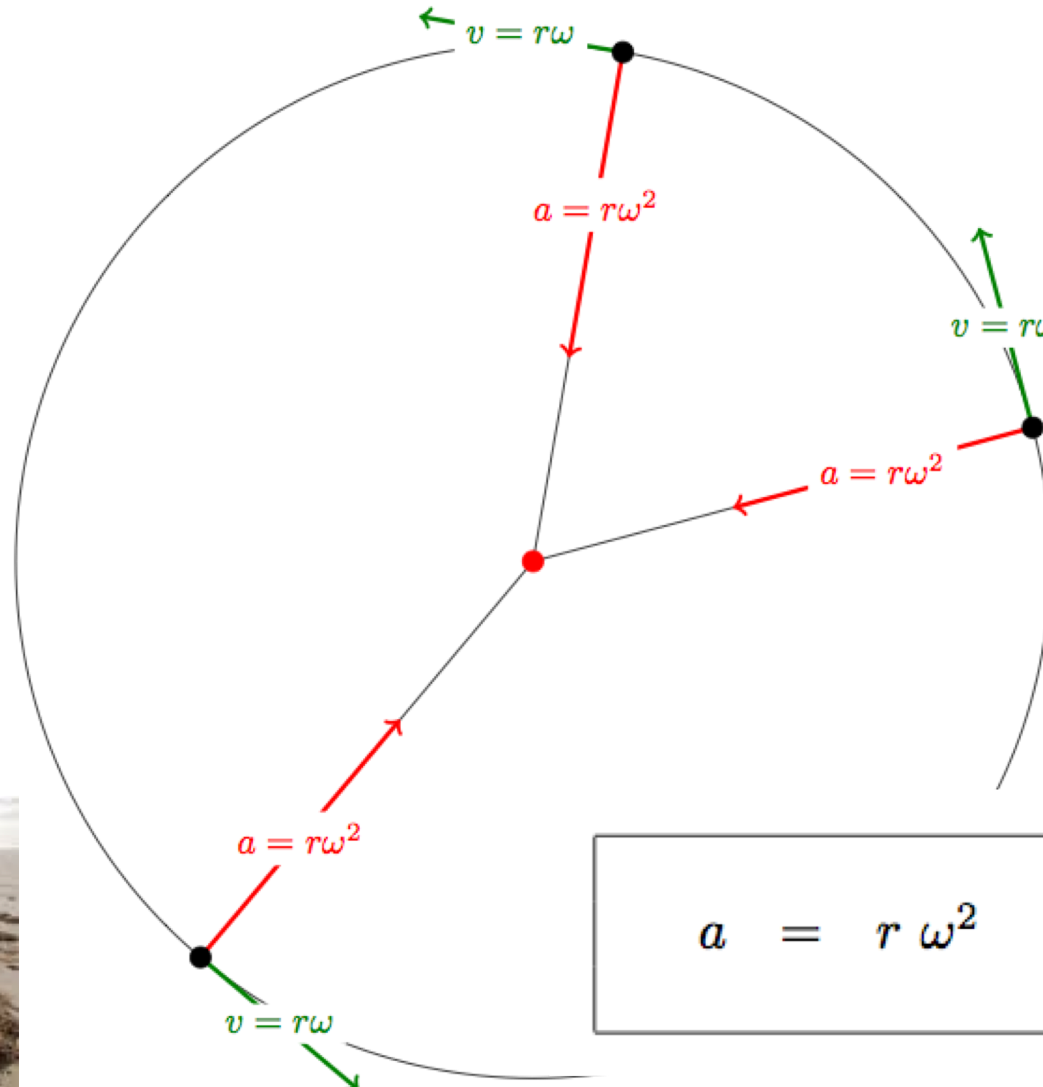
Mouvement circulaire uniforme

$$v = r\,\omega$$

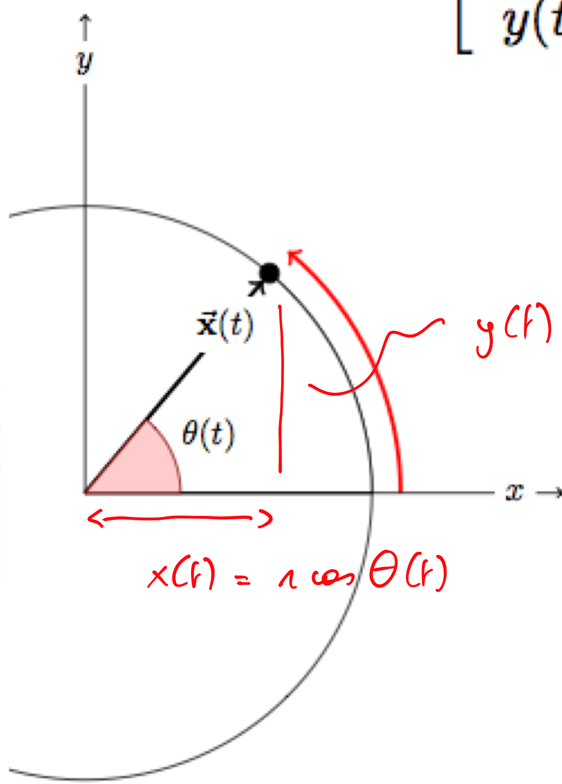


$$a = r\,\omega^2$$

Vitesse angulaire constante : ω
Vitesse tangentielle
Accélération centripète

Le mouvement circulaire est harmonique

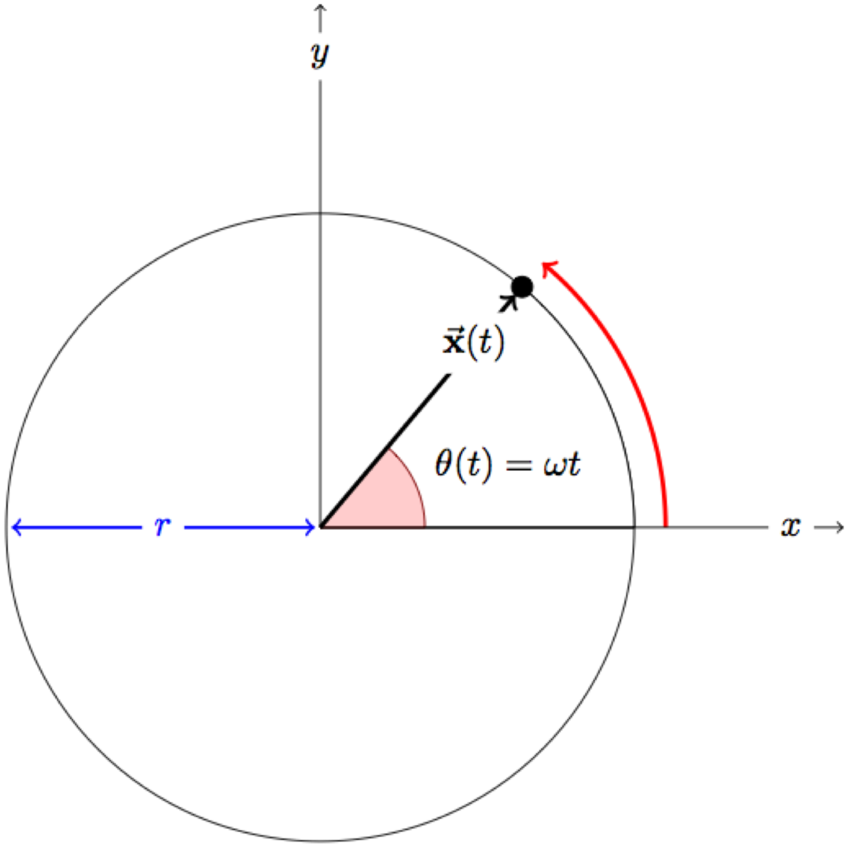
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\overbrace{\theta(t)}^{\omega t}) \\ r\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$



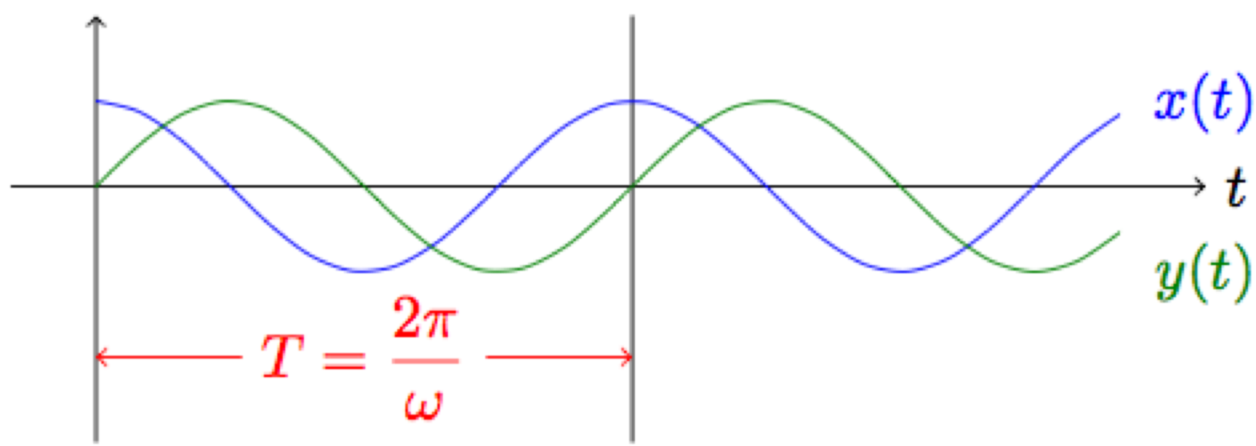
$y(t) = r \sin(\theta(t))$

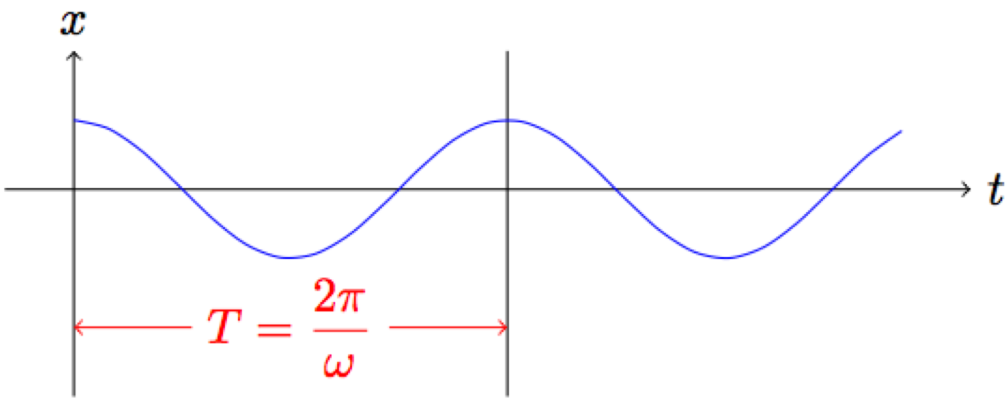
$x(t) = r \cos \theta(t)$

Le retour du cos et du sin



$$
\begin{aligned}
x(t) &= r\,\cos\left(\omega\,t\right)\\
y(t) &= r\,\sin\left(\omega\,t\right)
\end{aligned}
$$





$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

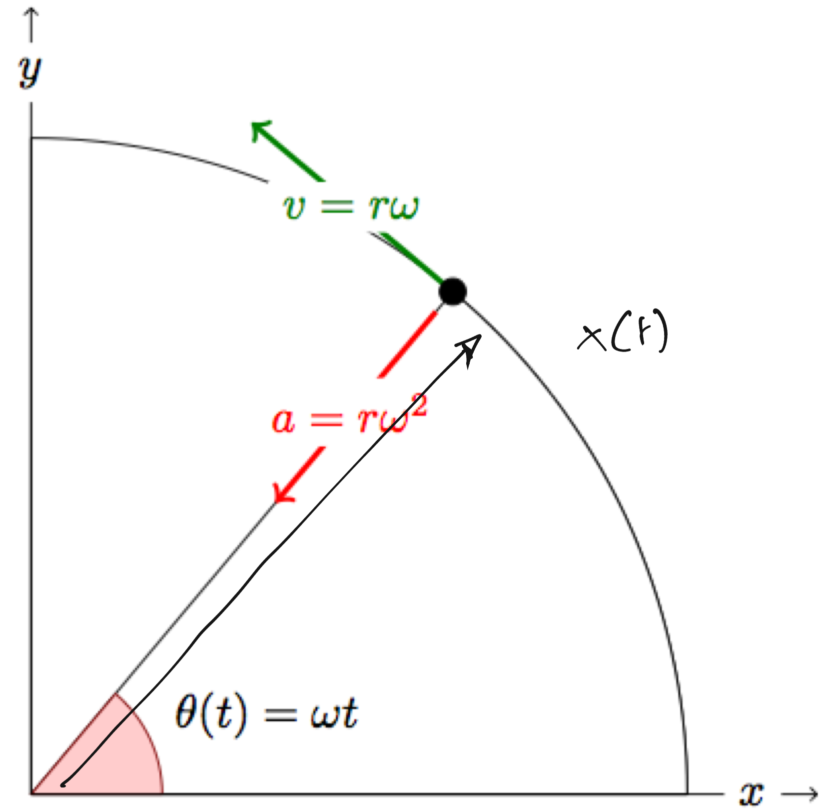
$$v = r\,\omega$$

Période : T

Fréquence : f

Vitesssse angulaire : ω

Accélération centripète



$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = r\omega \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = r\omega^2 \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

Vitesse tangentielle

$\boxed{1}$

$\boxed{\text{ASPIRATEUR}}$

600 tours/minutes

$R = 0{,}1 \text{ m}$

$\longrightarrow \quad f = 10 \quad [1/s] \quad [Hz]$

$T = \dfrac{1}{f} = 0.1 \quad [s]$

$\omega = \underbrace{2\pi f}_{62{,}8} \quad \underbrace{[1/s]}_{[rad/s]}$

$v = r\omega = 6{,}3 \text{ m/s}$

$a = r\omega^2 = \underbrace{\pm\ 360 \text{ m/s}^2}_{\text{BIG !}}$

Aspirateur
600 tours/minute
R = 10 cm

$$f = 10 \text{ Hertz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 0.1 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 62.8 \text{ rad/s}$$

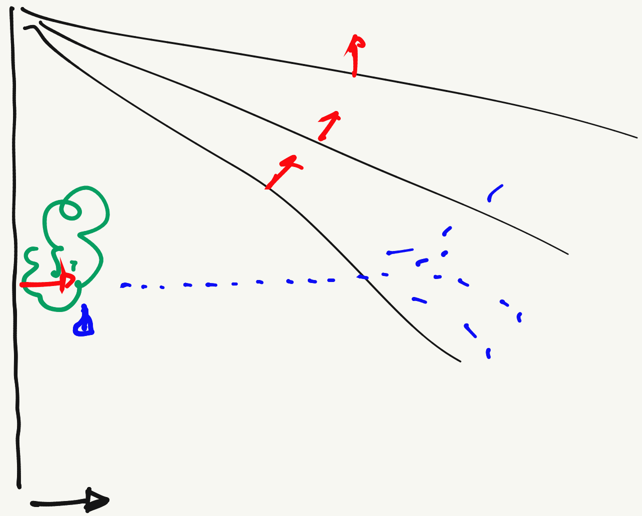
$$v = r\,\omega = 6.28 \text{ m/s}$$

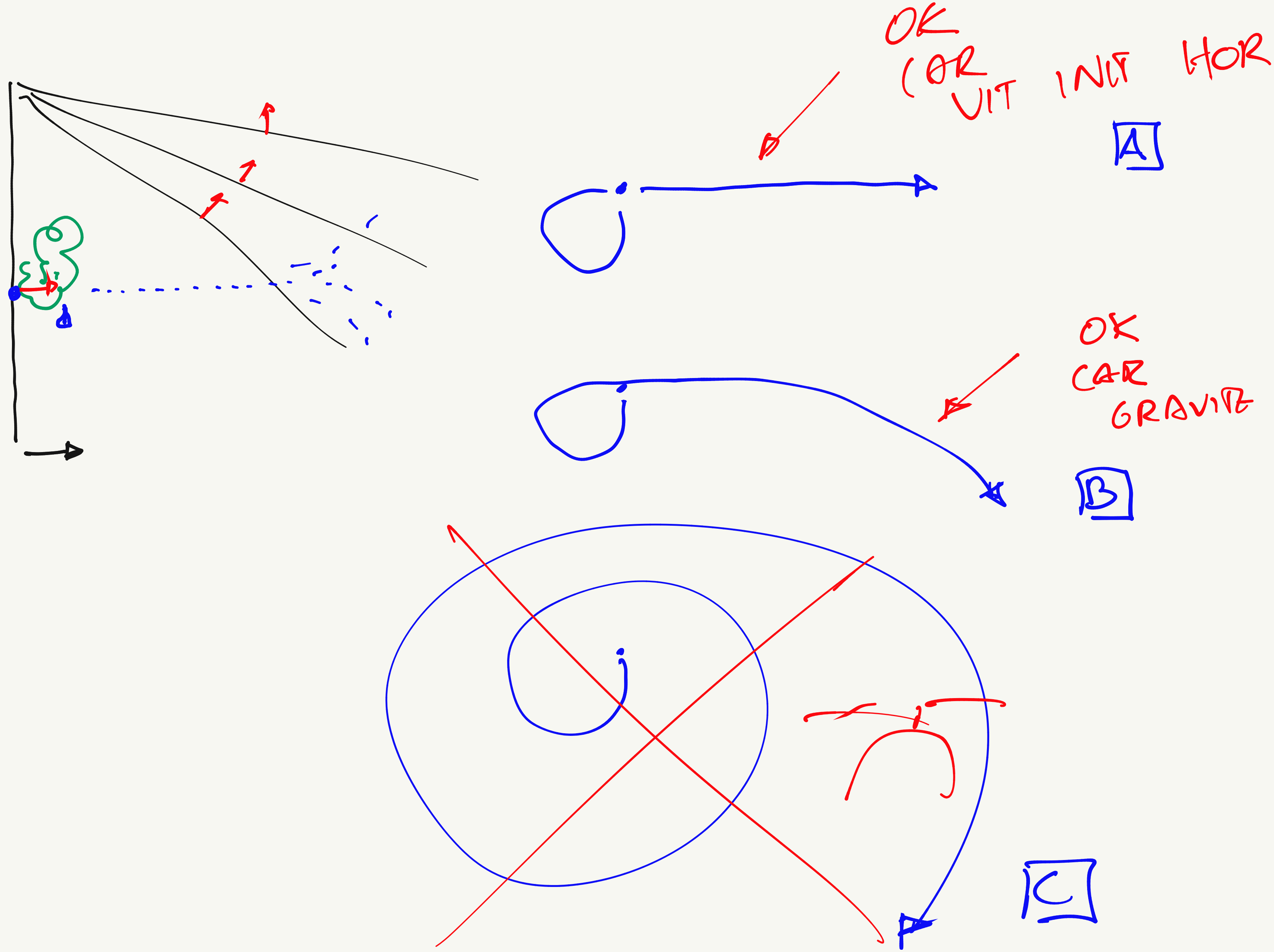
$$a = r\,\omega^2 = 394.4 \text{ m/s}^2$$

C'est quarante fois
la valeur de l'accélération de la gravité !
C'est une valeur très élevée !

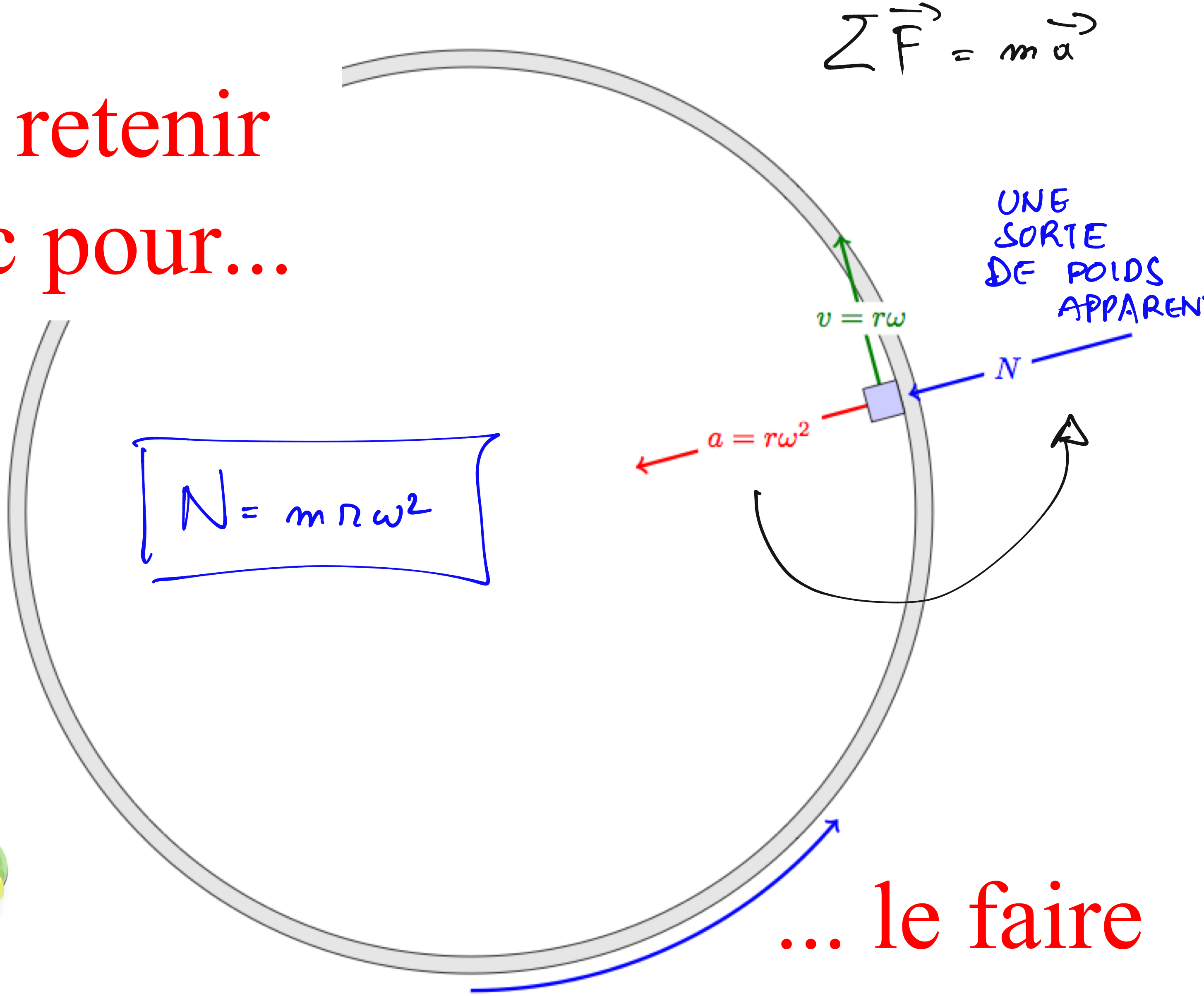
2

ESSOREUSE A SALADE




OK CAR VIT INIT HOR
A
OK CAR GRAVITE
B
C

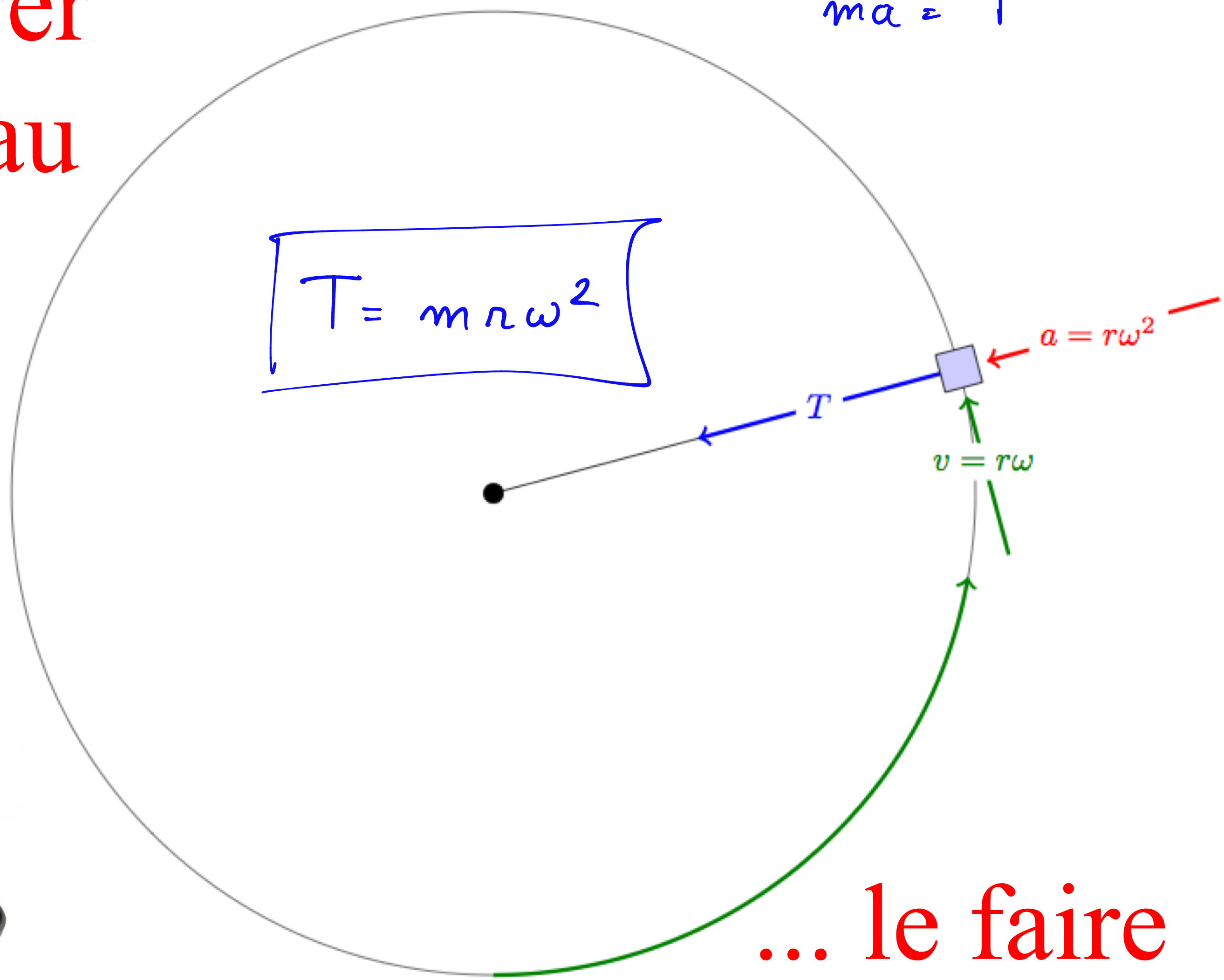
Il faut retenir le bloc pour...



... le faire tourner !

Il faut tirer sur le seau pour...

$ma = T$



$$\boxed{T = m r \omega^2}$$

... le faire tourner !

$\boxed{3}$

MACHINE A LAVER

3600 tours / minutes

$R = 0{,}15 \text{ m}$

$\longrightarrow \quad f = 60$ Hertz

$T = 0{,}017$ sec

$\omega = 2\pi f = 370$ rad/s

$v = r\omega$

ω^2

$a = \underbrace{r\omega^2}$

$400 \times 400 = 160000$

ω^2

$0.15 \; \omega^2$

$$\begin{array}{r} 16000 \\ 8000 \\ \hline 24000 \text{ m/s}^2 \end{array}$$

HUGE!

Machine à laver
3600 tours/minute
R = 15 cm

$$f = 60 \text{ Hertz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 0.017 \text{ s}$$

$$\omega = 2\pi f = 377 \text{ rad/s}$$

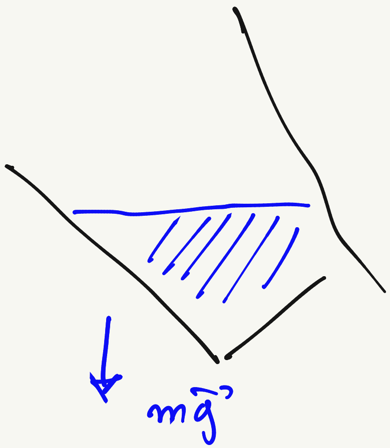
$$v = r\,\omega = 56.5 \text{ m/s}$$

$$a = r\,\omega^2 = 21318 \text{ m/s}^2$$

C'est deux mille fois
la valeur de l'accélération de la gravité !
C'est une valeur vraiment très très élevée !

$\boxed{4}$

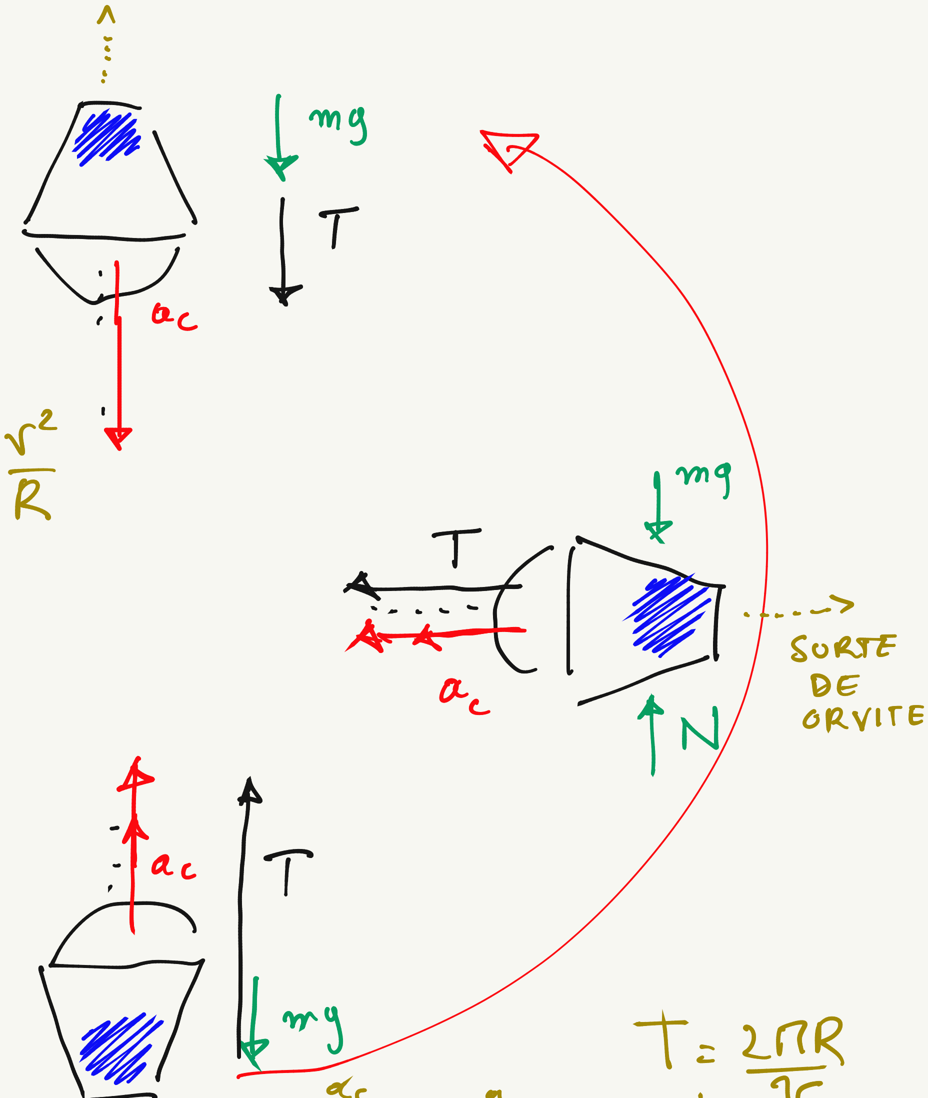
EXPERIENCE DU SAUT !



$$a_c = R\omega^2 = R\,\frac{v^2}{R^2} = \frac{v^2}{R}$$

$$v = R\omega$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$



$$v = \sqrt{R\,10}$$

$$\overbrace{\frac{v^2}{R}}^{a_c} > \overbrace{10}^{a}$$

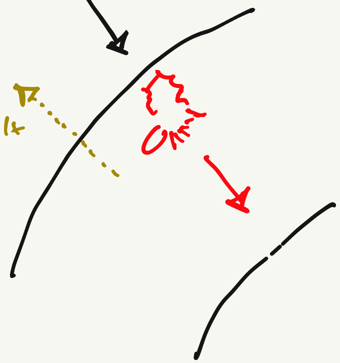
$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} = 2\ \text{sec}$$

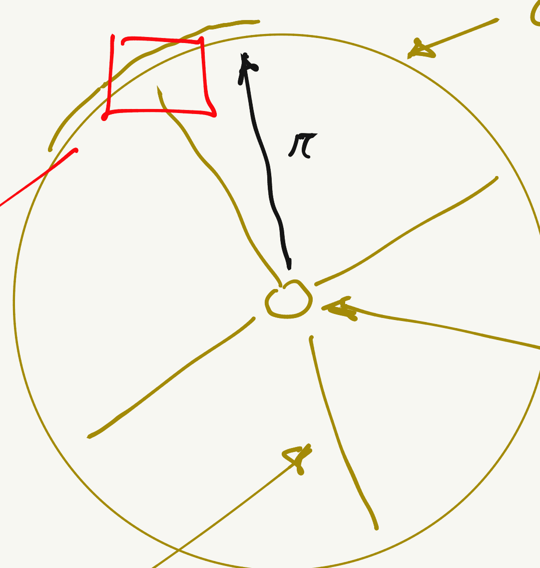
$\boxed{5}$

STATION SPATIALE

$N = r\omega^2$

GRAVITE RESSENTIE





"GRAVITE"

r

"SANS GRAVITE"

ZONE OU LA "GRAVITE" AUGMENTE PROGRESSIVEMENT

$R = 100\ m$

$v = R\omega$

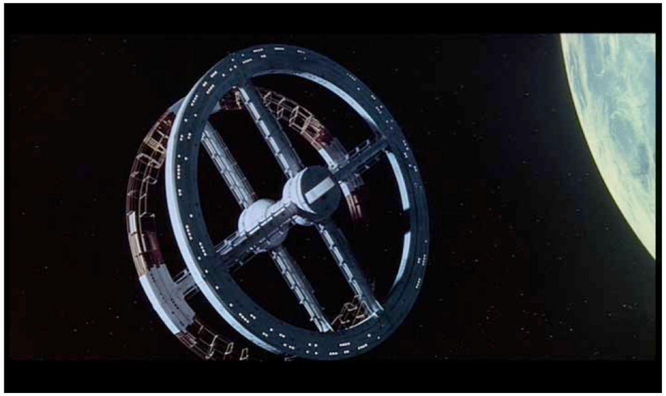
$a = R\omega^2$

10   100

$\omega = \sqrt{0{,}1} = 0{,}3$

$v = 30\ m/s$

$T = 2\pi\omega = 20\ sec$



Station spatiale
3 tours/minute
R = 100 m

$$a = r\,\omega^2 = 10\ \mathrm{m/s^2}$$

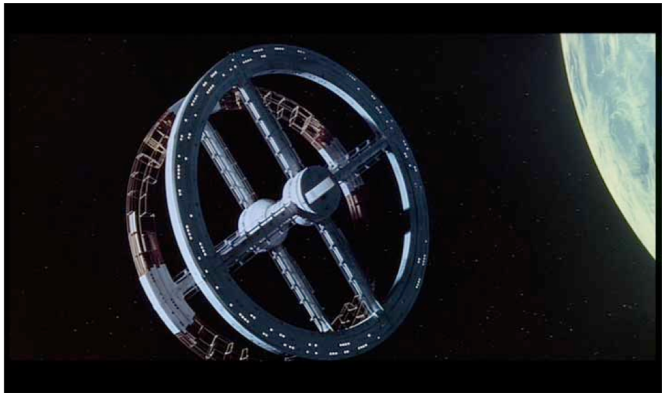
$$\omega^2 = 0.1\ (\mathrm{rad/s})^2 \qquad \omega = 0.3\ \mathrm{rad/s}$$

$$v = r\,\omega = 30\ \mathrm{m/s}$$

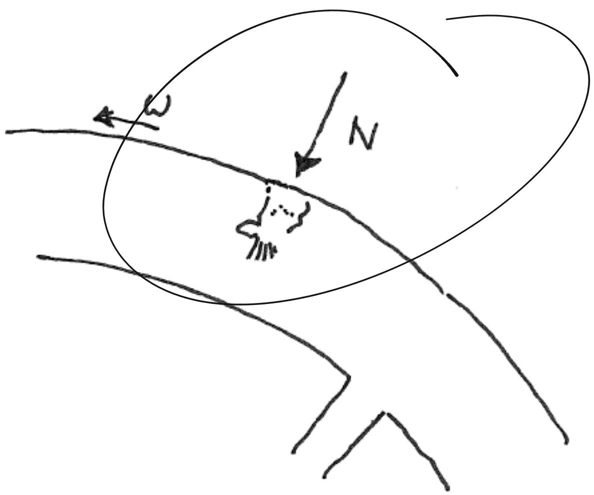
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0.05\ \mathrm{Hertz}$$

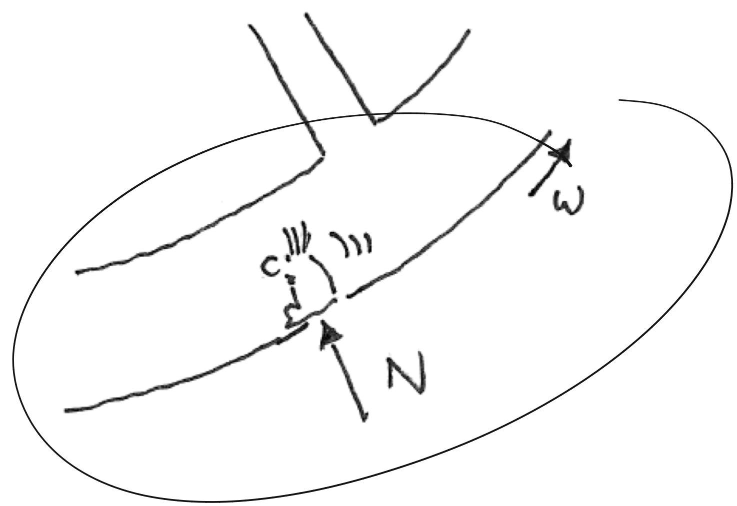
$$T = \frac{1}{f} = 20\ \mathrm{s}$$

On fait tourner la station spatiale pour obtenir une gravité artificielle !



Station spatiale
3 tours/minute
R = 100 m



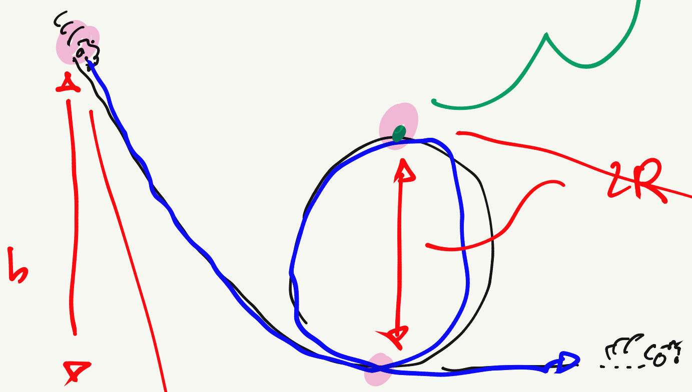


On fait tourner la station spatiale pour obtenir une gravité artificielle !

$\boxed{6}$

EXERCICE CLASSIQUE

HYP Y A PAS DE FROTTEMENT !!



EST-CE QUE LA VOITURE VA TOMBER ?

$$a_c = \frac{v^2}{R} = g$$

$$U_g = mg2R$$
$$K = \frac{mv^2}{2}$$

$$K = 0$$
$$U_g = mgh$$

$$K = mgh = \frac{1}{2} m v_*^2$$
$$U_g = 0$$

$$\cancel{m}gh = \cancel{m}g2R + \cancel{m}\frac{v^2}{2}$$

$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{R} = g}$$

$$\frac{2g(h-2R)}{R} = g$$

$$2\cancel{g}(h-2R) = \cancel{g}R$$

$$2h - 4R = R$$

$$2h = 5R$$

$$h = \frac{5R}{2}$$

$$\frac{v^2}{2} = gh - g\,2R$$

$$v^2 = 2g(h-2R)$$

$$\boxed{\cancel{m}gh = \cancel{m}g\,2R + \cancel{m}\frac{v^2}{2}}$$

Le MRUA :-)

$$
\begin{aligned}
y''(t) &= a \\
y'(t) &= \overbrace{v_0 + a\,t}^{v(t)} \\
y(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{a\,t^2}{2}
\end{aligned}
$$

**Des millions de gens ont vu tomber une pomme,
Newton est le seul qui se soit demandé pourquoi...
(Bernard Baruch)**

Le MCUA :-)

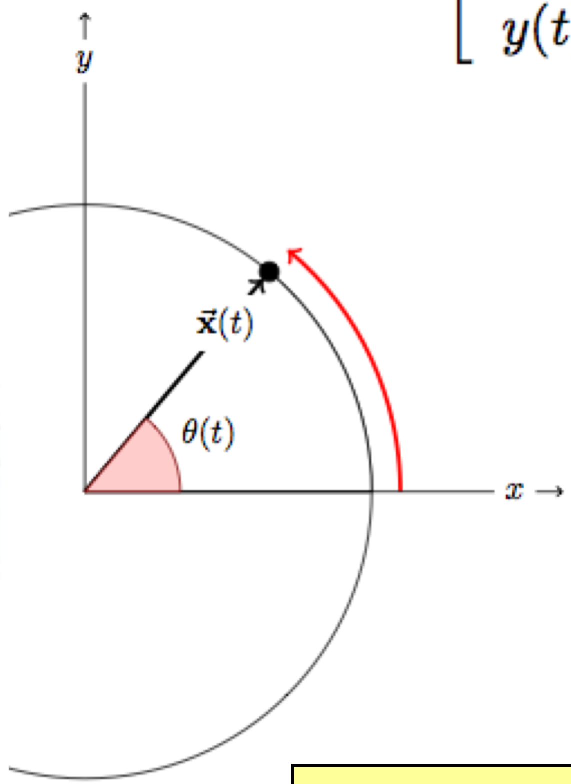
$$\begin{aligned}
\theta''(t) &= \alpha \\
\theta'(t) &= \overbrace{\omega_0 + \alpha\, t}^{\omega(t)} \\
\theta(t) &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha\, t^2}{2}
\end{aligned}$$

Maintenant, faisons strictement et exactement la même chose avec un mouvement circulaire !

Définissons le MCUA !

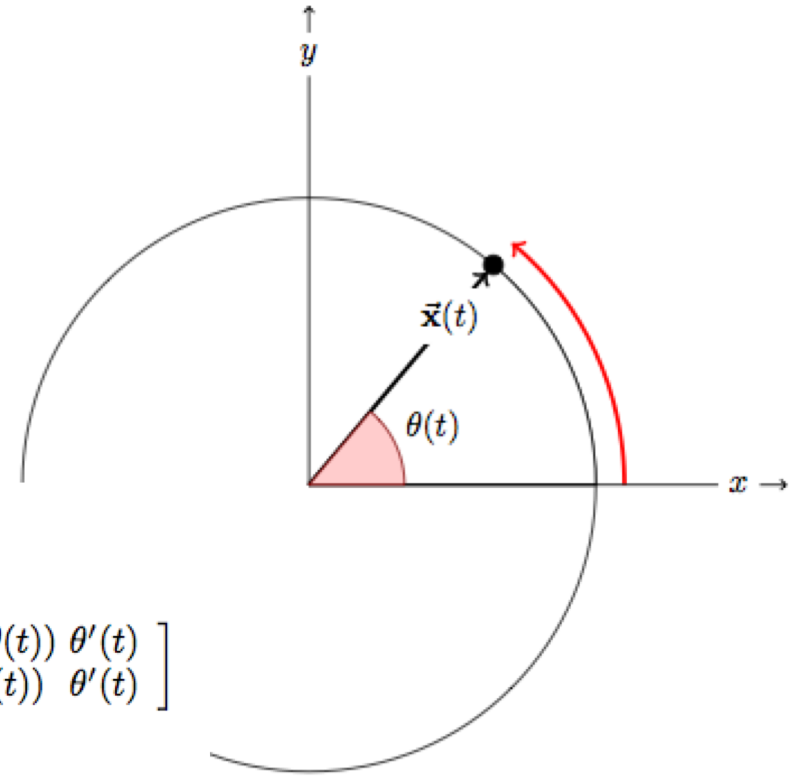
Le MCUA :-)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta(t)) \\ r\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$



Mouvement circulaire non-uniforme...
Vitesse angulaire non-constante
Accélération angulaire constante

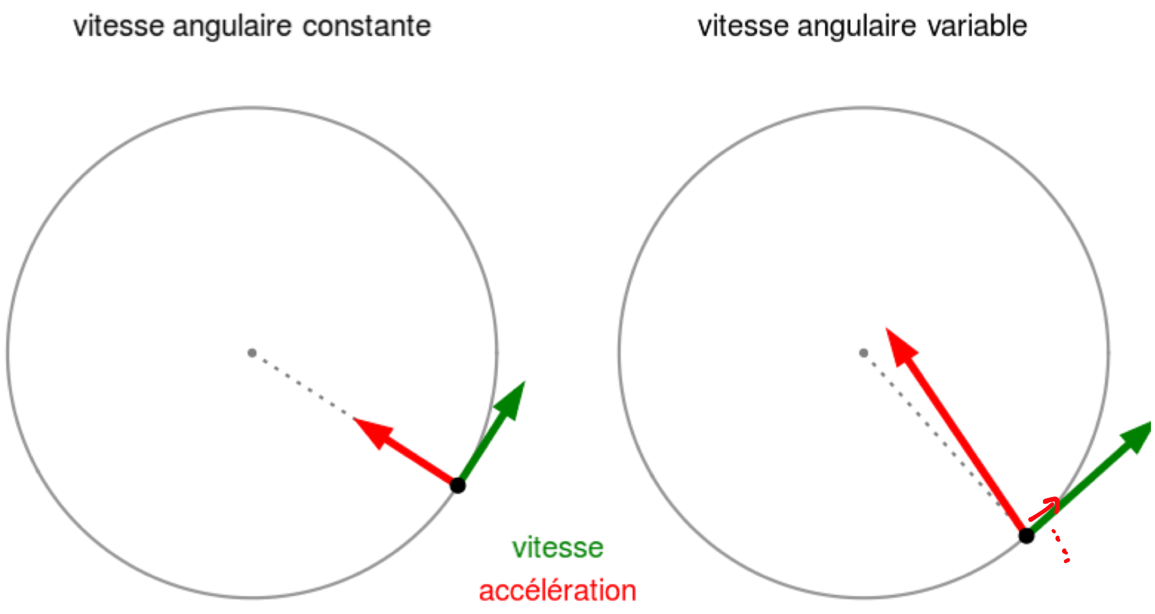
Calculons la vitesse et l'accélération !



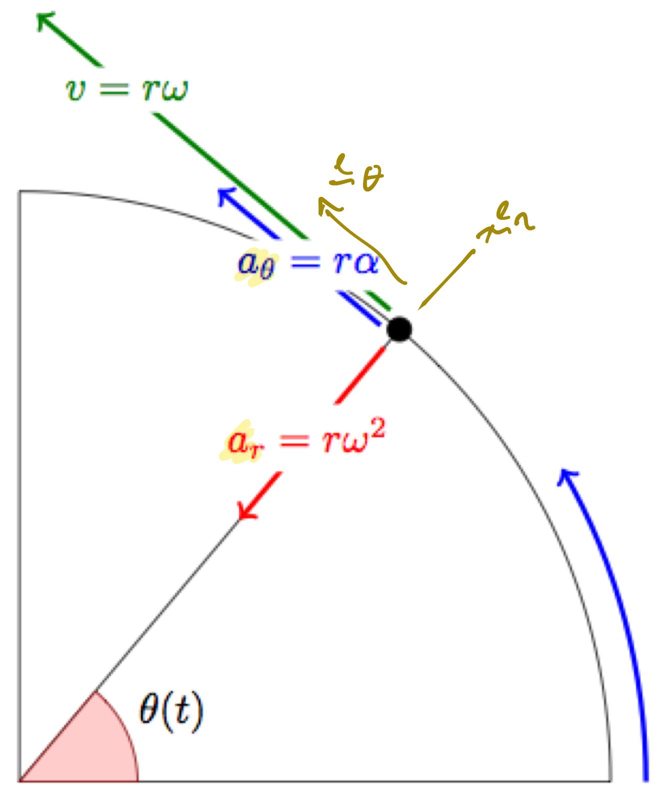
$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}}(t) &= r\,\omega(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= r\omega'(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t))\ \theta'(t) \\ -\sin(\theta(t))\ \theta'(t) \end{bmatrix} \\
&= \overbrace{r\alpha \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}}^{\text{ACCELERATION TANGENTIELLE}} + \underbrace{r\omega^2(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}}_{\text{ACCELERATION CENTRIPETE}}
\end{aligned}
$$

La vitesse est toujours bien tangente au mouvement !
Mais son module est désormais variable
car la vitesse angulaire n'est pas constante !

Une vitesse angulaire variable crée une accélération tangentielle !



L'accélération centripète provient de la variation de direction de la vitesse.
L'accélération tangentielle provient de la variation du module de la vitesse.



$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = r\omega(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = r\alpha \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega^2(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

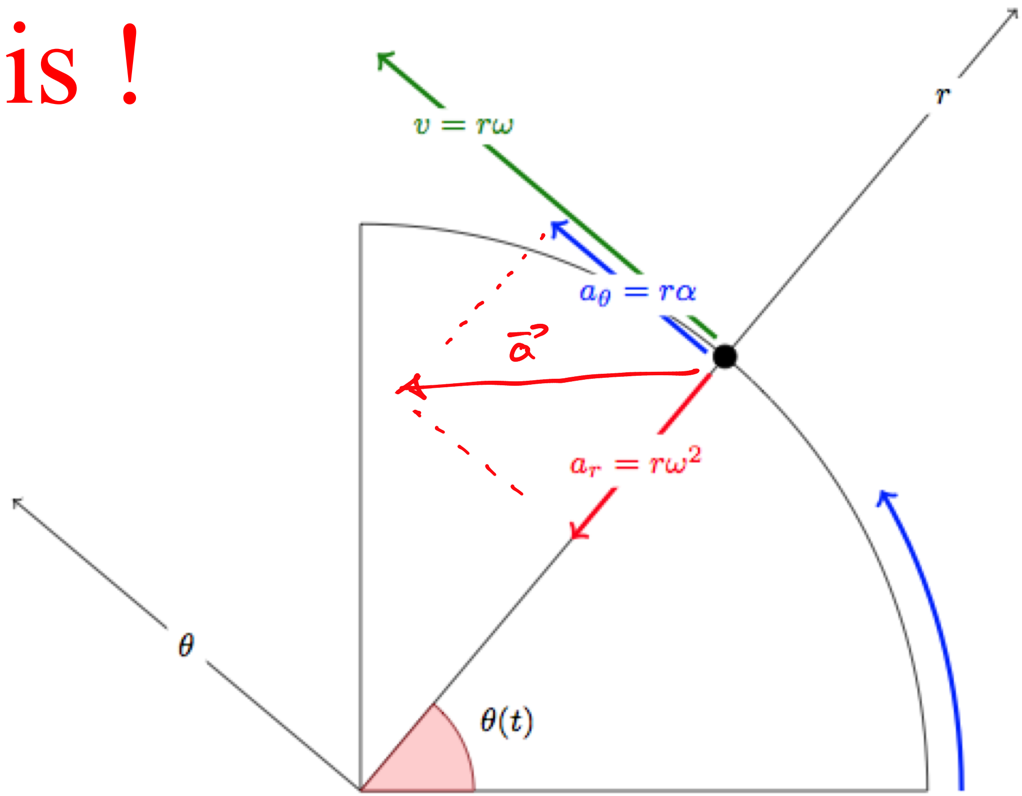
Accélération tangentielle

Accélération centripète

Avec des axes bien choisis !

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix}$$

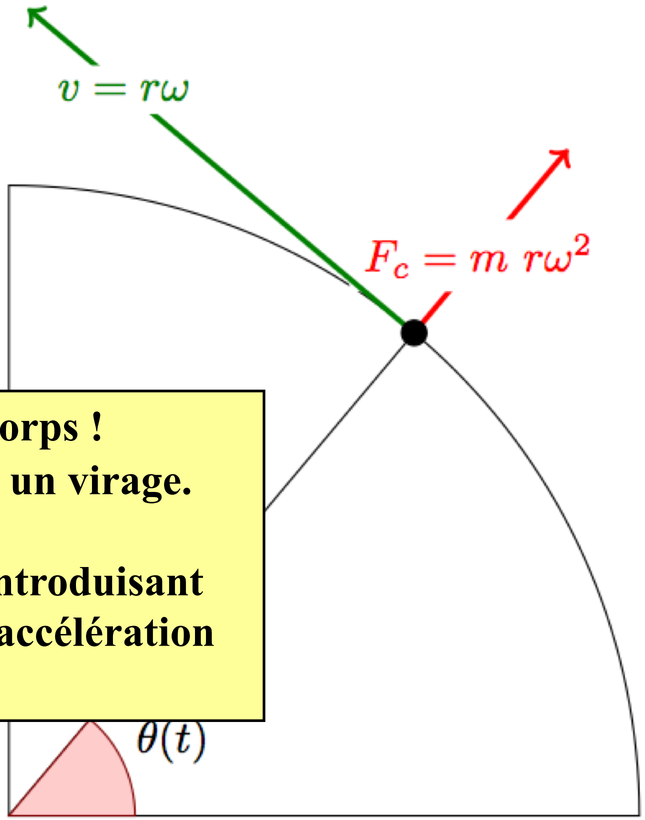
$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}$$



Vitesse : $v = r\omega$ [m/s]

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$ [m/s^2]

Vitesse angulaire ω [radians/s] et accélération angulaire α [radians/s^2]



On effectue tous les calculs dans un repère mobile lié au corps !
Par exemple, on attache le repère à la voiture qui effectue un virage.

Ensuite, on tient compte du fait que le repère tourne, en introduisant une pseudo-force centrifuge qui aura le même effet que l'accélération centripète qu'on obtient dans un repère fixe !

Remplacer l'accélération centripète par la pseudo-force centrifuge !

Dynamique du mouvement circulaire

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$\downarrow$$

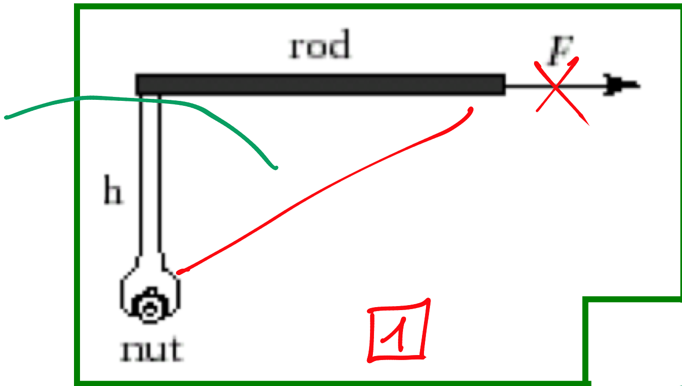
$$m\begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \end{bmatrix}$$

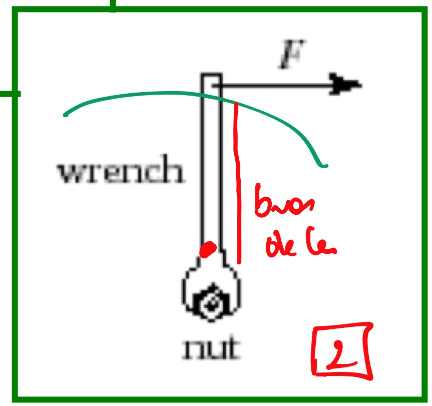
Comment faire tourner le train ?

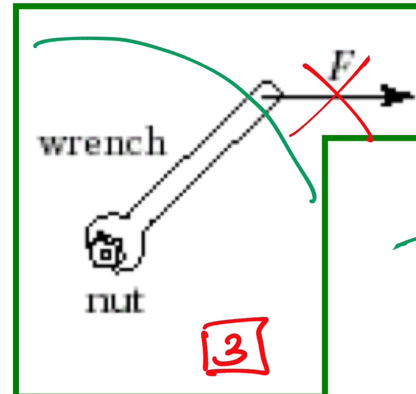
$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

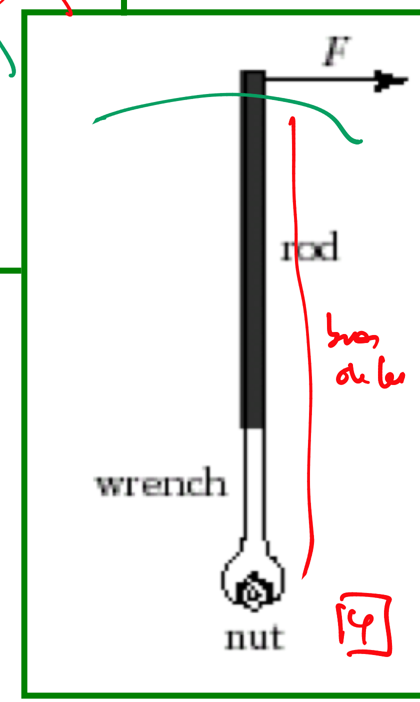
$$m\begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \end{bmatrix}$$

Dans un mouvement circulaire, seules les forces qui ont un moment non nul par rapport au centre de rotation vont augmenter la vitesse de rotation !

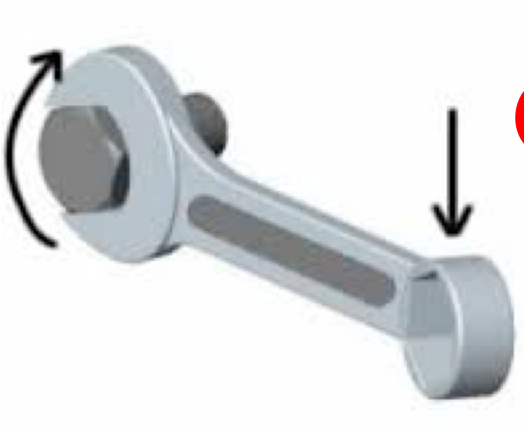






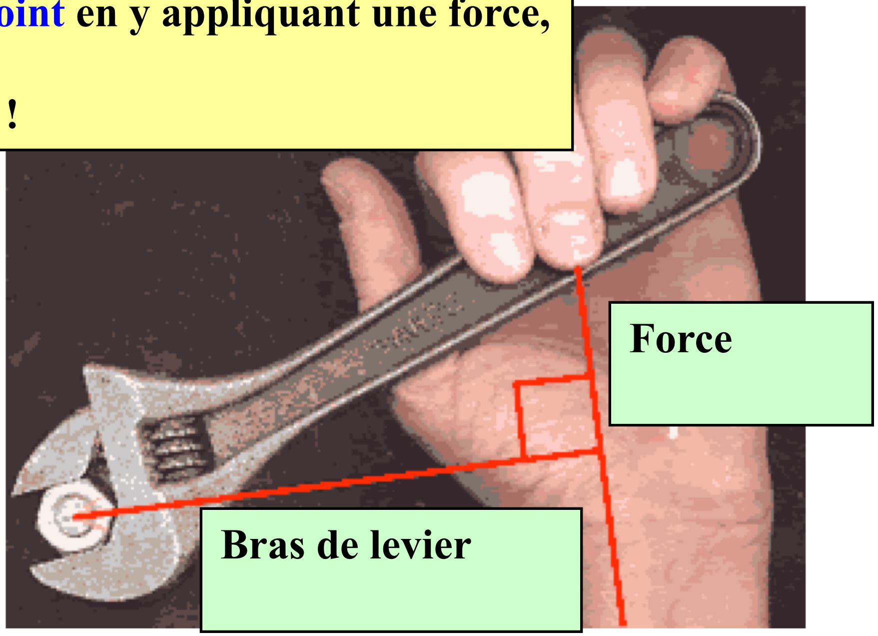


C’est koi
le bon mouvement,
Monsieur le plombier :-)



Ce qui fait tourner la clé, c'est le moment !

Supposons que l'on fixe une barre en un point et
que l'on souhaite la faire tourner autour de ce point en y appliquant une force,
l'accélération angulaire sera proportionnel
au moment de cette force par rapport à ce point !



$$\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \boxed{\text{Forces} \quad \sum \vec{\mathbf{F}}}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right)\, dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\, dt$$

En supposant que les forces sont constantes.

$$\left[m\ \vec{\mathbf{v}}\right]_b - \left[m\ \vec{\mathbf{v}}\right]_a = \sum \vec{\mathbf{F}}\ (t_b - t_a)$$

$$\Delta\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}\ \Delta t \quad \text{Impulsions}}$$

Bilan
de la quantité
de mouvement

Puissance des forces

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right)\cdot\vec{\mathbf{v}} = \boxed{\sum\vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right) = \sum\vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right)\,dt = \sum\int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\,dt = \sum\int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}\,dt = \sum\int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{x}}$$

En supposant que les forces sont constantes.

$$\left[\tfrac{1}{2}m\,v^2\right]_b - \left[\tfrac{1}{2}m\,v^2\right]_a = \sum\vec{\mathbf{F}}\cdot(\vec{\mathbf{x}}_b - \vec{\mathbf{x}}_a)$$

$$\Delta\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right) = \boxed{\sum\vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}$$

Travail des forces

Bilan d’énergie cinétique

Moments des forces

$$\vec{\mathbf{r}} \times \frac{d}{dt}\left(m\, \vec{\mathbf{v}}\right) = \boxed{\sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\, \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(m\, \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right)\, dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}\, dt$$

En supposant que les moments sont constants.

$$\left[m\, \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right]_b - \left[m\, \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right]_a = \sum (\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}})\, (t_b - t_a)$$

$$\Delta\left(m\, \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right) = \boxed{\sum (\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}})\, \Delta t}$$

Impulsions angulaires

Bilan
de moment cinétique

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\,m\,\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{r}}\times m\,\vec{\mathbf{v}}\right)}_{I\,\frac{d\omega}{dt}} = \underbrace{\sum \vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}}_{\sum M}$$

INERTIE

- Dans un mouvement circulaire, l'accélération a toujours une composante centripète. Les variations de la vitesse angulaire génère une composante tangentielle.

- Seules les forces dont le moment n'est pas nul par rapport au centre de rotation permettent de modifier la vitesse angulaire d'un mouvement circulaire.

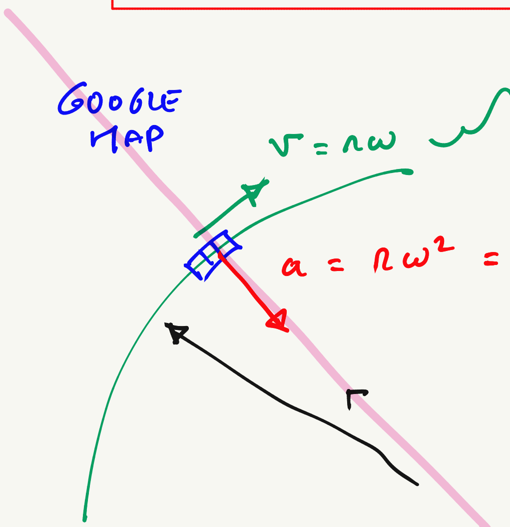
- Les forces modifient la quantité de mouvement
  Les moments modifient le moment cinétique

Vitesse maximale sans risque de dérapage ?

Automobile de 1000 kg
Angle de 30 degré par rapport à l'horizontale
Rayon du virage : 100 m
Coefficient de frottement statique de 0.1

$\boxed{7}$

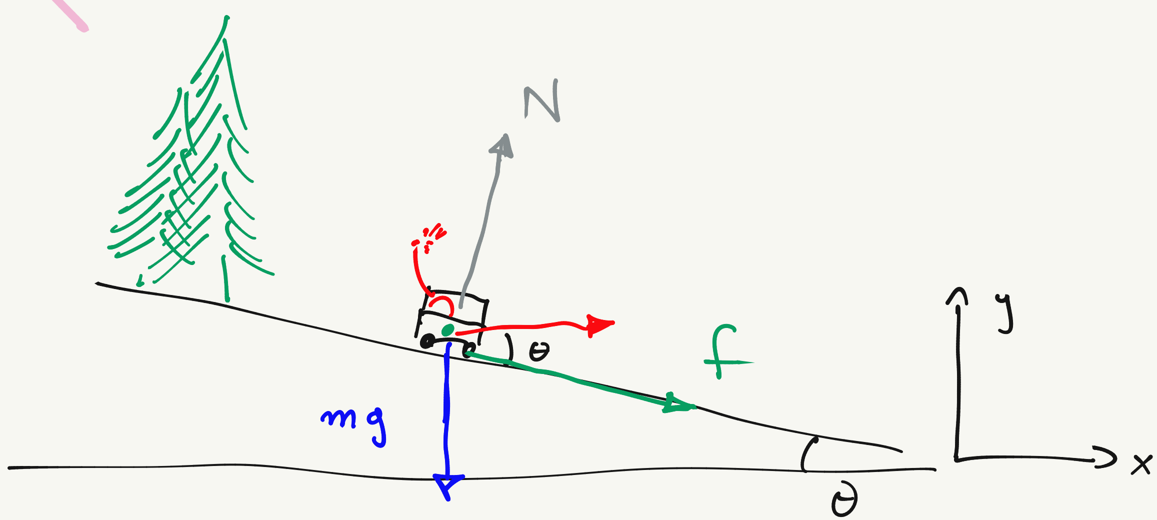
EXEMPLE DE QUESTION UN PEU COMPLIQUÉE !

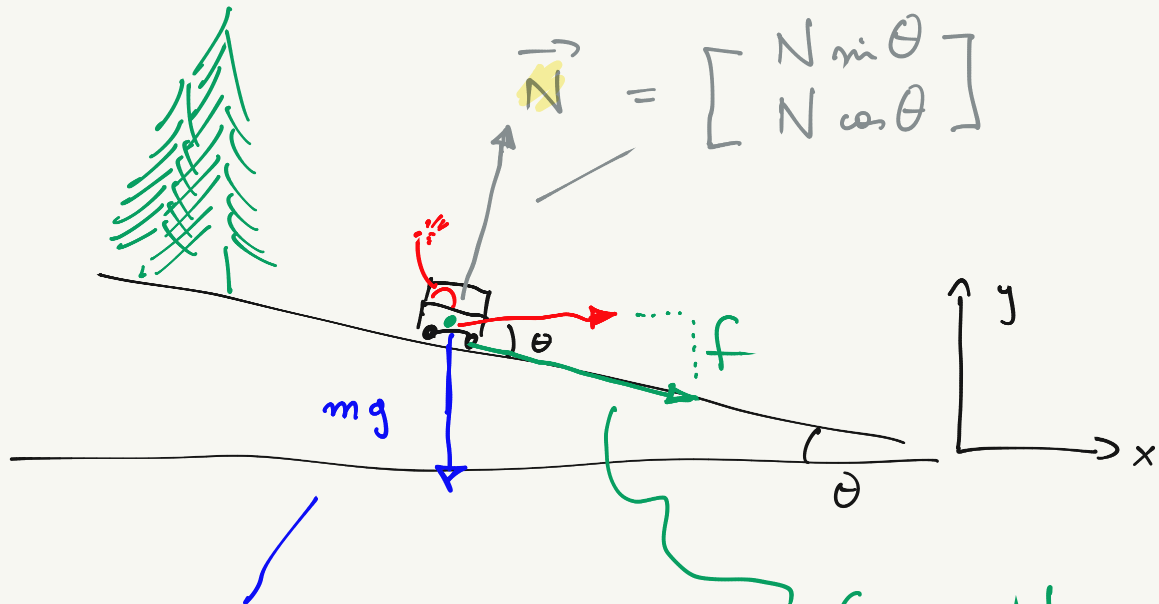


$v = r\omega \quad \omega = \frac{v}{r}$

$a = r\omega^2 = r\frac{v^2}{r^2} = \frac{v^2}{r}$

$\underbrace{\frac{[m^2/s^2]}{[m]}}_{[m/s^2]}$





$$\vec{N} = \begin{bmatrix} N \sin\theta \\ N \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$m\vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$

$$f = \mu_s N$$

$$\vec{f} = \mu_s N \begin{bmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$$

en y : $N\cos\theta - \mu_s N \sin\theta - mg = 0$

en x : $N\sin\theta + \mu_s N \cos\theta = m\frac{v^2}{R}$