La mécanique d'un corps...

Trois principes fondamentaux !

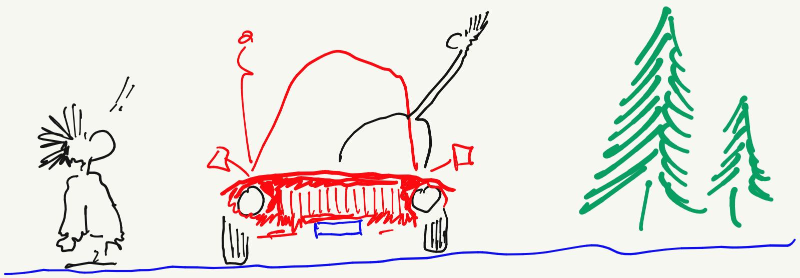
Conservation de la quantité de mouvement
Conservation de l'énergie
Conservation du moment de la quantité de mouvement

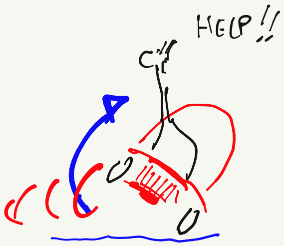
$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2 + \tfrac{1}{2}I\,\omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) = \sum M_i$$

A quelle vitesse la voiture fera-t-elle un tonneau ?



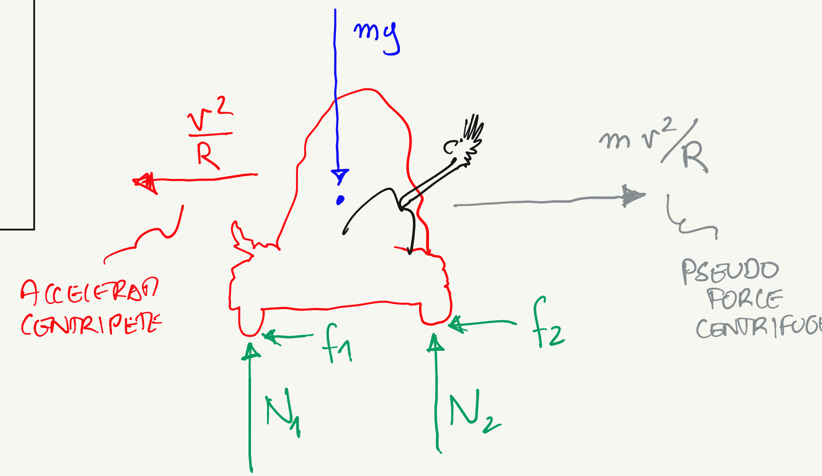


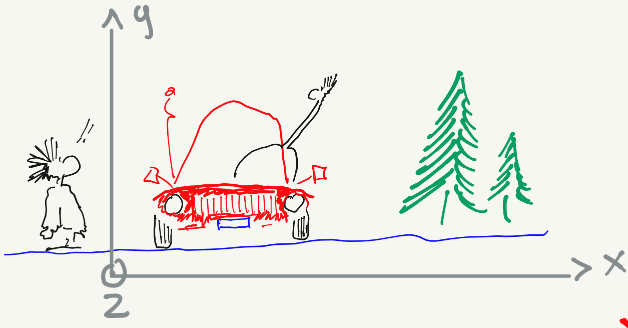
3 ÉQUATIONS
3 INCONNUES

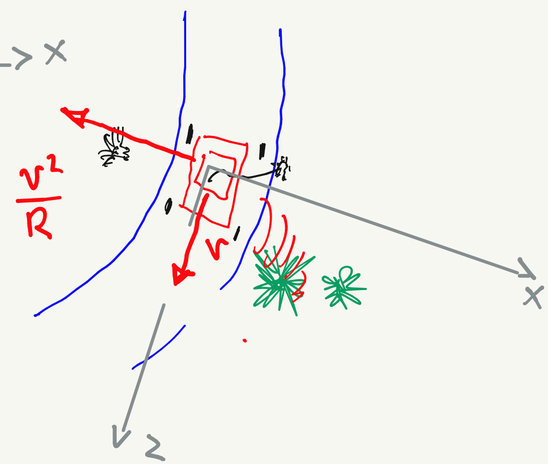
$$\sum F_x = m\frac{v^2}{R}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M = 0$$







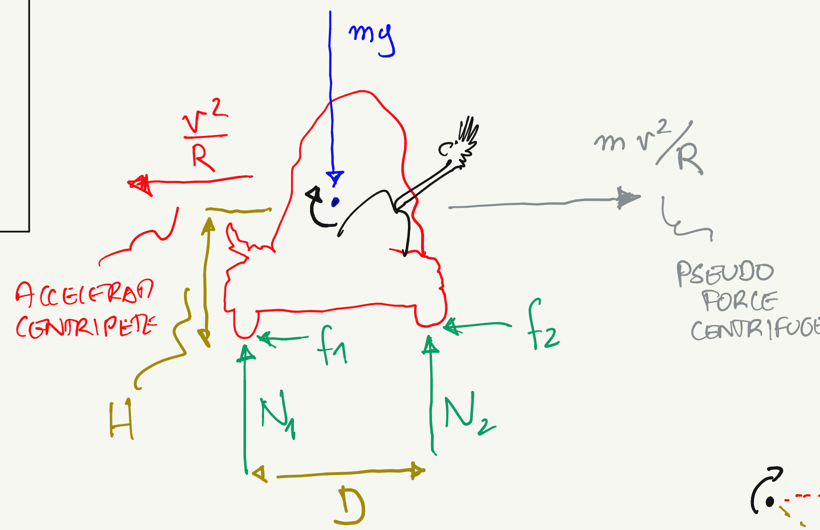
$$\sum F_x = m\frac{v^2}{R}$$

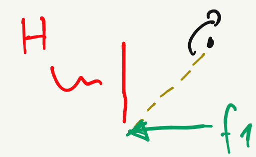
$$\sum F_y = 0$$

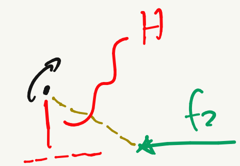
$$\sum M = 0$$

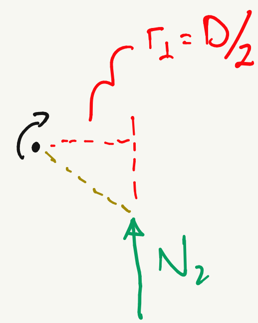
3 EQUATIONS
3 INCONNUES

$$\underbrace{f_1 + f_2}_{\text{INCONNUE } 1} \qquad \underbrace{N_1}_{\text{INCONNUE } 2} \qquad \underbrace{N_2}_{\text{INCONNUE}}$$

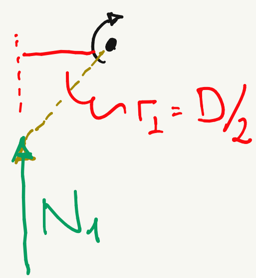








$$\begin{cases} f_1 + f_2 = m\dfrac{v^2}{R} \\ N_1 + N_2 - mg = 0 \\ N_1\dfrac{D}{2} - N_2\dfrac{D}{2} + \underbrace{f_1 H + f_2 H}_{H(f_1+f_2)} = 0 \end{cases}$$



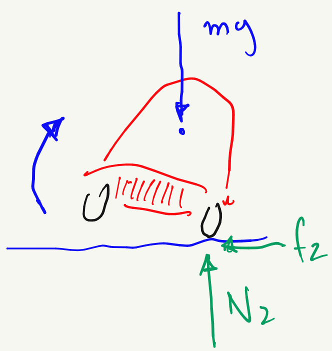
$$
\begin{cases}
\cancel{f_1} + f_2 = m\dfrac{v^2}{R} \\
\cancel{N_1} + N_2 - mg = 0 \\
\cancel{N_1}\dfrac{D}{2} - N_2\dfrac{D}{2} + \underbrace{\cancel{f_1 H} + f_2 H}_{H(f_1+f_2)} = 0
\end{cases}
$$

$$f_2 = m\frac{v^2}{R}$$

$$N_2 = mg$$

$$-\cancel{m}g\frac{D}{2} + \cancel{m}\frac{v^2}{R}H = 0$$

$$v^2 = g\frac{DR}{2H}$$



$$\boxed{v = \sqrt{\frac{gDR}{2H}}}$$

[m/s]

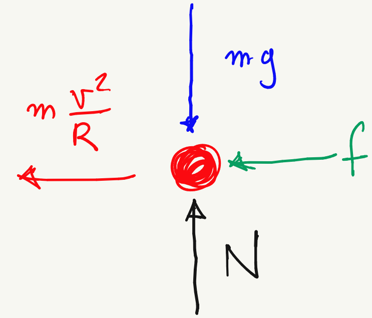
[m/s²] [m] [m]

[m]

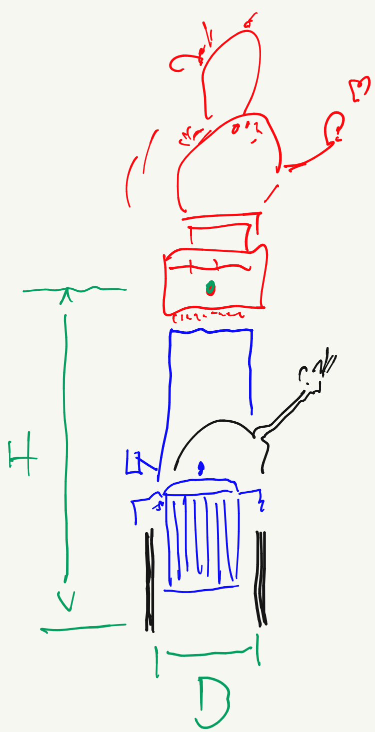
$g \nearrow \quad D \nearrow \quad R \nearrow \quad H \searrow$

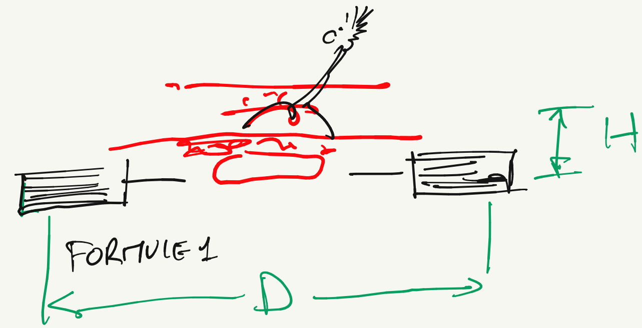
$$\boxed{v = \sqrt{\frac{gDR}{2H}}} \quad [m/s]$$

$[m/s^2]$ $\underbrace{[m] \quad [m]}_{[m]}$

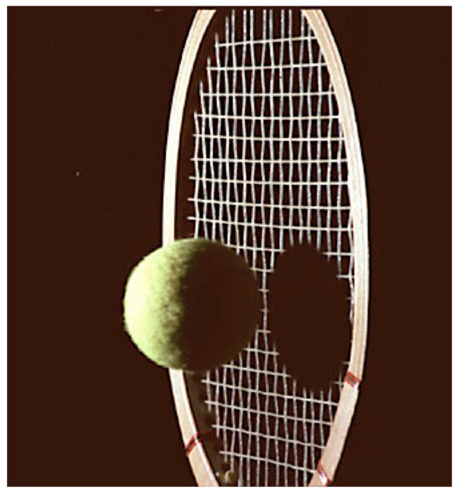


g ↗ D ↗ R ↗ H ↘





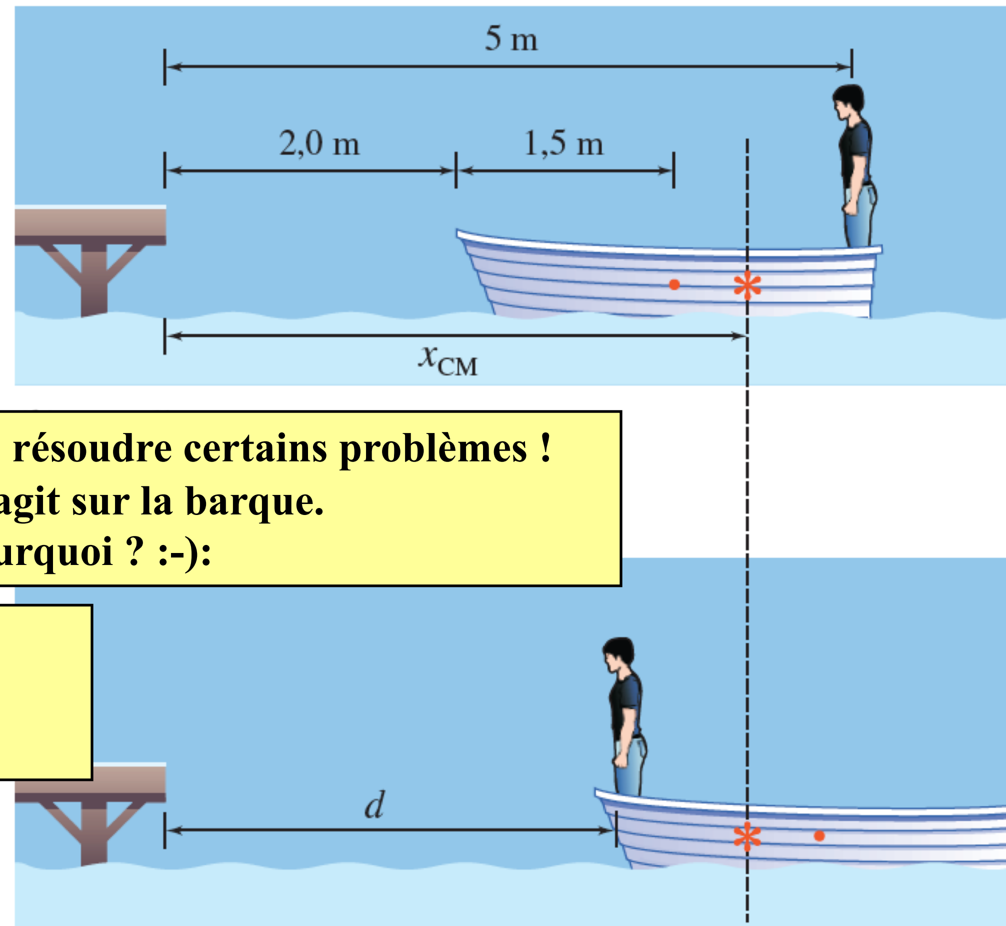
Un corps, cela peut aussi être un paquet de corps !



**On peut appliquer la conservation
de la quantité de mouvement ou de l'énergie
pour l'ensemble du système.**

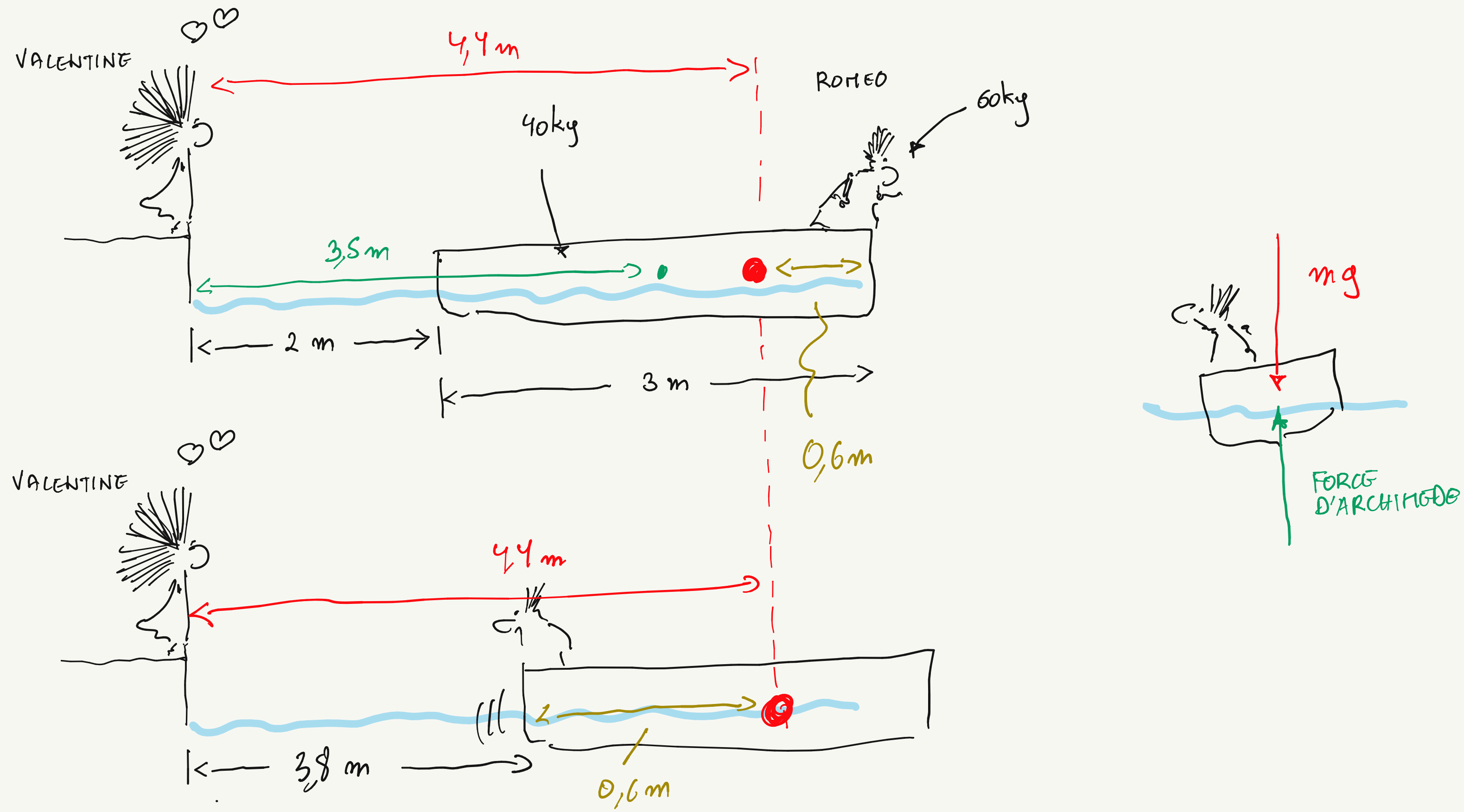
C'est ce qu'on a fait pour analyser les chocs !

Deux corps comme un unique système...



C'est vraiment une manière très efficace de résoudre certains problèmes !
Ici, on suppose qu'aucune force extérieure agit sur la barque.
C'est une approximation un peu fausse (pourquoi ? :-):

Ensuite, on peut appliquer la conservation
de la quantité de mouvement
pour l'ensemble du système.



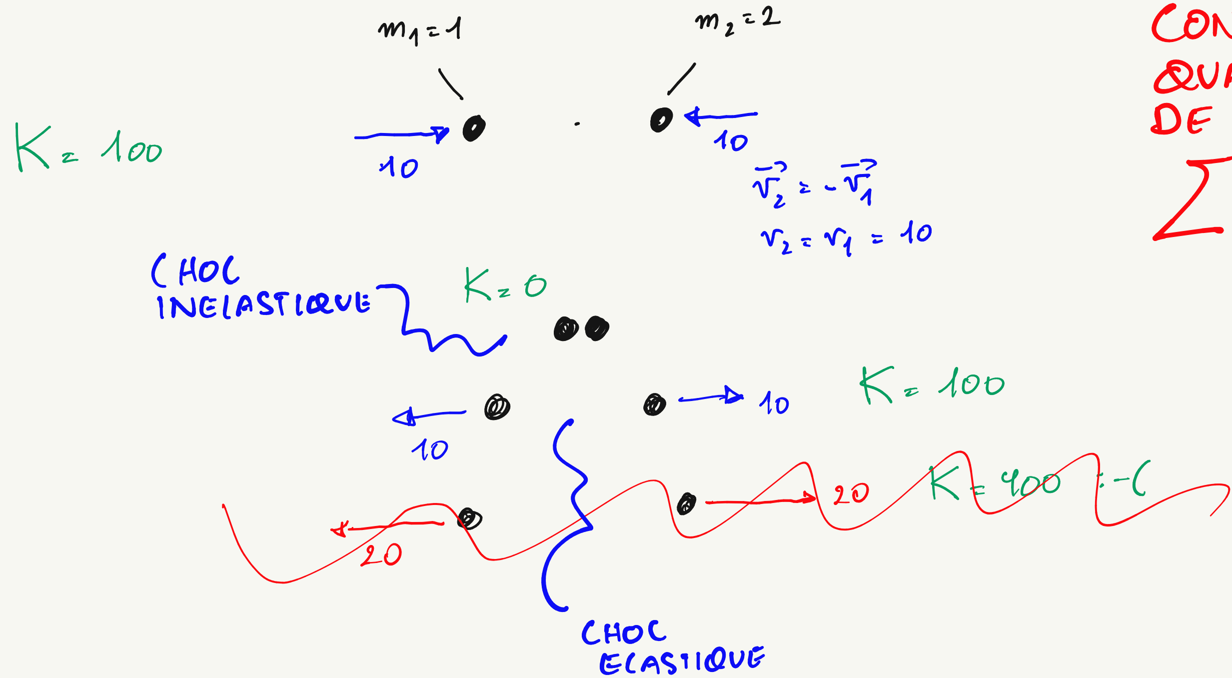
$$\vec{X} = \underbrace{\frac{m_{CANOT}}{100}}_{0,4}\, 3,5 + \underbrace{\frac{m_{ROMEO}}{100}}_{0,6}\, 5 = \underbrace{0,4 \times 3,5}_{1,4} + \underbrace{0,6 \times 5}_{3}$$

Un obus qui explose en deux parties...

On peut déduire le mouvement d'un des morceaux à partir du mouvement de l'autre fragment !

Le centre de masse poursuit la trajectoire parabolique initiale…

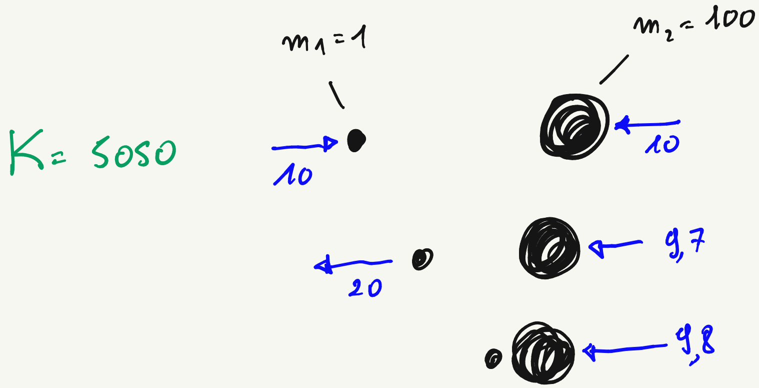
... et la collision tout-à-fait inélastique entre deux voitures !



PAS POSSIBLE !

CONSERVATION QUANTITÉ DE MOUVEMENT

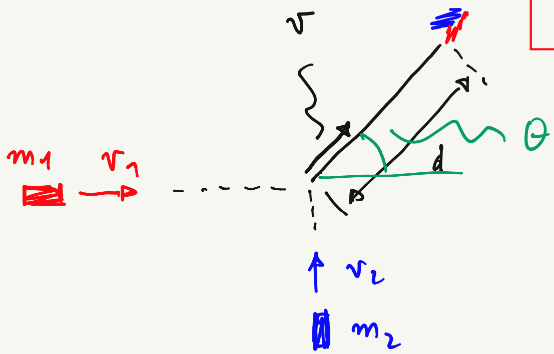
$$\underbrace{\sum m_i \vec{v}_i}_{=0}$$



$$\sum m_i \vec{v}_i = \begin{bmatrix} 990 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$K = 4904$

$K = 4850$



θ — ANGLE

d — DISTANCE

$\underbrace{m_1 \quad m_2}_{\text{MASSE DES VOITURES}}$

μ_c

DONNEES

v_1 v_2

INCONNUES

1 CHOC INELASTIQUE

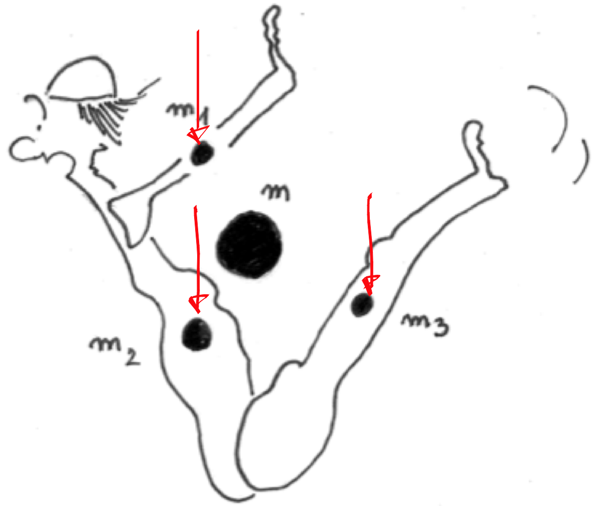
$$\begin{bmatrix} m_1 v_1 \\ m_2 v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos\theta \\ v \sin\theta \end{bmatrix} (m_1 + m_2)$$

2 APRES LE CHOC

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 = \underbrace{\underbrace{\mu_c (m_1+m_2) g}_{\text{FORCE DE FROTTEMENT}}\, d}_{\text{TRAVAIL DE FORCE}}$$

La somme de moments de forces de gravité...

$$
\begin{aligned}
\sum m_i \, \vec{\mathbf{x}}(t) &= \sum m_i \, \vec{\mathbf{x}}_i(t) \\
0 &= \sum m_i \left(\vec{\mathbf{x}}_i(t) - \vec{\mathbf{x}}(t) \right) \\
0 &= \sum m_i \vec{\mathbf{g}} \times \underbrace{\left(\vec{\mathbf{x}}_i(t) - \vec{\mathbf{x}}(t) \right)}_{\vec{\mathbf{r}}_i(t)}
\end{aligned}
$$

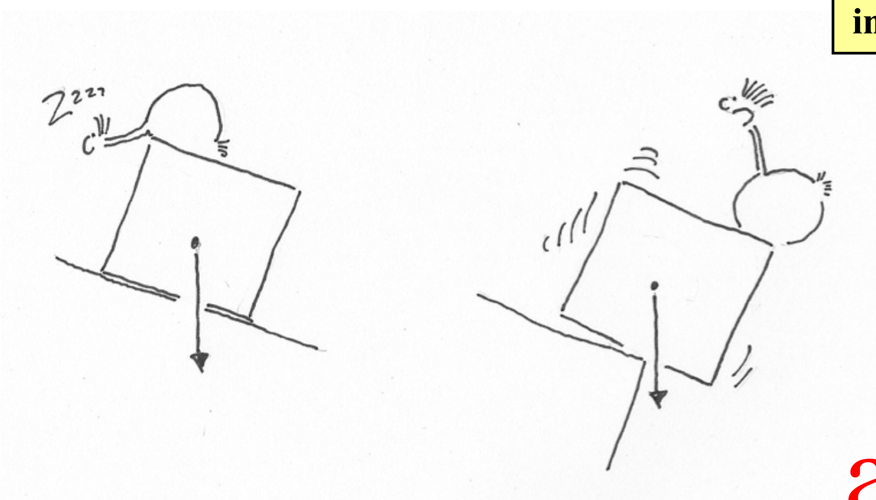


... par rapport au centre de gravité est nulle

La somme de moments de forces de gravité...

Le centre de gravité est le point d’application de la résultante des forces de gravité !

La connaissance de la position du centre de gravité est indispensable pour déterminer la stabilité d'un objet !



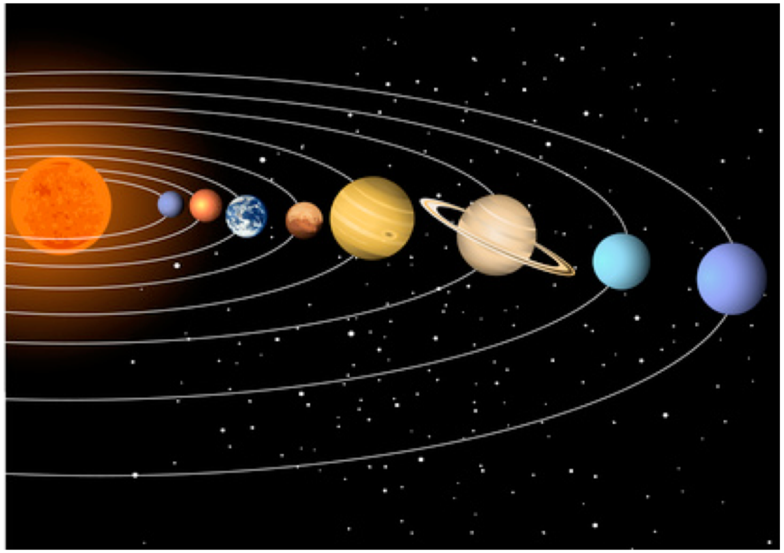
... par rapport au centre de gravité est nulle

Centre de gravité...

$$0 = \sum m_i \vec{\mathbf{g}}_i \times \left(\vec{\mathbf{x}}_i - \vec{\mathbf{x}}_{\text{gravité}}\right)$$

C'est différent uniquement si l'accélération de la gravité n'est pas constante !

Pour prédire le mouvement des planètes, c'est important !
Pour prédire le mouvement du corps humain, ce n'est vraiment pas bien important !



$$0 = \sum m_i \left(\vec{\mathbf{x}}_i - \vec{\mathbf{x}}_{\text{masse}}\right)$$

... et centre de masse

Moments

$$\frac{d}{dt}\left(I\ \omega\right) = \sum M_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

Forces

La cause :
la force !

Résistance au mouvement = masse

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right)} = \boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}_i}$$

La conséquence :
l'accélération !

Quelle est la voiture qui va accélérer le plus vite pour la même force motrice ?

Bilan de la quantité de mouvement

La cause :
le moment de force !

Résistance à la rotation
= moment d'inertie

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right)} = \boxed{\sum M_i}$$

La conséquence :
l'accélération angulaire !

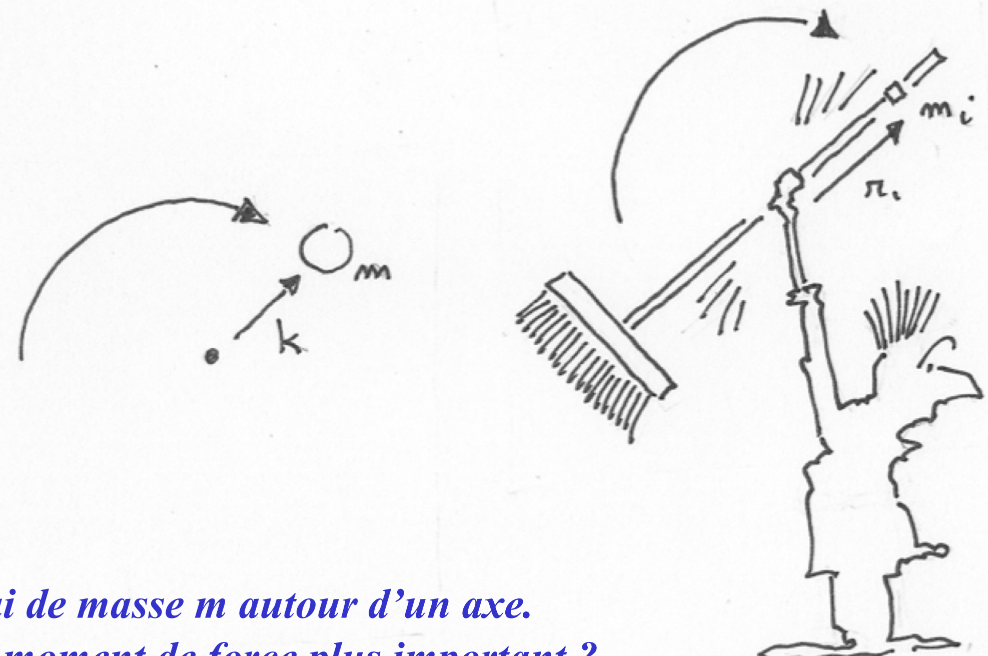
Bilan du moment cinétique

Que fait la danseuse pour tourner plus vite sur elle-même ?

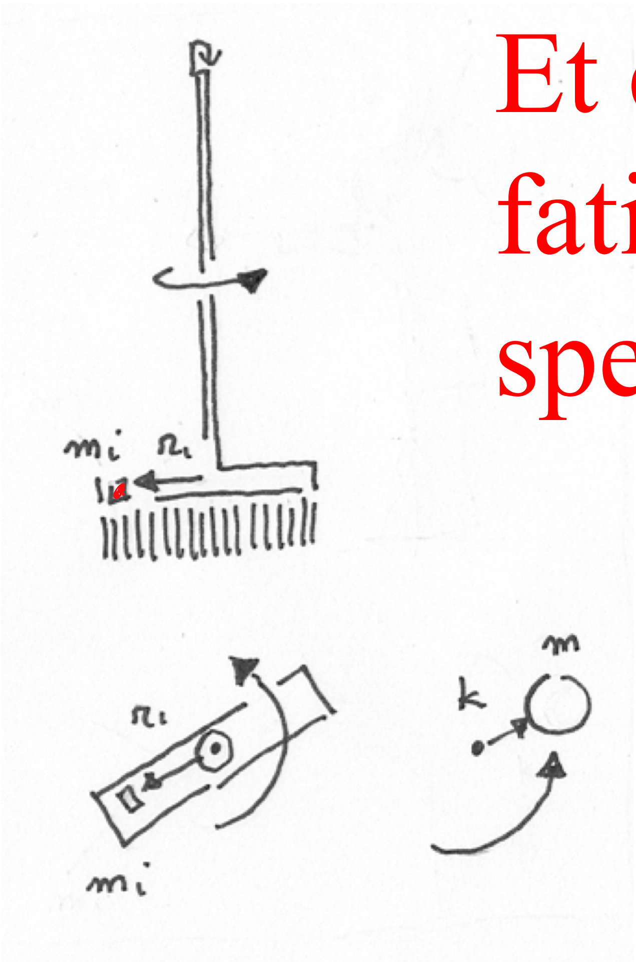
Qu'est ce qui influence le moment d'inertie ?

Le moment d'inertie dépend de :

- **la masse du balai**
- **la distribution de la masse par rapport à l'axe de rotation**



On veut faire tourner un balai de masse m autour d'un axe.
Quel mouvement requiert un moment de force plus important ?



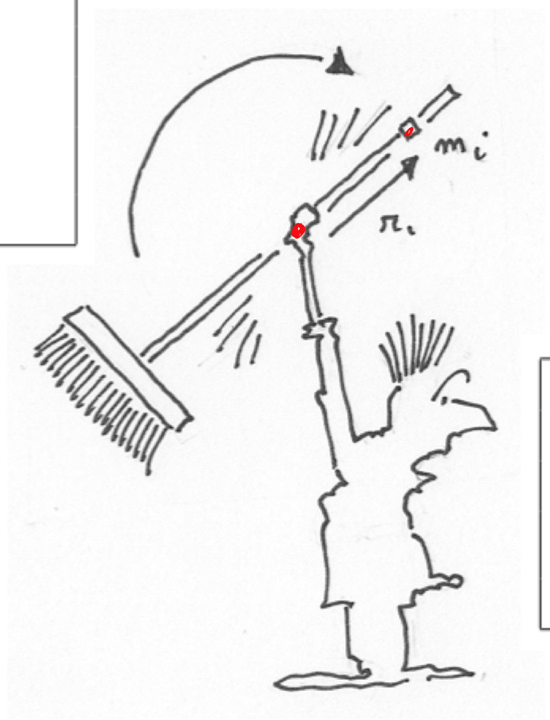
Et ceci est moins fatiguant et moins spectaculaire !

On veut faire tourner un balai de masse m autour d'un axe.
Quel mouvement requiert un moment de force plus important ?

Le moment d'inertie dépend de :
- la masse du balai
- la distribution de la masse par rapport à l'axe de rotation

Moment d'inertie

$$\boxed{I} = \sum m_i \, r_i^2$$



Rayon de giration

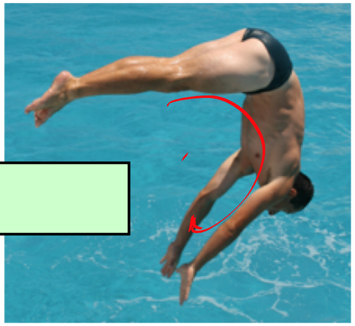
$$m \, \boxed{k^2} = \sum m_i \, r_i^2$$

Inertie - rayon de giration

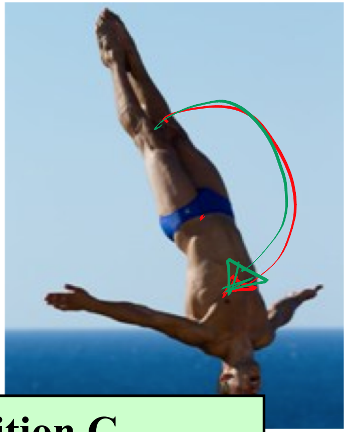
Le moment d'inertie dépend de :
- **la masse du plongeur**
- **la distribution de la masse par rapport à l'axe de rotation**

Position A

Pour quelles positions, le plongeur a le plus grand moment d'inertie et le plus petit moment d'inertie ?



Position B



Position C

Rayon de giration

$$m\,k^2 = \sum m_i\,r_i^2$$

Moment d'inertie du plongeur

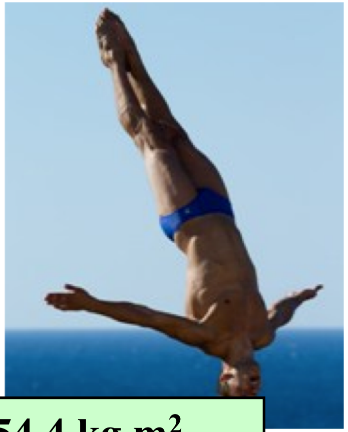
Le moment d’inertie dépend de :

- la masse du plongeur

- la distribution de la masse par rapport à l’axe de rotation

I = 12.6 kg m²

I = 23.8 kg m²



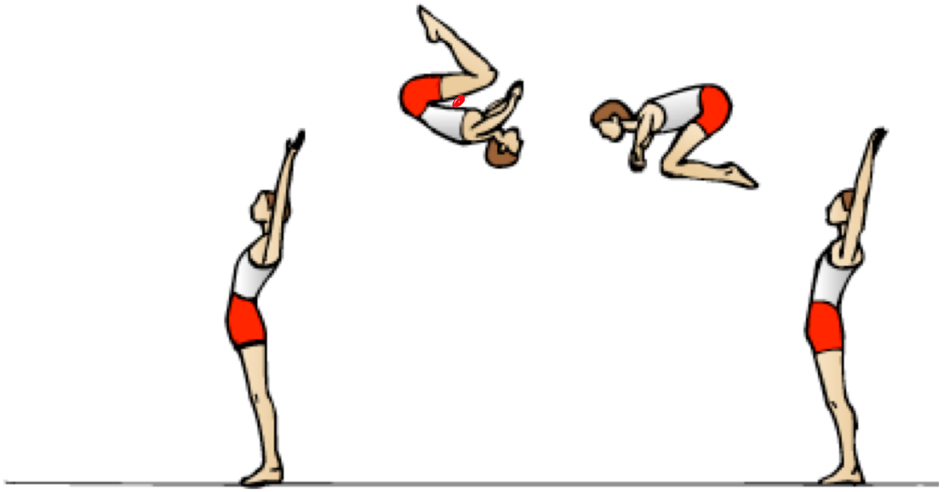
I = 54.4 kg m²

Rayon de giration

$$m\,k^2 \;=\; \sum m_i\,r_i^2$$

Moment d’inertie du plongeur

Pourquoi est-ce que
la gymnaste se recroqueville
pour faire la pirouette ?



- La masse mesure la résistance d'un corps à une accélération causée par une force.
- Le moment d'inertie mesure la résistance d'un corps à une accélération angulaire causée par un moment de force.

$$\frac{d}{dt}\Big(m\,\vec{\mathbf{v}}\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\,v^2 + \tfrac{1}{2}I\,\omega^2\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\Big(I\,\omega\Big) = \sum M_i$$

Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$0 = \sum M_i$$