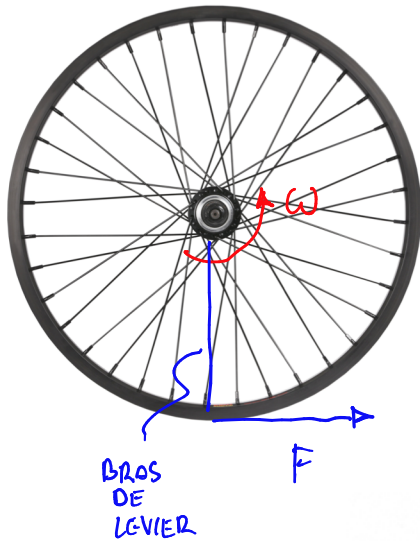
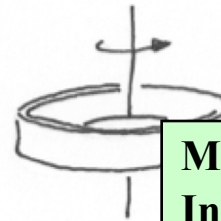
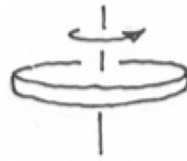


**Masse identique
Inertie minimale**



**Masse identique
Inertie maximale**

$$\frac{d}{dt} (I \omega) = \sum M_i$$

Diagram showing the relationship between the derivative of the product of moment of inertia and angular velocity, and the sum of external torques. The term I is labeled "MOMENT D'INERTIE" and ω is labeled "VITESSE ANGULAIRE".

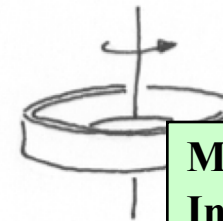
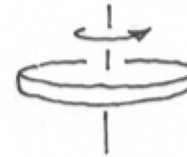
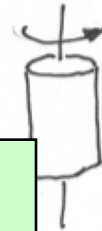
Cylindre, disque, anneau...
Veaux, vaches, cochons !

Une bibliothèque de moments d'inertie

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i r_i^2$$

Masse identique
Inertie minimale

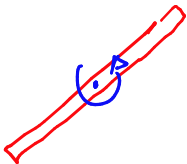


Masse identique
Inertie maximale

$$I = m R^2$$



$$I = m \frac{R^2}{2}$$



$$I = \frac{m L^2}{12}$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

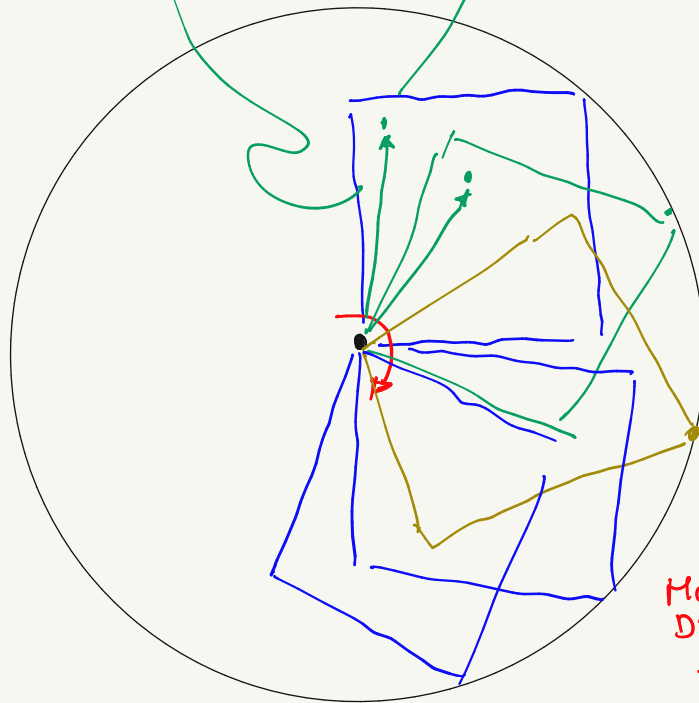
Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m \frac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m \frac{L^2}{12}$

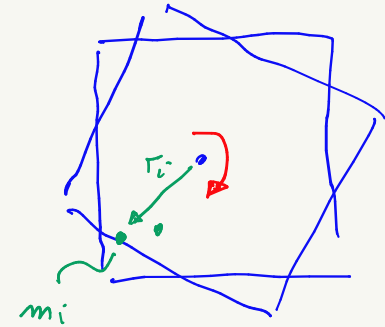
$\vec{h} + \vec{L}_i$

m_i



MOMENT
D' INERTIE

I_h

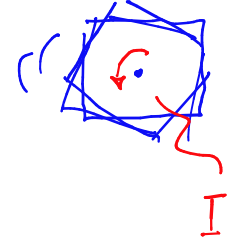


MOMENT
D' INERTIE

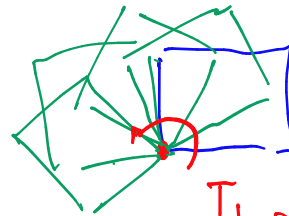
$$I = \sum m_i r_i^2$$

Théorème de Huygens

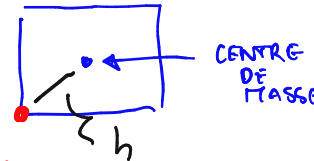
Moment d'inertie quelconque



$$\begin{aligned}
 I_h &= \sum m_i (\vec{r}_i + \vec{h}) \cdot (\vec{r}_i + \vec{h}) \\
 &= \underbrace{\sum m_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i}_{= I} + \underbrace{\sum m_i \vec{h} \cdot \vec{h}}_{= m h^2} + 2 \left(\underbrace{\sum m_i \vec{r}_i}_{= 0} \right) \cdot \vec{h}
 \end{aligned}$$



$$I_h = I + m h^2$$



CENTRE
DE
MASSE

*En vertu de la définition
du centre de masse !*

Une conséquence immédiate de ce théorème est qu'il est moins coûteux (en énergie) de faire tourner un corps autour d'un axe passant par le centre de masse.

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m h^2 + I$$

Accélération dans l'avant-bras due à la gravité



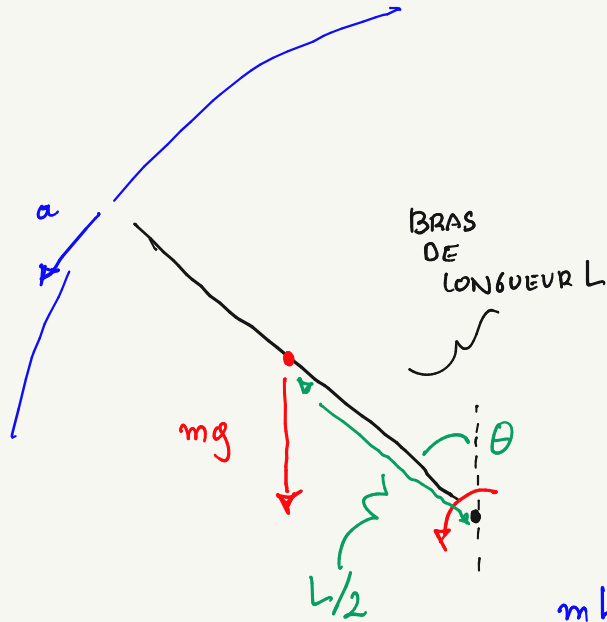
Quelle est l'accélération angulaire pour un angle quelconque ?

Quelle est l'accélération tangentielle lorsque l'avant-bras est horizontal ?

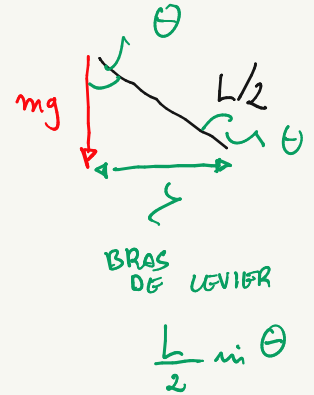
$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}I \omega^2\right) = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$



$$I_h \alpha = mg \frac{L}{2} \sin \theta$$



$$I_h = \underbrace{m \frac{L^2}{12}}_I + \underbrace{m \frac{L^2}{4}}_{m \cdot h^2}$$

$$m L^2 \left(\underbrace{\frac{1}{12} + \frac{3}{12}}_{\frac{4}{12}} \right) = \frac{m L^2}{3}$$

$$\cancel{\frac{m L^2}{3}} \frac{a}{\cancel{L}} = \cancel{mg} \frac{\cancel{L}}{2} \sin(\theta)$$

$$\alpha = \frac{3}{2} g \underbrace{\sin(\theta)}_{\approx 1}$$

$\sin \theta = 1$
 $\theta = \pi/2$

$$a_{\max} = \frac{3}{2} g$$

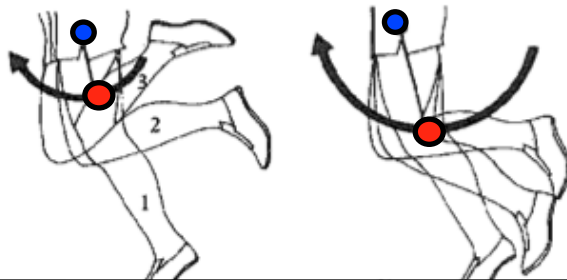
CECI
EST
LE RÉSULTAT
FINAL :-)

Moment d'inertie de la jambe par rapport à la hanche

Lors d'un sprint, le coureur va chercher à ramener ses jambes le plus rapidement possible en avant.

Il va attirer le talon vers le haut durant la phase d'oscillation.

Le moment d'inertie par rapport à la hanche est diminué.



Pour les courses de fond, le coureur va dépenser moins d'énergie à relever le talon.

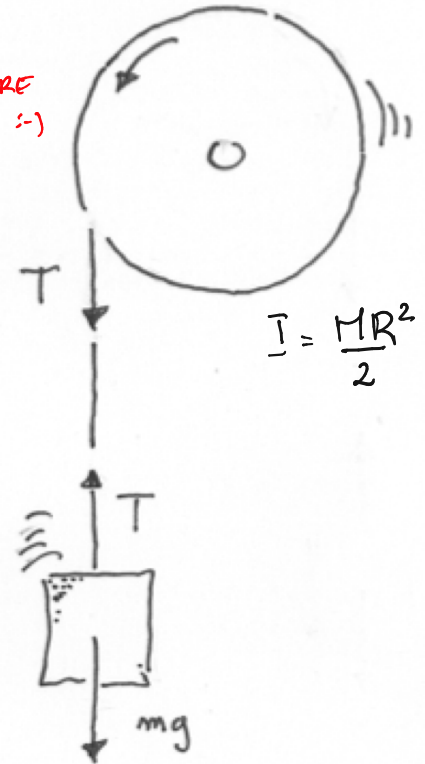
Le moment d'inertie par rapport à la hanche reste plus grand.

La vitesse est évidemment aussi moins rapide !

On lache un bloc attaché à une poulie

*Quelle est la vitesse angulaire de la poulie après 3 secondes ?
Vitesse du bloc lorsqu'il est descendu de 1.6 mètre ?*

LA POULIE
EST
UN
CYLINDRE
PLEIN :-)



$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

APPROCHE
CLASSIQUE
POUR
L'ETUDIANT
HABITUÉ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}I \omega^2\right) = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$

L'APPROCHE
ENERGETIQUE

$$\frac{Ma}{2} = m(g-a)$$

$$2mg - 2ma = Ma$$

$$2mg = (M+2m)a$$

$$a = \frac{2mg}{M+2m}$$



LA
REPONSE
EST ICI

$$\underbrace{TR}_{\text{MOIENT DE LA FORCE } T} = \frac{MR^2}{2} \alpha \stackrel{\text{MASSE DE LA POULIE!}}{=} \frac{MR^2}{2} \frac{a}{R}$$

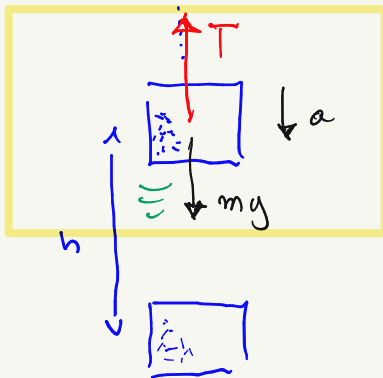
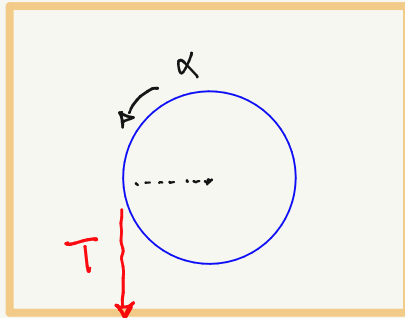
$$T = \frac{Ma}{2}$$

2 EQUATIONS
2 INCONNUES a, T

RELATION
CINETATIQUE
 $\alpha R = a$

$$ma = mg - T$$

$$T = m(g-a)$$

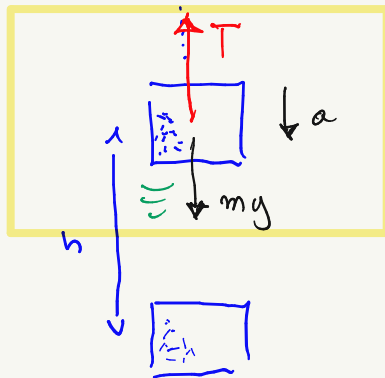
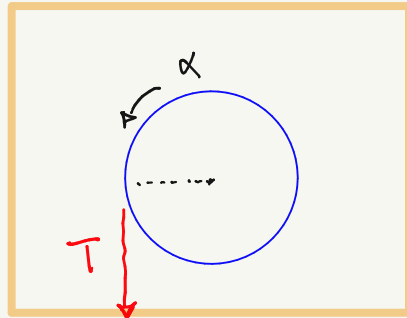


ET QUELLE EST
LA VITESSE DU BLOC
LORSQU'IL CHUTE
D'UNE HAUTEUR h ?



$$a = \frac{2mg}{(M+2m)}$$

LA
REPONSE
EST ICI



$$h = a \frac{t^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

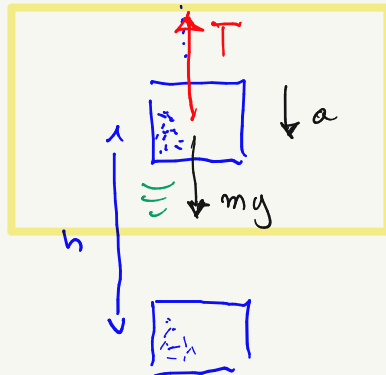
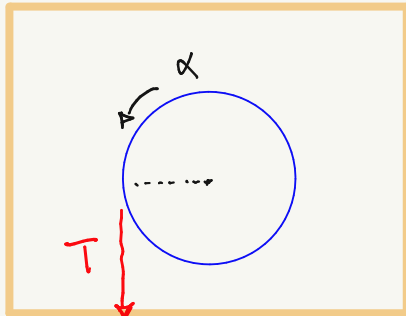
$$v = at = \sqrt{2ha}$$

$$v = \sqrt{\frac{4mhg}{(M+2m)}}$$

ET VOILA
LA REPONSE
FINALE :-)

SO EASY!

L'APPROCHE ENERGETIQUE :-)



AVANT

ENERGIE
POTENTIELLE

$$mgh$$

ENERGIE
CINETIQUE

$$0$$

APRES

$$0 + \frac{m v^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2} = \frac{M R^2}{2} \frac{v^2}{R^2}$$

$$mgh = m \frac{v^2}{2} + \frac{M}{4} v^2$$

$$4mgh = (2m + M) v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{4mgh}{(M+2m)}}$$



$$v = \sqrt{\frac{4mgh}{(2m + M)}}$$

ET
LA
VOILA
REPONSE
FINALE :-)



- La **masse** mesure la résistance d'un corps à une **accélération** causée par une **force**.
- Le **moment d'inertie** mesure la résistance d'un corps à une **accélération angulaire** causée par un **moment de force**.

Ne pas
oublier !



$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}I \omega^2\right) = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$

Equilibre statique

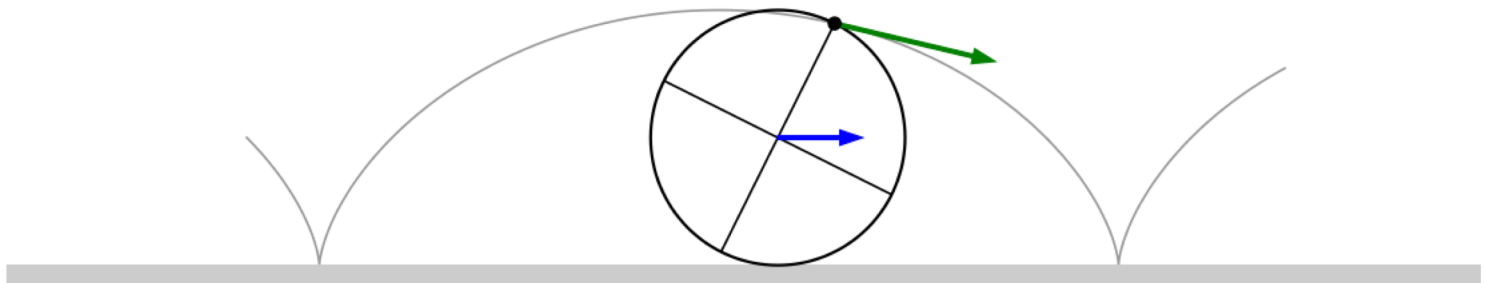
$$0 = \sum \vec{F}_i$$

$$0 = \sum M_i$$

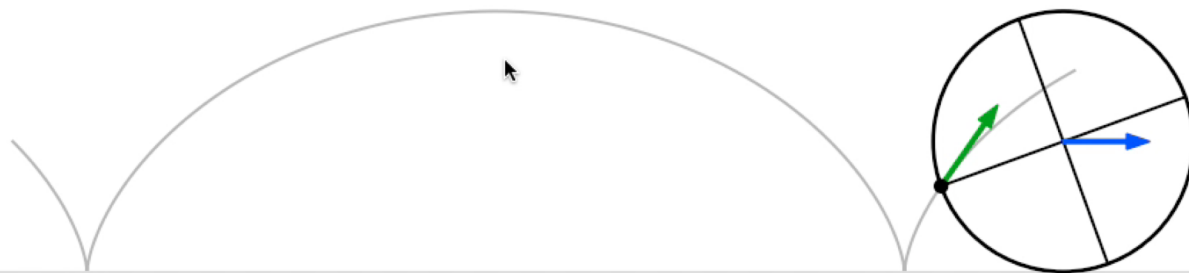
Faisons un peu de vélo...



Comme la roue ne glisse pas, le point bas est très brièvement en contact avec la route. Ce point est au repos et la roue tourne autour ce point.



vitesse d'un point du cercle
vitesse du centre du cercle



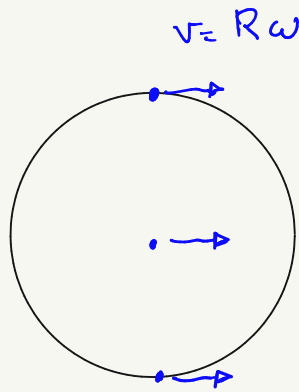
Le roulement : c'est combiner une translation et une rotation !



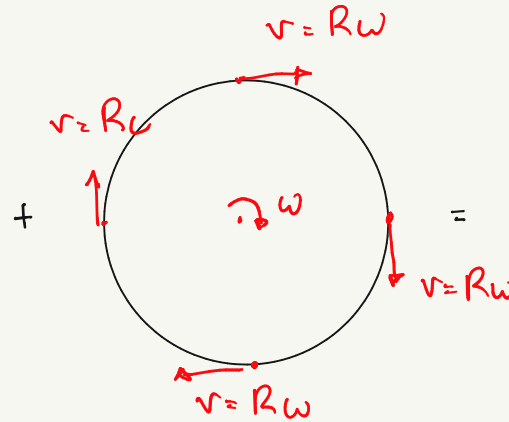
Rotation autour
du centre

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_c + \vec{v}_t(t)$$

Translation
du centre



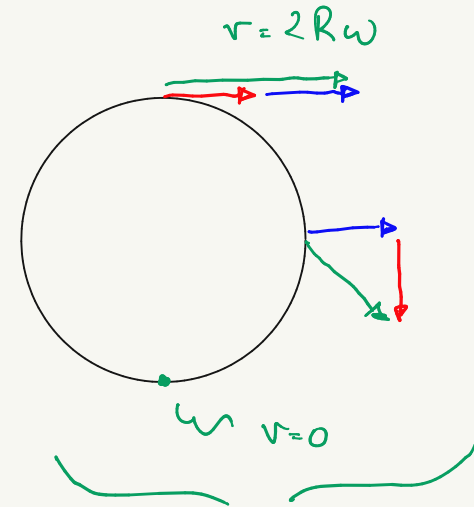
TRANSLATION



ROTATION

+

=



ROULEMENT
SANS
GLISSEMENT

ROULEMENT
SANS GLISSEMENT

$$v = R\omega$$

$$a = R\alpha$$

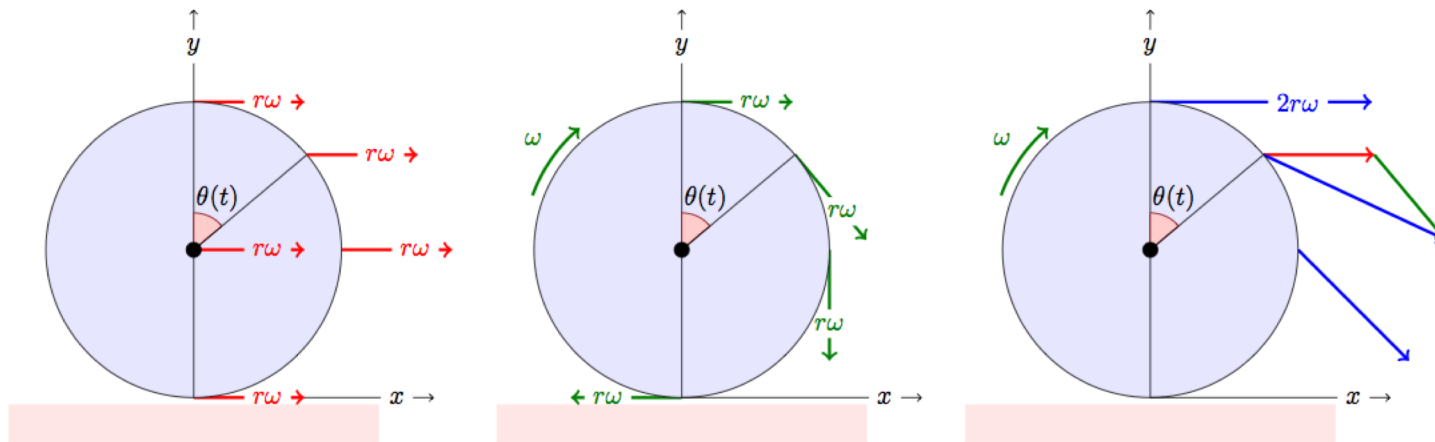
>

GLISSEMENT
AVEC / SANS
ROULEMENT

DERAPAGE!

BARBAF
L'ETBARDEE!

Le roulement, c'est
une translation du centre avec
une rotation autour du centre



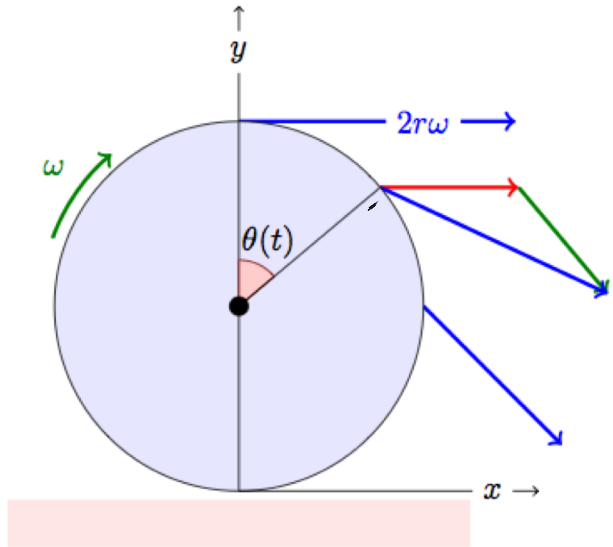
$$\vec{v}(t) = \vec{v}_c + \vec{v}_t(t)$$

Translation
du centre

Rotation autour
du centre

Le roulement, c'est
une translation du centre avec
une rotation autour du centre

*Le mouvement circulaire est dans le sens **horlogique**.
La roue avance vers la droite.*

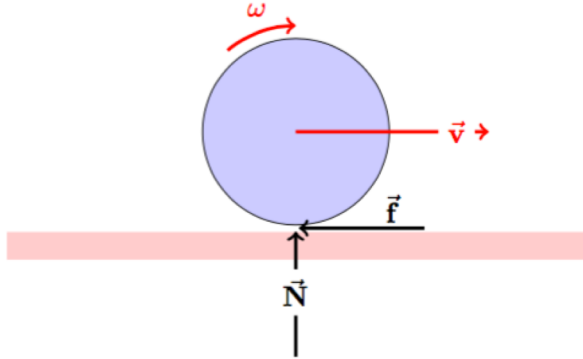


$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} v_c(t) \\ 0 \end{bmatrix} + r\omega(t) \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{bmatrix} a_c(t) \\ 0 \end{bmatrix} + r\omega^2(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ -\cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\alpha(t) \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

Condition de roulement sans glissement.

$$\begin{aligned} v &= \omega r \\ a &= \alpha r \end{aligned}$$



Comme la roue ne glisse pas, le point bas est très brièvement en contact avec la route. Ce point est au repos et la roue tourne autour ce point.

**Roulement
sans glissement
d'une roue !**

C'est l'inverse du glissement sans roulement ou dérapage incontrôlé !

