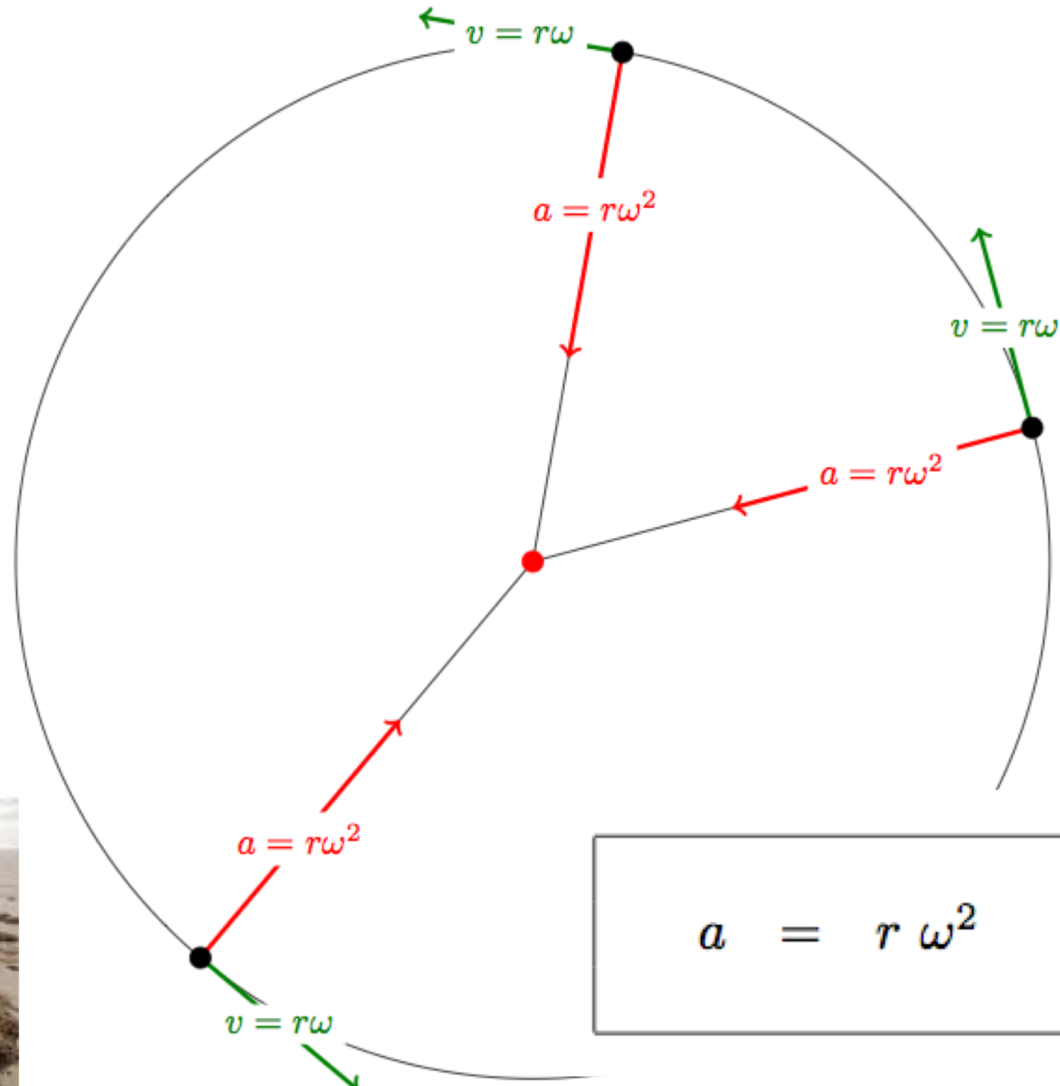
Mouvement circulaire uniforme

$$v = r\,\omega$$

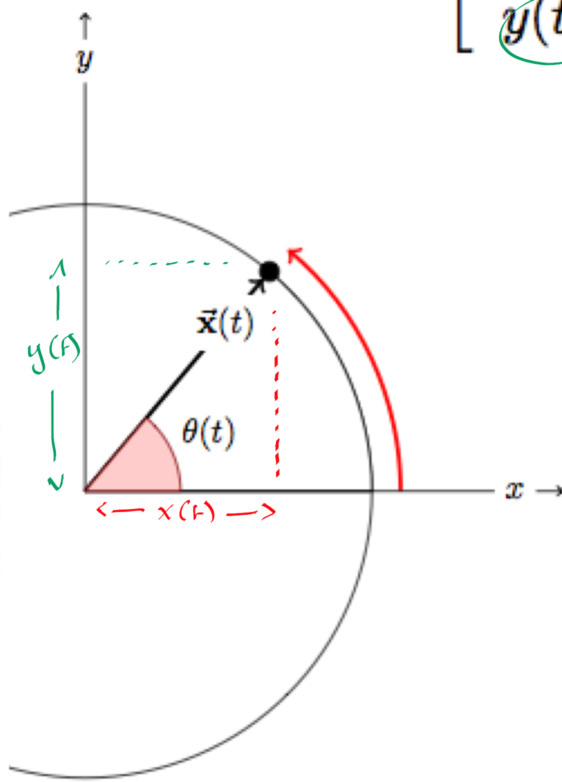


$$a = r\,\omega^2$$

Vitesse angulaire constante : ω
Vitesse tangentielle
Accélération centripète

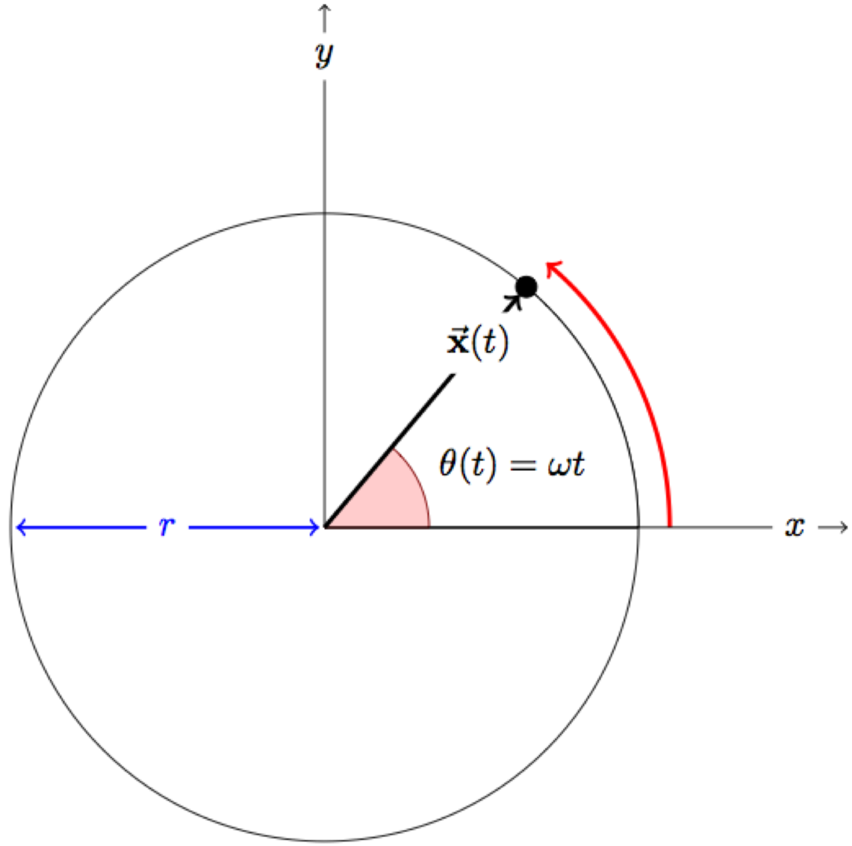
Le mouvement circulaire est harmonique

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta(t)) \\ r\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$



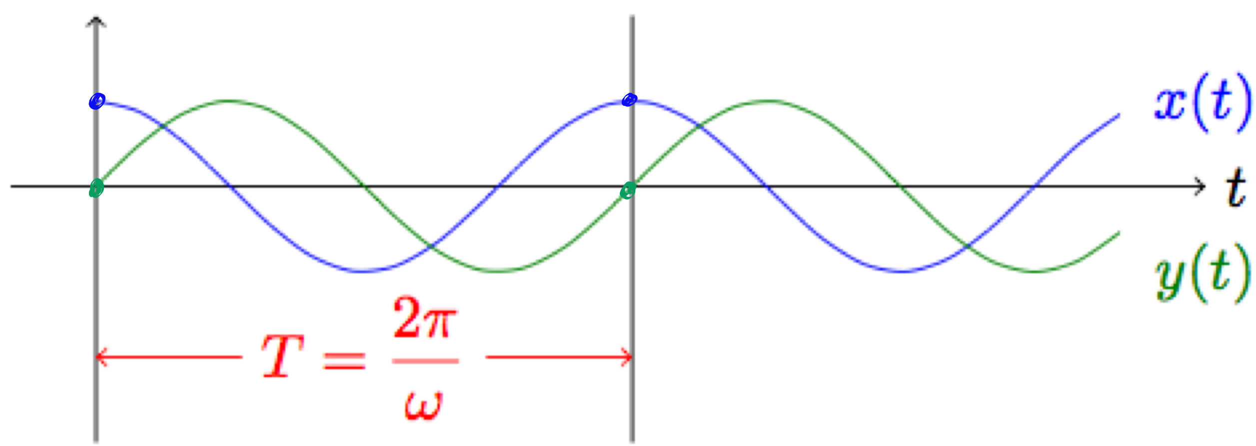
$\theta(t) = \omega t$

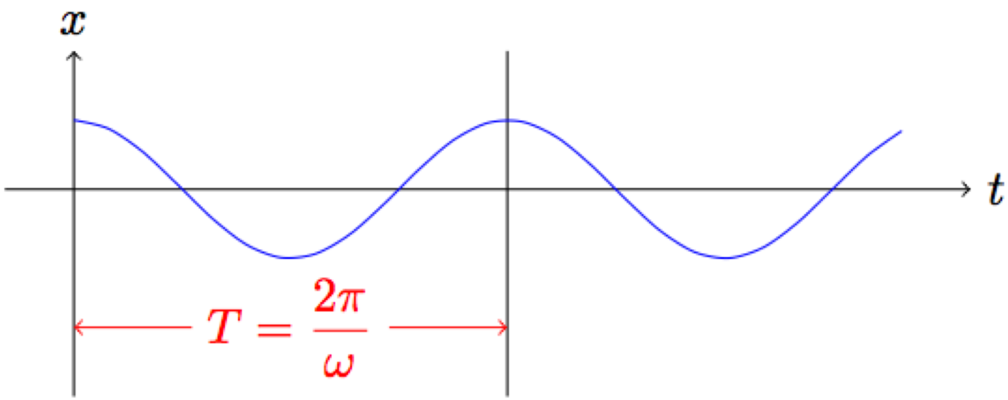
VITESSE ANGULAIRE



Le retour du cos et du sin

$$x(t) = r \cos(\omega t)$$
$$y(t) = r \sin(\omega t)$$





$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$v = r\,\omega$$

Période : T

Fréquence : f

Vitessse angulaire : ω

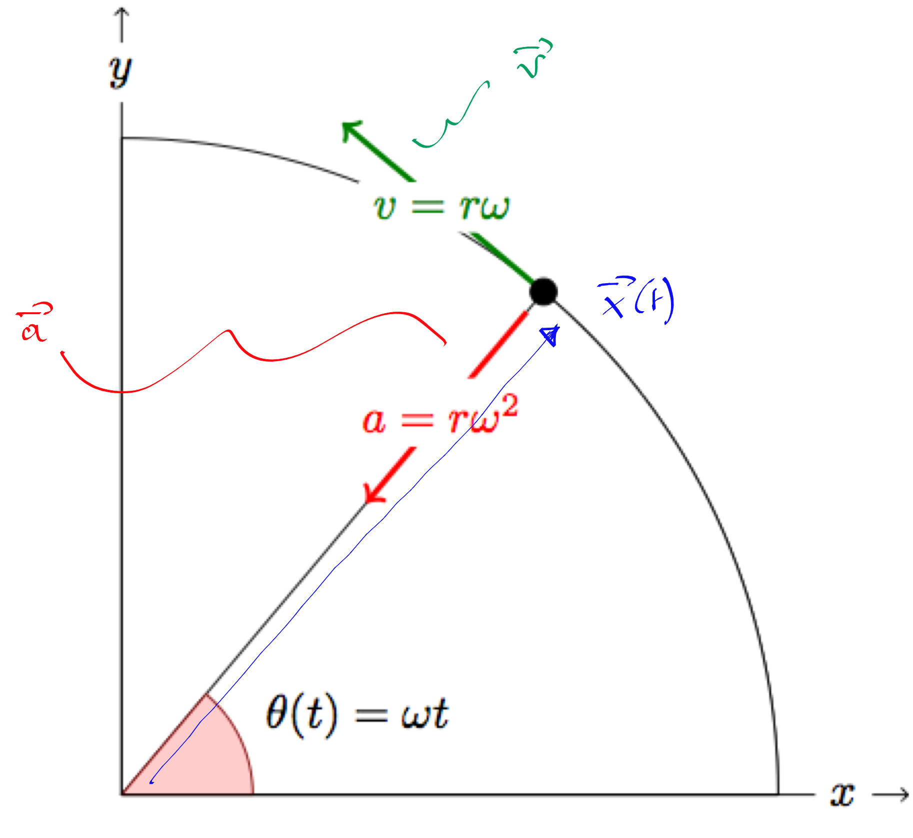
Accélération centripète

$\vec{v} \cdot \vec{x} = 0$:-)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = r\omega \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = r\omega^2 \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$



Vitesse tangentielle

1

ASPIRATEUR

600 tours/minute

$R = 0{,}1\ m$

$f = 10$ Hertz $\quad T = 0{,}1$ sec

$\omega = 2\pi f = 62{,}8$ rad/s

$v = r\omega = 6{,}28$ m/s

$a = r\omega^2 = \underbrace{+/- 400\ m/s^2}_{\text{BIG}}$

$\underbrace{63 \times 63}_{\simeq 4000\ :-)} \times 0{,}1$

Aspirateur
600 tours/minute
R = 10 cm

$$f = 10 \text{ Hertz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 0.1 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 62.8 \text{ rad/s}$$

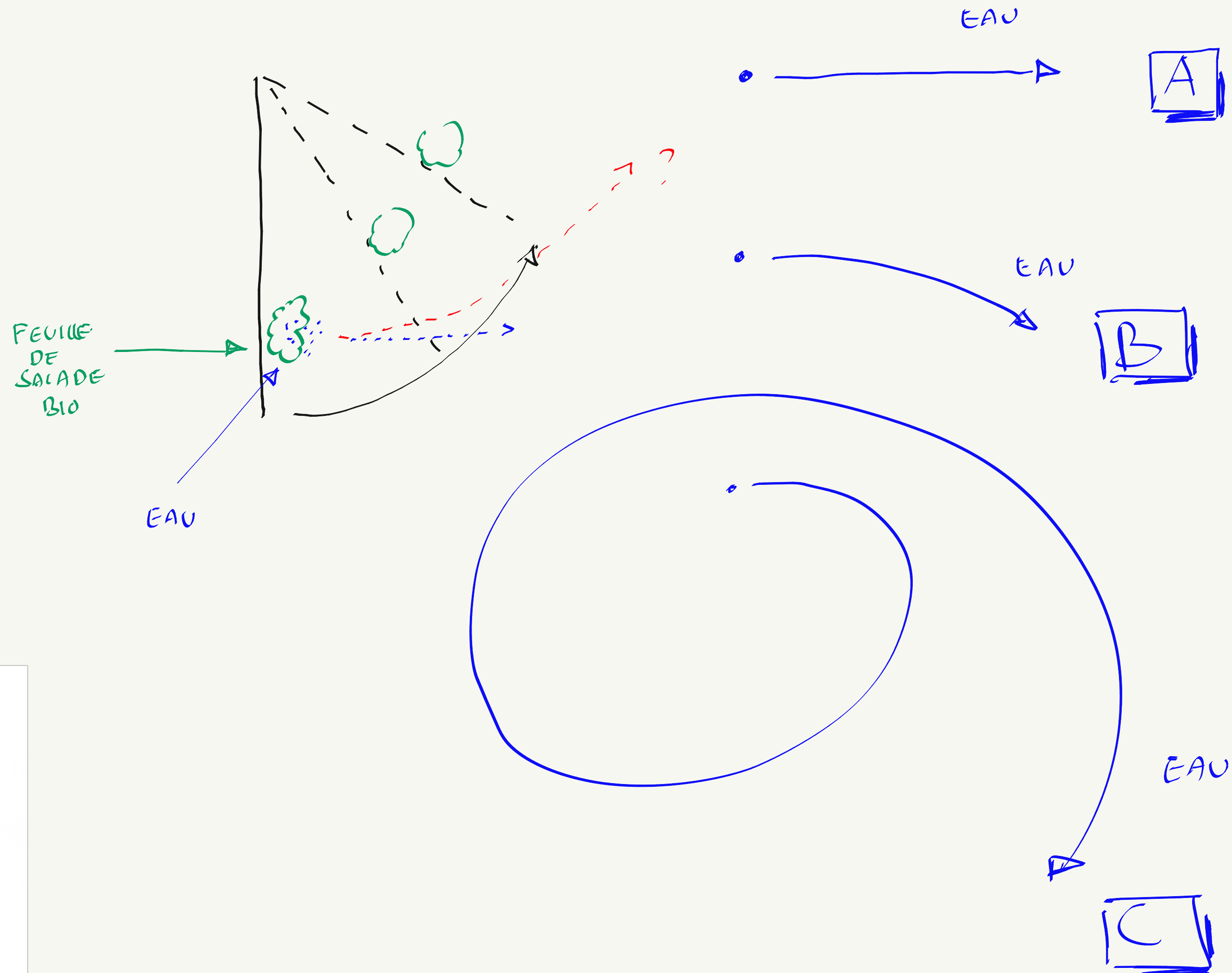
$$v = r\,\omega = 6.28 \text{ m/s}$$

$$a = r\,\omega^2 = 394.4 \text{ m/s}^2$$

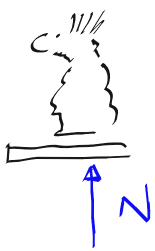
C'est quarante fois
la valeur de l'accélération de la gravité !
C'est une valeur très élevée !

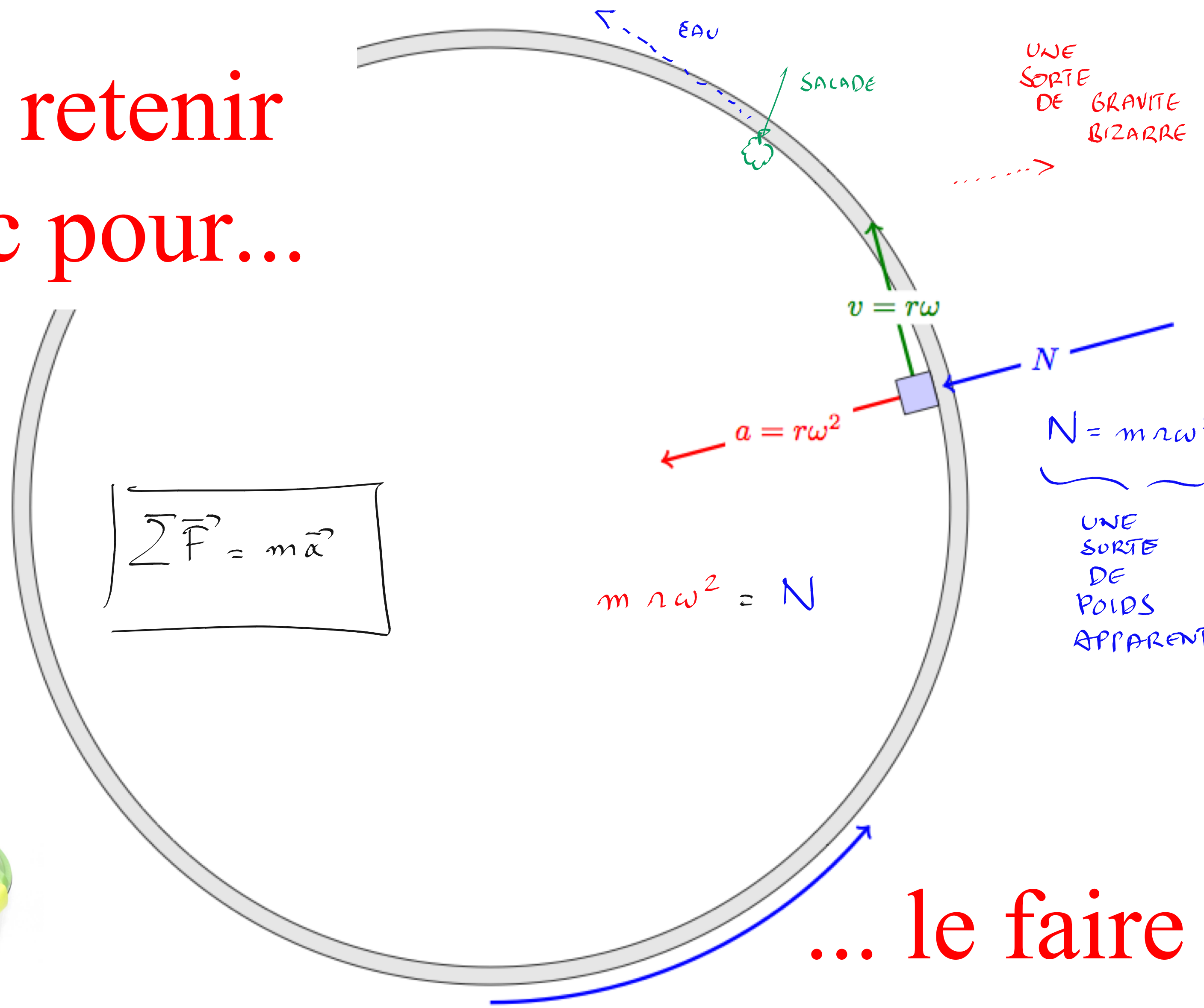
2

ESSOREUSE A SALADE



Il faut retenir le bloc pour...





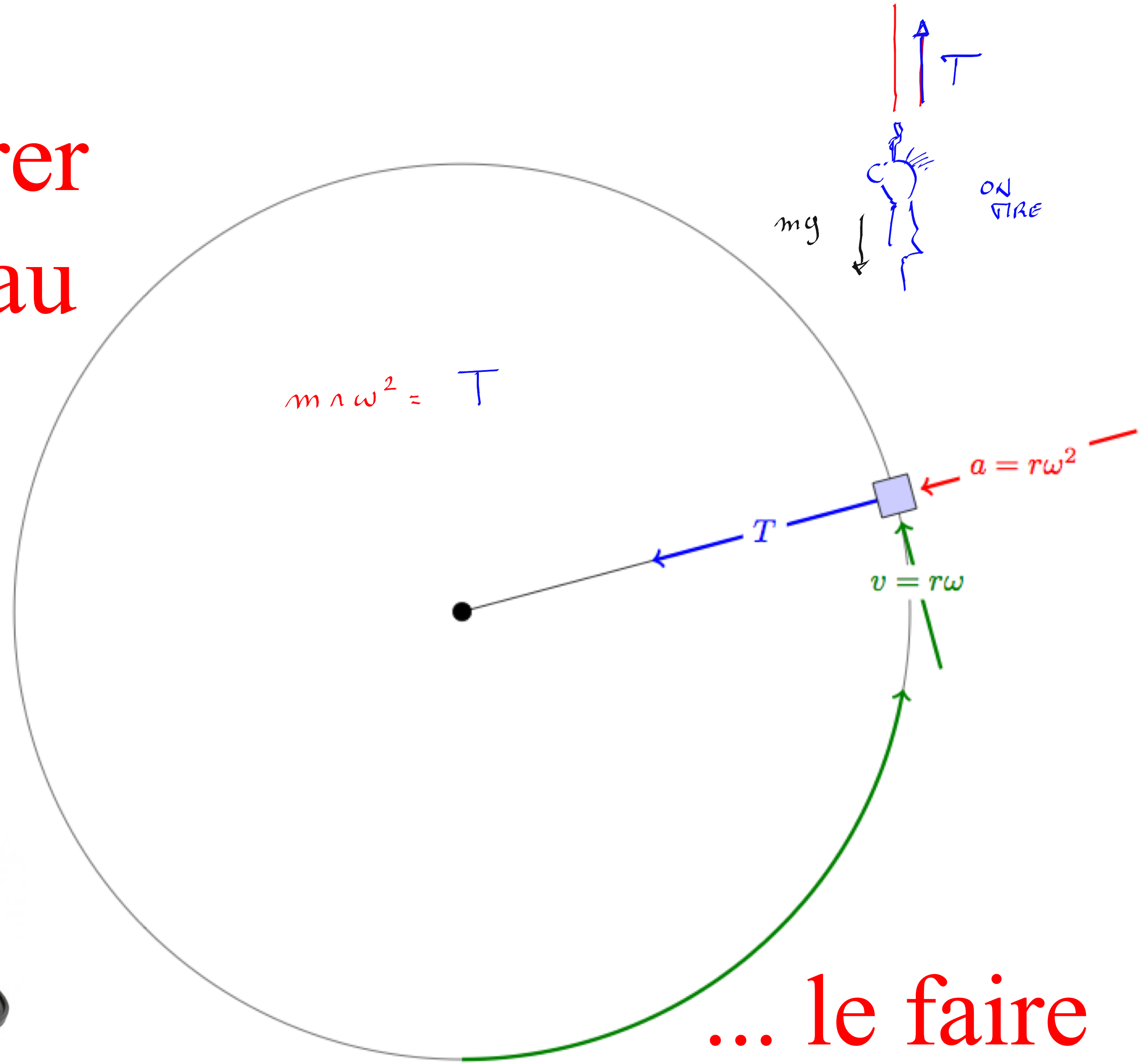
$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}}$$

$$m r \omega^2 = N$$

$$\underbrace{N = m r \omega^2}_{\text{UNE SORTE DE POIDS APPARENT}}$$

... le faire tourner !

Il faut tirer sur le seau pour...



... le faire tourner !

3

MACHINE A LAVER

3600 tours / minute

$R = 0{,}15$ m

$\longrightarrow$ $f = 60$ Hz $T = 0{,}017$ sec

$\omega = 2\pi f = 377$ rad/s

$v = r\omega = 56{,}5$ m/s

$a = r\omega^2 = \underbrace{21\,310}$ m/s^2

400×400

$160000 \times 0{,}15$

16000
8000
24000 :-)

HUGE !

Machine à laver
3600 tours/minute
R = 15 cm

$$f = 60 \text{ Hertz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 0.017 \text{ s}$$

$$\omega = 2\pi f = 377 \text{ rad/s}$$

$$v = r\,\omega = 56.5 \text{ m/s}$$

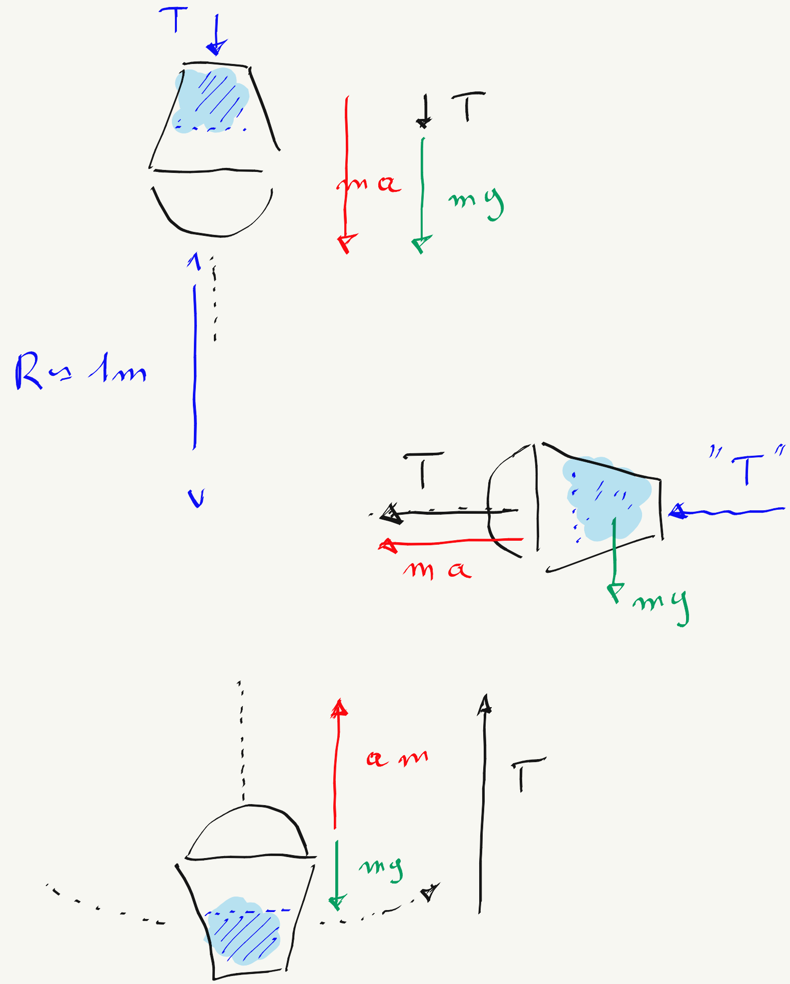
$$a = r\,\omega^2 = 21318 \text{ m/s}^2$$

C'est deux mille fois
la valeur de l'accélération de la gravité !
C'est une valeur vraiment très très élevée !

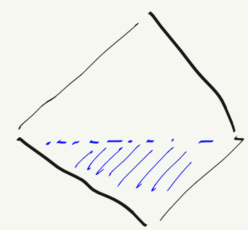
$\boxed{4}$

EXPERIENCE DU SAUT

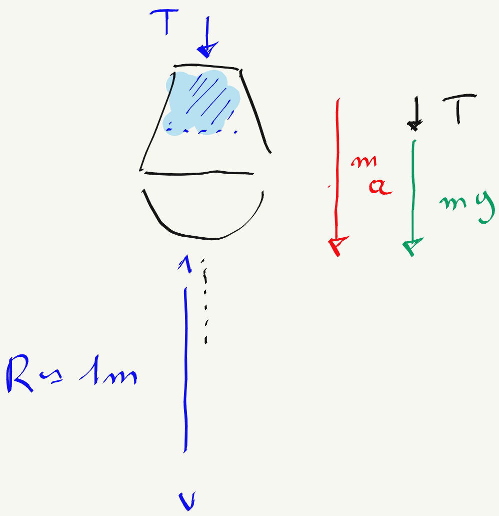
$$T + mg = am$$



$$T - mg = am$$



$T + mg = am$



$v = r\omega$

$\omega = \frac{v}{r}$

L'EAU VA TOMBER SI

$\underbrace{r\omega^2}_{\frac{v^2}{r}} < g$

ACCELERATION CENTRIPETE

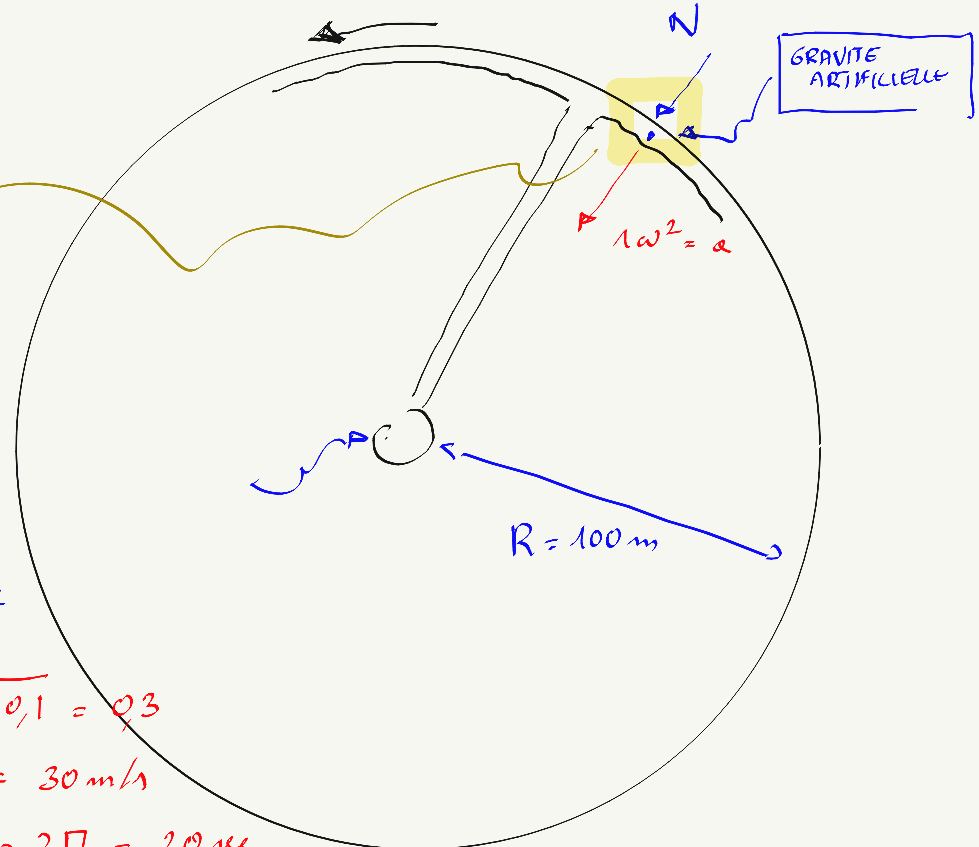
$r = 1 \rightarrow \boxed{\omega < \sqrt{g}}$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} \simeq 2 \text{ sec}$$

5

STATION SPATIALE



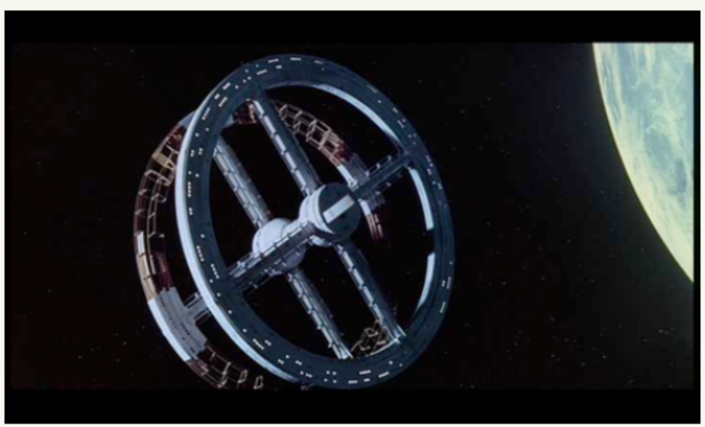
$R\omega^2 = 10\ m/s^2$

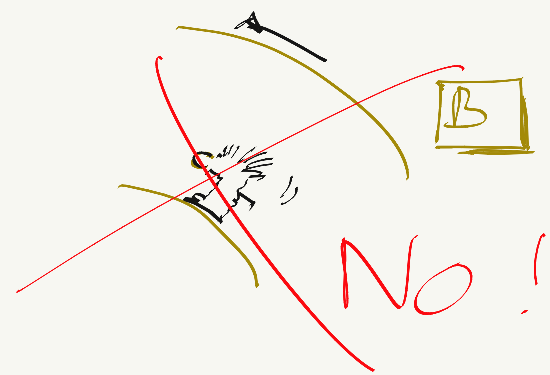
100

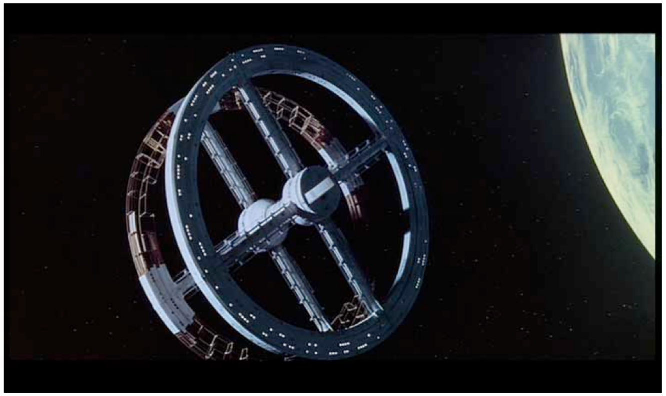
$\omega = \sqrt{0,1} = 0,3$

$v = 30\ m/s$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 20\ sec$







Station spatiale
3 tours/minute
R = 100 m

$$a = r\,\omega^2 = 10\ \mathrm{m/s^2}$$

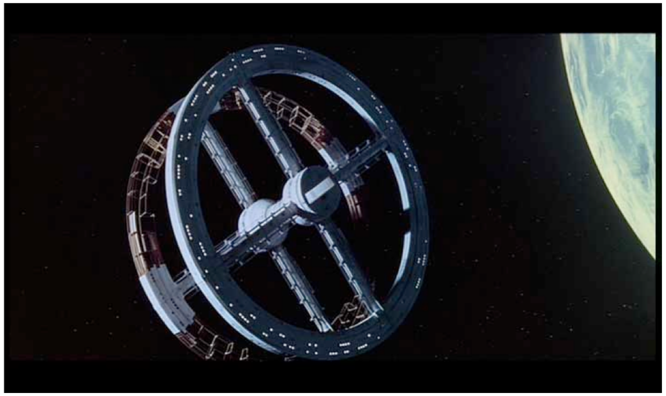
$$\omega^2 = 0.1\ (\mathrm{rad/s})^2 \qquad \omega = 0.3\ \mathrm{rad/s}$$

$$v = r\,\omega = 30\ \mathrm{m/s}$$

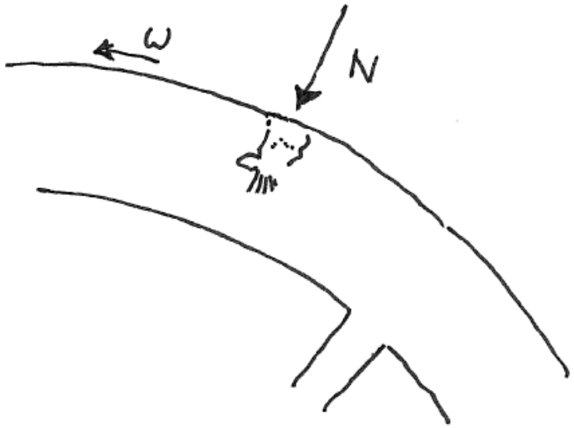
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0.05\ \mathrm{Hertz}$$

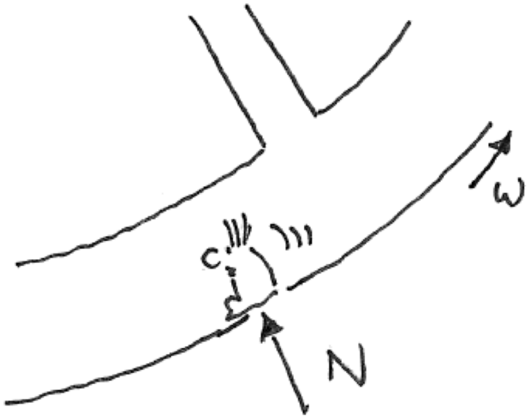
$$T = \frac{1}{f} = 20\ \mathrm{s}$$

On fait tourner la station spatiale pour obtenir une gravité artificielle !



Station spatiale
3 tours/minute
$R = 100$ m



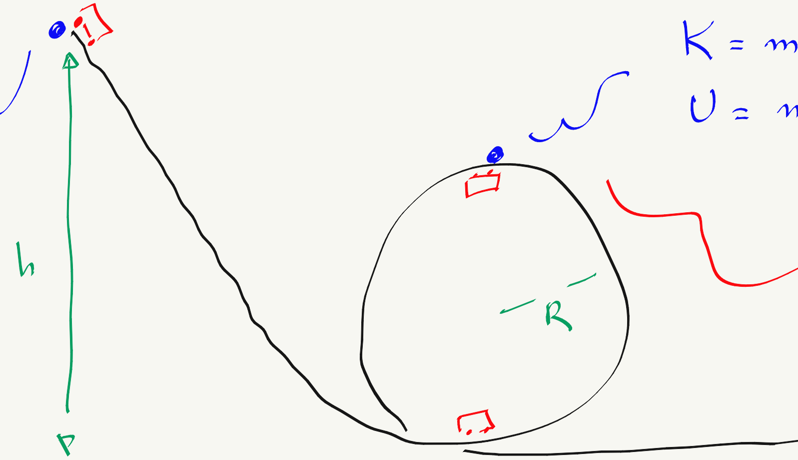


On fait tourner la station spatiale pour obtenir une gravité artificielle !

6

EXERCICE CLASSIQUE

HYPOTHESE
PAS DE FROTTEMENT



$K = 0$

$U = mgh$

$K = mv^2/2$

$U = mg2R$

$\frac{v^2}{R} = \omega^2 R$:-)

L'ACCELERATION CENTRIPETE DOIT ETRE SUPERIEUR A g :-)

$$\boxed{\frac{v^2}{R} \geq g}$$

$$\boxed{mgh = m\frac{v^2}{2} + mg2R}$$

$$\cancel{m}v^2 = 2\cancel{m}gh - 4\cancel{m}gR$$

$$v^2 = g(2h - 4R)$$

$$\cancel{g}\frac{(2h-4R)}{R} \geq \cancel{g}$$

$$\frac{2h-4R}{R} \geq 1$$

$$2h - 4R \geq R$$

$$2h \geq 5R$$

$$\boxed{h \geq \frac{5R}{2}}$$

Le MRUA :-)

$$
\begin{aligned}
y''(t) &= a \\
y'(t) &= \overbrace{v_0 + a\, t}^{v(t)} \\
y(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{a\, t^2}{2}
\end{aligned}
$$

Des millions de gens ont vu tomber une pomme,
Newton est le seul qui se soit demandé pourquoi...
(Bernard Baruch)

Le MCUA :-)

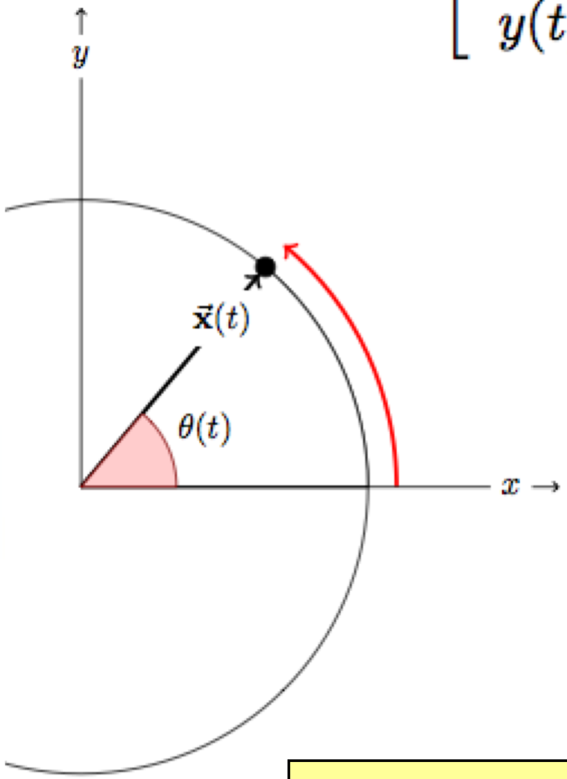
$$
\begin{aligned}
\theta''(t) &= \alpha \\
\theta'(t) &= \overbrace{\omega_0 + \alpha\, t}^{\omega(t)} \\
\theta(t) &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha\, t^2}{2}
\end{aligned}
$$

Maintenant, faisons strictement et exactement la même chose avec un mouvement circulaire !

Définissons le MCUA !

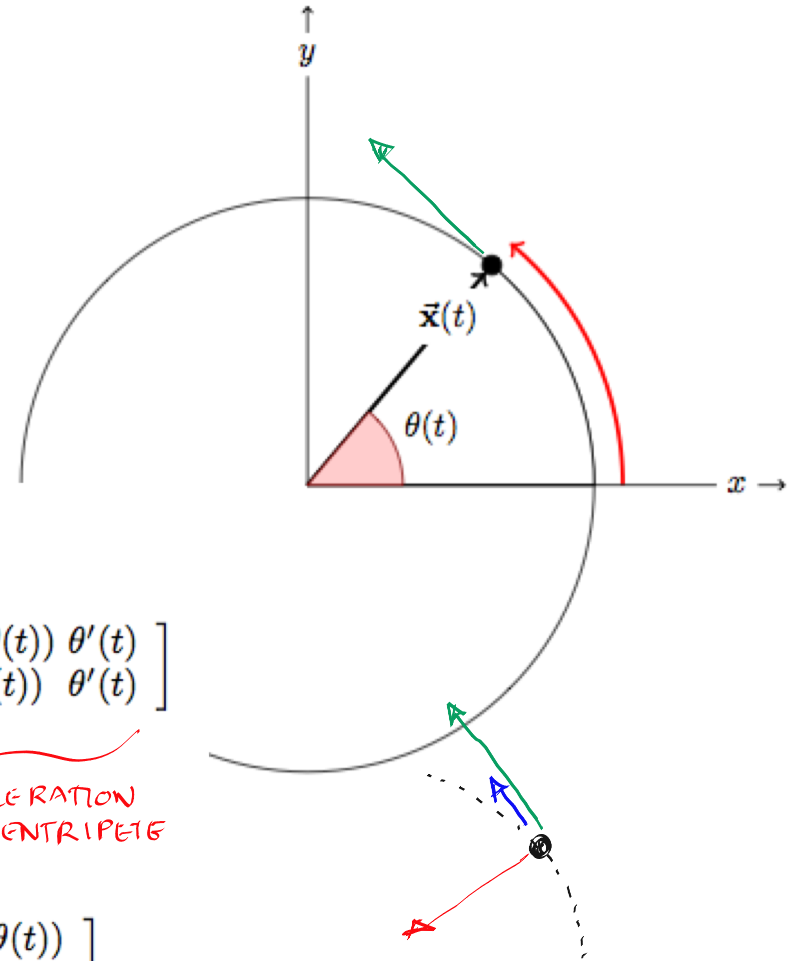
Le MCUA :-)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta(t)) \\ r\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$



Mouvement circulaire non-uniforme...
Vitesse angulaire non-constante
Accélération angulaire constante

Calculons la vitesse et l’accélération !



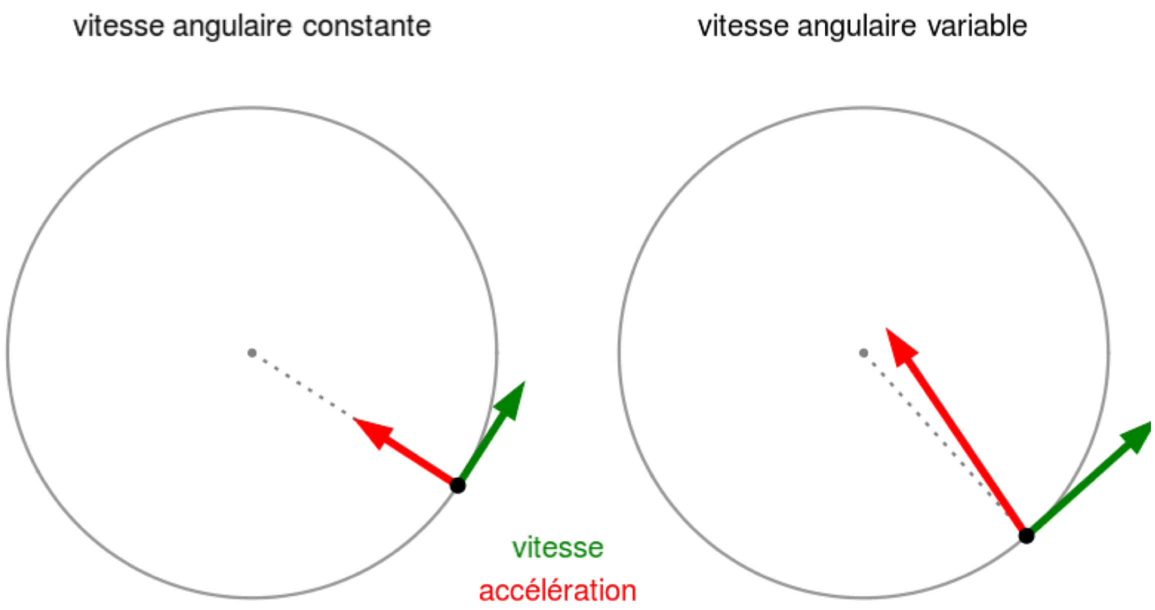
$$\vec{\mathbf{v}}(t) = r\,\omega(t)\begin{bmatrix}-\sin(\theta(t))\\ \cos(\theta(t))\end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \underbrace{r\omega'(t)\begin{bmatrix}-\sin(\theta(t))\\ \cos(\theta(t))\end{bmatrix}}_{\text{ACCELERATION TANGENTIELLE}} + \underbrace{r\omega(t)\begin{bmatrix}-\cos(\theta(t))\ \theta'(t)\\ -\sin(\theta(t))\ \theta'(t)\end{bmatrix}}_{\text{ACCELERATION CENTRIPETE}}$$

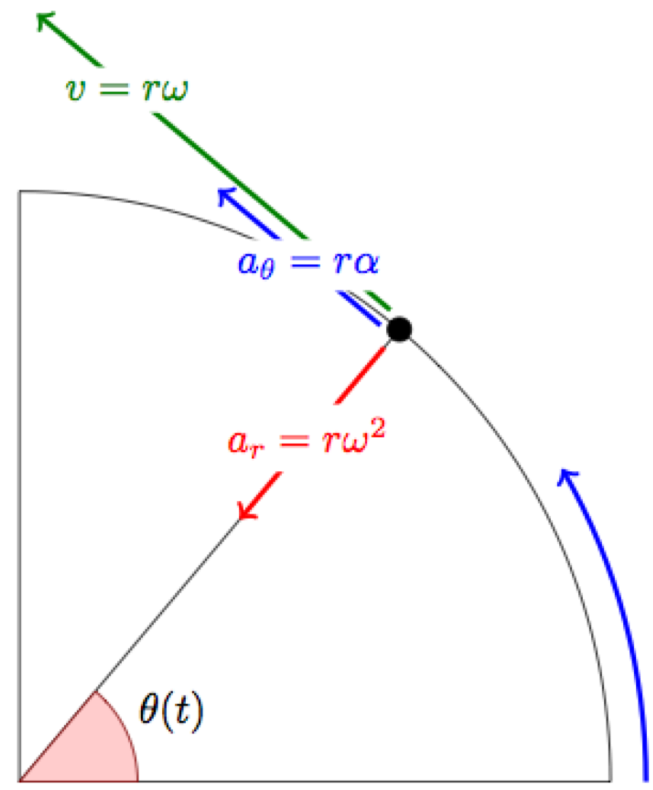
$$= r\alpha\begin{bmatrix}-\sin(\theta(t))\\ \cos(\theta(t))\end{bmatrix} + r\omega^2(t)\begin{bmatrix}-\cos(\theta(t))\\ -\sin(\theta(t))\end{bmatrix}$$

La vitesse est toujours bien tangente au mouvement !
Mais son module est désormais variable
car la vitesse angulaire n’est pas constante !

Une vitesse angulaire variable crée une accélération tangentielle !



L'accélération centripète provient de la variation de direction de la vitesse.
L'accélération tangentielle provient de la variation du module de la vitesse.



$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = r\omega(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = r\alpha \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega^2(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

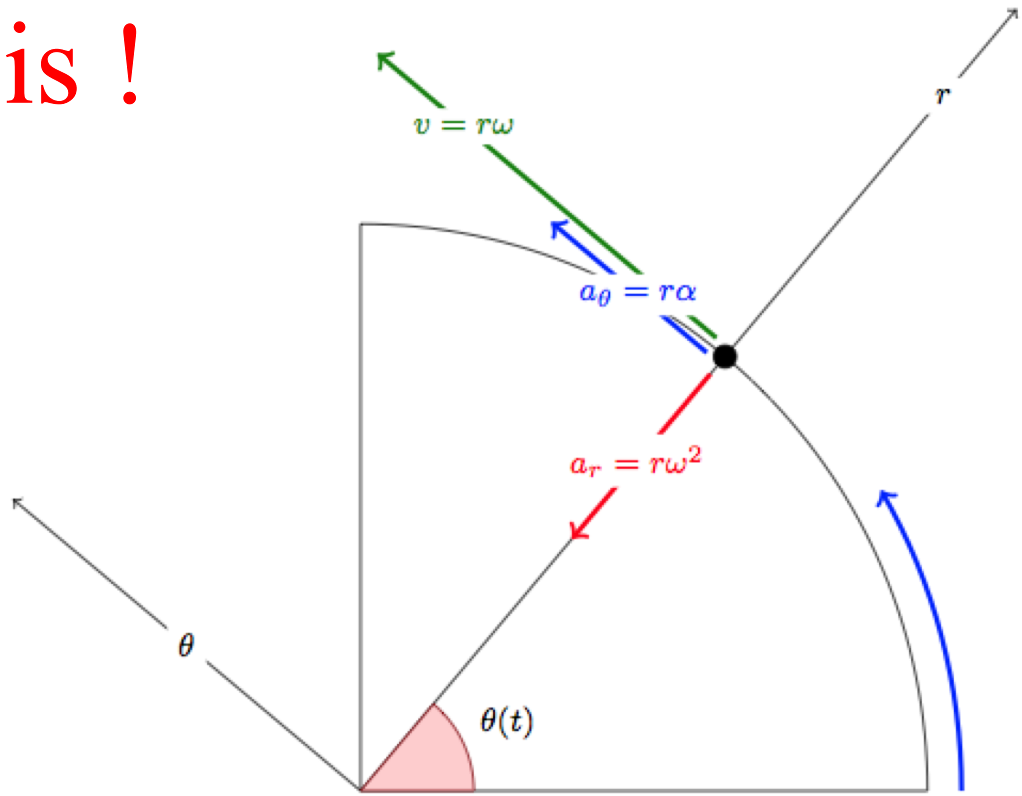
Accélération tangentielle

Accélération centripète

Avec des axes bien choisis !

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix}$$

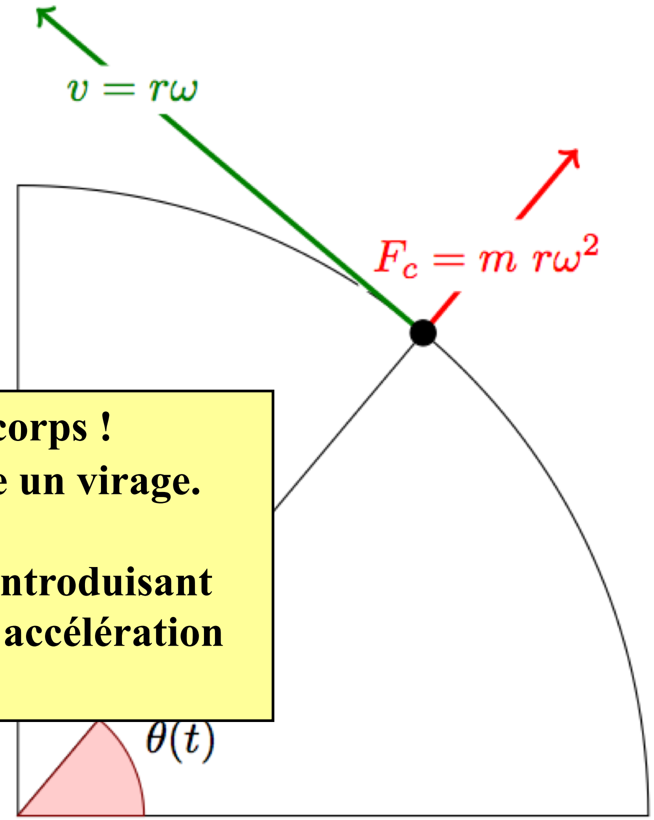
$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}$$



Vitesse : $v = r\omega$ [m/s]

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$ [m/s^2]

Vitesse angulaire ω [radians/s] et accélération angulaire α [radians/s^2]



On effectue tous les calculs dans un repère mobile lié au corps !
Par exemple, on attache le repère à la voiture qui effectue un virage.

Ensuite, on tient compte du fait que le repère tourne, en introduisant une pseudo-force centrifuge qui aura le même effet que l'accélération centripète qu'on obtient dans un repère fixe !

Remplacer
l'accélération centripète
par la pseudo-force centrifuge !

Dynamique du mouvement circulaire

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$\downarrow$$

$$m\begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \end{bmatrix}$$

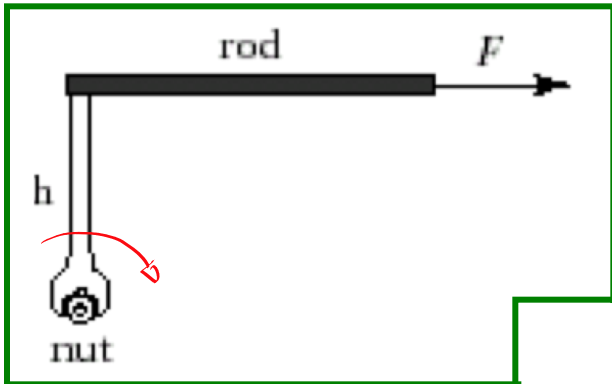
Comment faire tourner le train ?

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

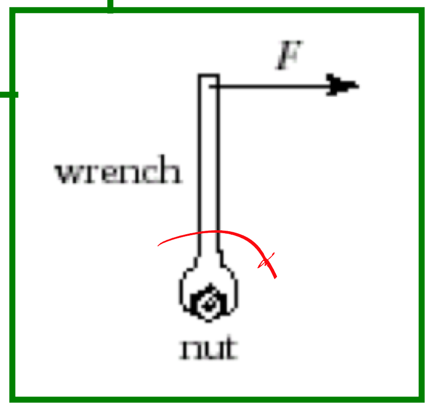
$$\downarrow$$

$$m\begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \end{bmatrix}$$

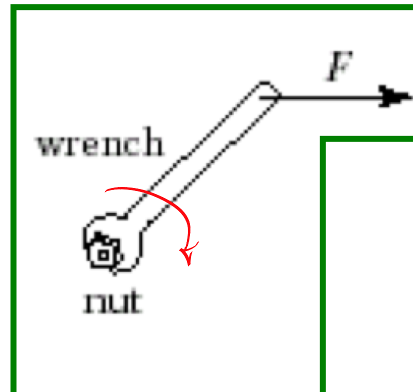
Dans un mouvement circulaire, seules les forces qui ont un moment non nul par rapport au centre de rotation vont augmenter la vitesse de rotation !



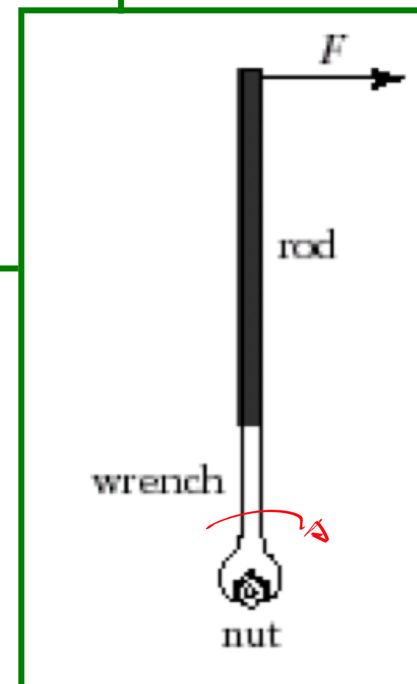
A



B



C

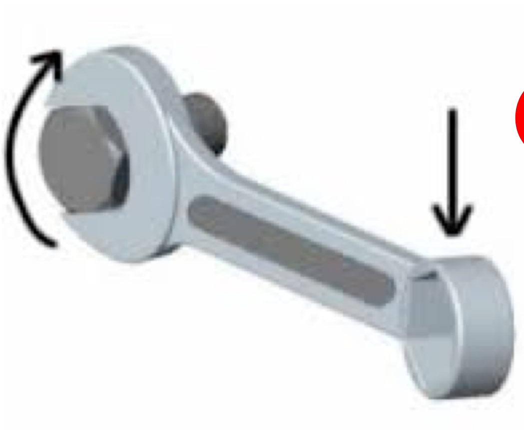


D

C'est koi

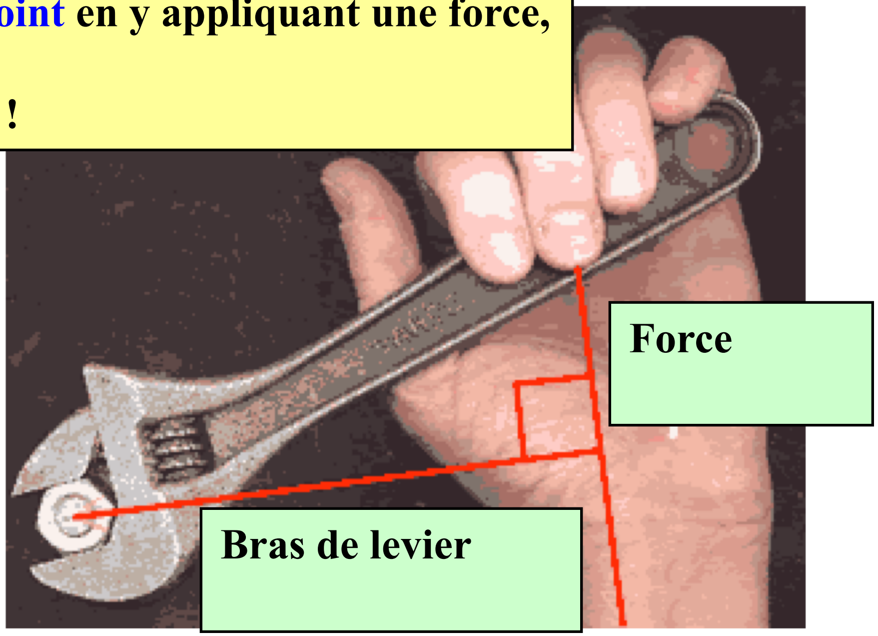
le bon mouvement,

Monsieur le plombier :-)



Ce qui fait tourner la clé, c'est le moment !

Supposons que l'on fixe une barre en un point et
que l'on souhaite la faire tourner autour de ce point en y appliquant une force,
l'accélération angulaire sera proportionnel
au moment de cette force par rapport à ce point !



$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \boxed{\text{Forces} \quad \sum \vec{\mathbf{F}}}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right)\,dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\,dt$$

En supposant que les forces sont constantes.

$$\left[m\,\vec{\mathbf{v}}\right]_b - \left[m\,\vec{\mathbf{v}}\right]_a = \sum \vec{\mathbf{F}}\,(t_b - t_a)$$

$$\Delta\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}\,\Delta t \quad \text{Impulsions}}$$

Bilan de la quantité de mouvement

Puissance des forces

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right)\cdot\vec{\mathbf{v}} = \boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right)dt = \sum\int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\,dt = \sum\int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}\,dt = \sum\int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{x}}$$

En supposant que les forces sont constantes.

$$\left[\tfrac{1}{2}m\,v^2\right]_b - \left[\tfrac{1}{2}m\,v^2\right]_a = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\left(\vec{\mathbf{x}}_b - \vec{\mathbf{x}}_a\right)$$

$$\Delta\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right) = \boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}$$

Travail des forces

Bilan d'énergie cinétique

Moments des forces

$$\vec{\mathbf{r}} \times \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right) dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}\, dt$$

En supposant que les moments sont constants.

$$\left[m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right]_b - \left[m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right]_a = \sum (\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}})\,(t_b - t_a)$$

$$\Delta\left(m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum (\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}})\,\Delta t$$

Impulsions angulaires

Bilan
de moment cinétique

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\,m\,\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{r}}\times m\,\vec{\mathbf{v}}\right)}_{I\,\frac{d\omega}{dt}} = \underbrace{\sum \vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}}_{\sum M}$$

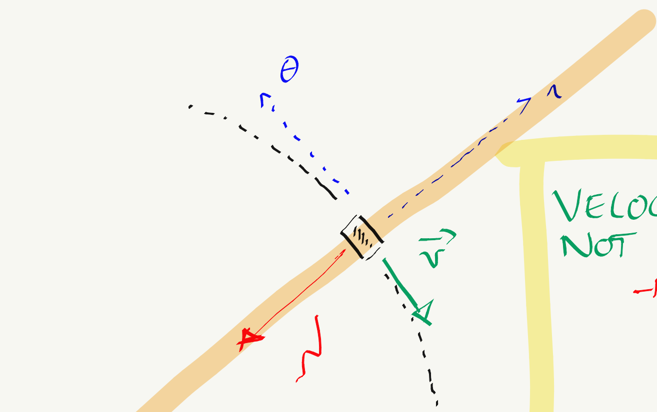
- Dans un mouvement circulaire, l'accélération a toujours une **composante centripète**. Les variations de la vitesse angulaire génère une **composante tangentielle**.
- Seules les forces dont le moment n'est pas nul par rapport au centre de rotation permettent de modifier la vitesse angulaire d'un mouvement circulaire.
- Les forces modifient la quantité de mouvement
  Les moments modifient le moment cinétique

Vitesse maximale sans risque de dérapage ?

Automobile de 1000 kg
Angle de 30 degré par rapport à l'horizontale
Rayon du virage : 100 m
Coefficient de frottement statique de 0.1

[7]

EXEMPLE DE QUESTION UN PEU COMPLIQUÉE !

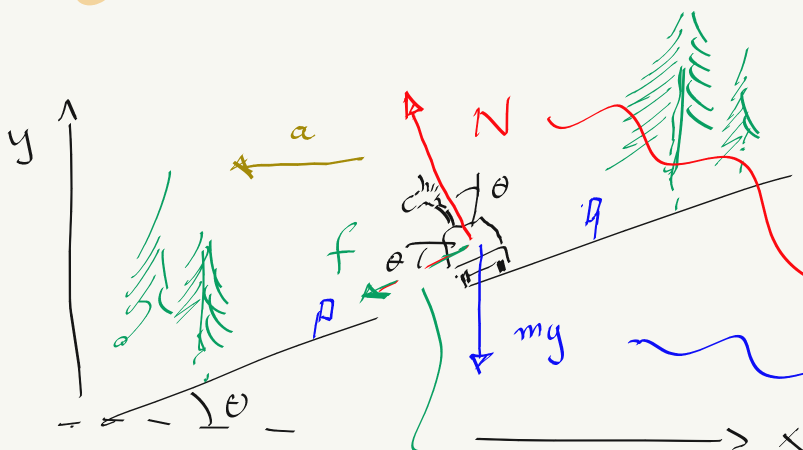


$$\vec{a} = \begin{bmatrix} -v^2/R \\ 0 \end{bmatrix}$$

VELOCITY NOT CONSTANT
-IS NOT-
SPEED CONSTANT

$$\vec{f} = \mu_s N \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$$

CAR ON NE DERAPE PAS !!



$$\begin{bmatrix} -N\sin\theta \\ N\cos\theta \end{bmatrix} = \vec{N}$$

$$m\vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}}$$

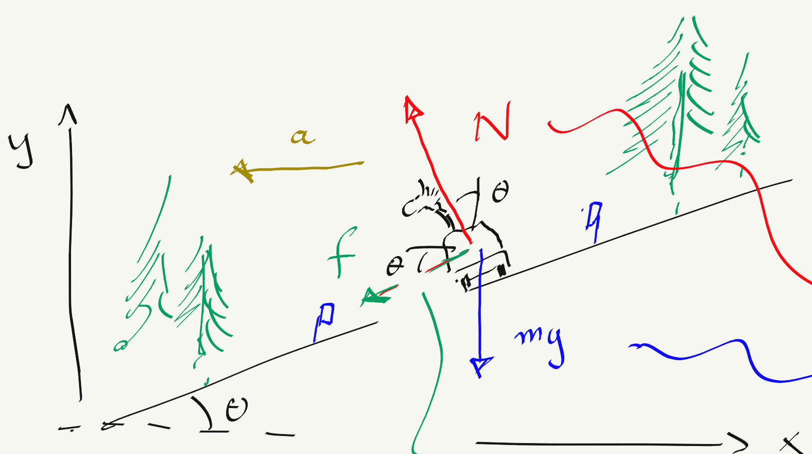
2 INCONNUES

v ET N

VITESSE MAXIMALE AVANT DE DERAPER !

2 EQUATIONS

$$\begin{cases} 0 = -mg + N\cos\theta - \mu_s N \sin\theta \\ \underbrace{-m\dfrac{v^2}{R}}_{\text{ACCELERATION CENTRIPETE !}} = -N\sin\theta - \mu_s N\cos\theta \end{cases}$$



$$\vec{f} = \mu_s N \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -N\sin\theta \\ N\cos\theta \end{bmatrix} = \vec{N}$$

$$m\vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$

2 INCONNUES

v ET N

VITESSE MAXIMALE AVANT DE DERAPER !

$$\begin{cases} 0 = -mg + N\cos\theta - \mu_S N \sin\theta \\ \underbrace{-m\dfrac{v^2}{R}}_{\text{ACCELERATION CENTRIPETE !}} = -N\sin\theta - \mu_S N\cos\theta \end{cases}$$

2 EQUATIONS

$$mg = N(\cos\theta - \mu_S \sin\theta)$$

$$N = \frac{mg}{\cos\theta - \mu_S\sin\theta}$$

$$\cancel{m}\frac{v^2}{R} = (\sin\theta + \mu_S\cos\theta)N$$

$$= \cancel{m}g\left(\frac{\sin\theta + \mu_S\cos\theta}{\cos\theta - \mu_S\sin\theta}\right)$$

$$v = \underbrace{\sqrt{\overset{[m/s^2]}{g}\,\overset{[m]}{R}\,\frac{\sin + \mu_S\cos}{\cos - \mu_S\sin}}}_{[m/s]}$$