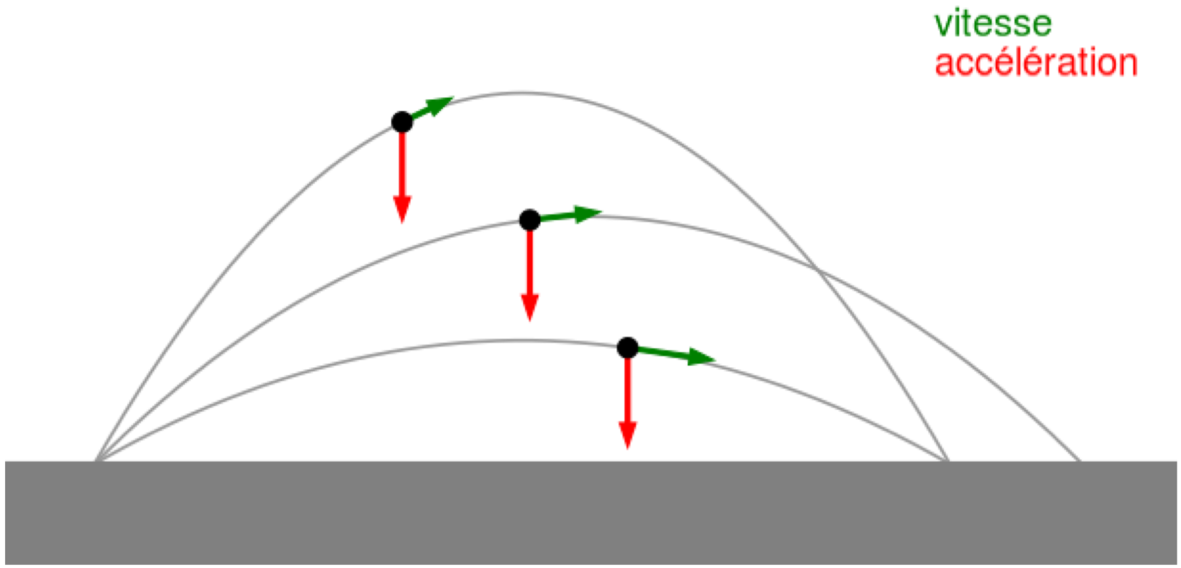
$$\vec{\mathbf{v}}(t) : \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) : \begin{bmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

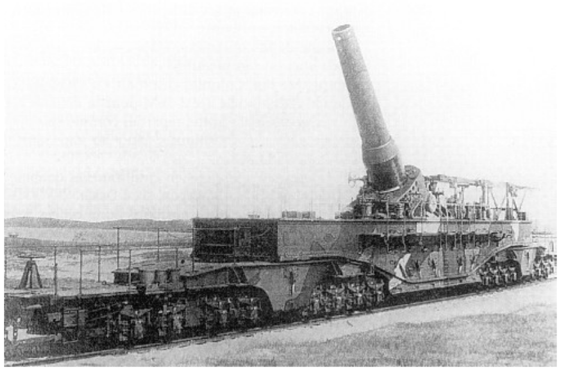
La description mathématique du mouvement d'un projectile sous l'effet de la gravité en négligeant la friction de l'air et des tas d'autres effets rigolos comme la rotation de la terre...



Le MRUA :-)



Comment obtenir la distance de l'impact par rapport à l'obusier ?



En général

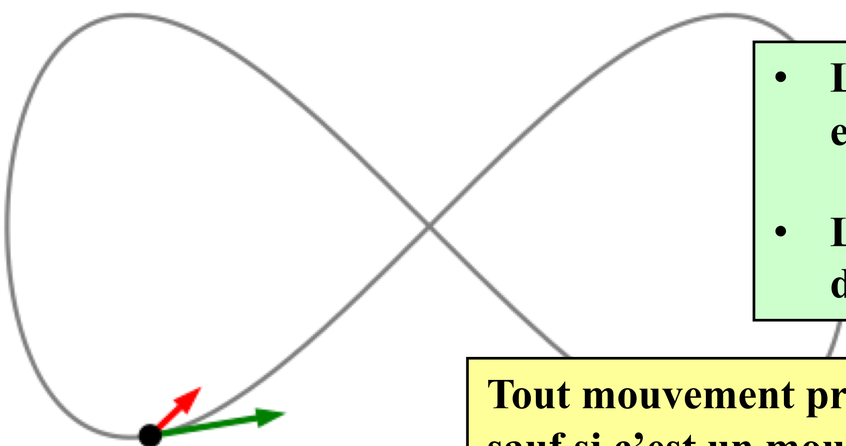
$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t)\ \vec{\mathbf{e}}_x + \frac{dy}{dt}\ \vec{\mathbf{e}}_y$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) = \frac{dv_x}{dt}(t)\ \vec{\mathbf{e}}_x + \frac{dv_y}{dt}\ \vec{\mathbf{e}}_y$$

vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$

accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$

Ne pas oublier !

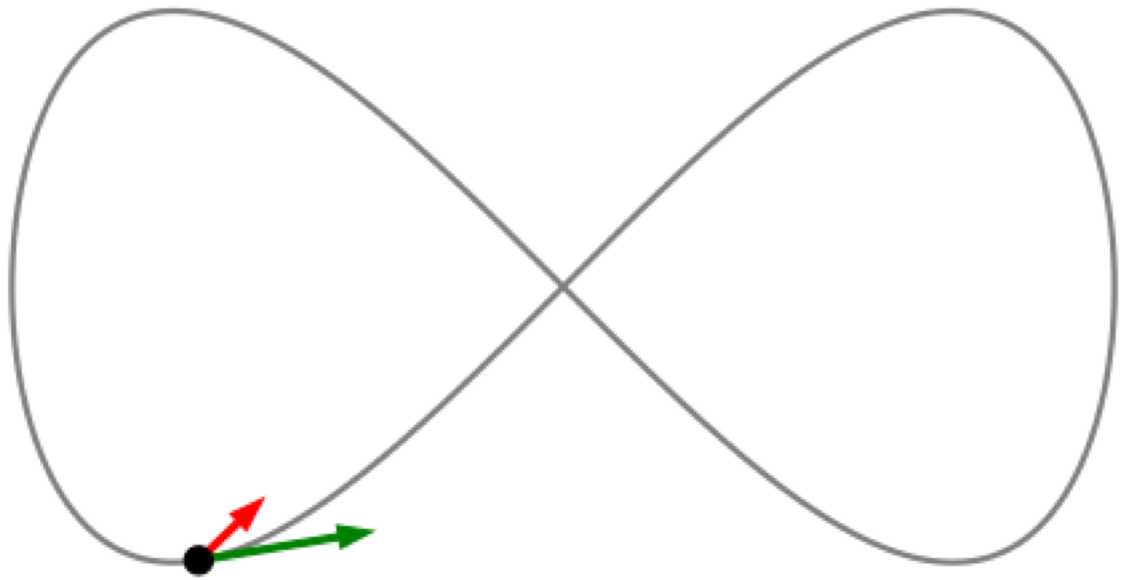


- **La vitesse instantanée est tangente à la trajectoire !**
- **L'accélération correspond à un changement de norme et/ou de direction de la vitesse !**

Tout mouvement présente toujours une accélération, sauf si c'est un mouvement rectiligne uniforme.
C'est dû au changement de direction ou du module de la vitesse !

vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$

accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$



Le mouvement,
La vitesse,
L'accélération…

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{v}}(t) \\
\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{a}}(t) \\
m\,\vec{\mathbf{a}}(t) &= \sum \vec{\mathbf{F}}(t)
\end{aligned}
$$

- **La position, la vitesse, l'accélération, les forces sont des vecteurs ! Il faut donc bien maîtriser l'algèbre vectorielle !**
- **A l'exception du mouvement rectiligne à vitesse constante, tout autre type de mouvement présente une accélération centripète due au changement de direction et/ou de norme de la vitesse.**