Est-ce que
ceci est du travail ?

Travail d'une force constante

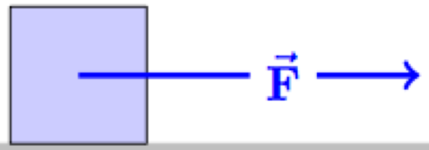
$$W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}$$

WORK

FORCE

DEPLACEMENT

Position : $\vec{\mathbf{x}}_a$

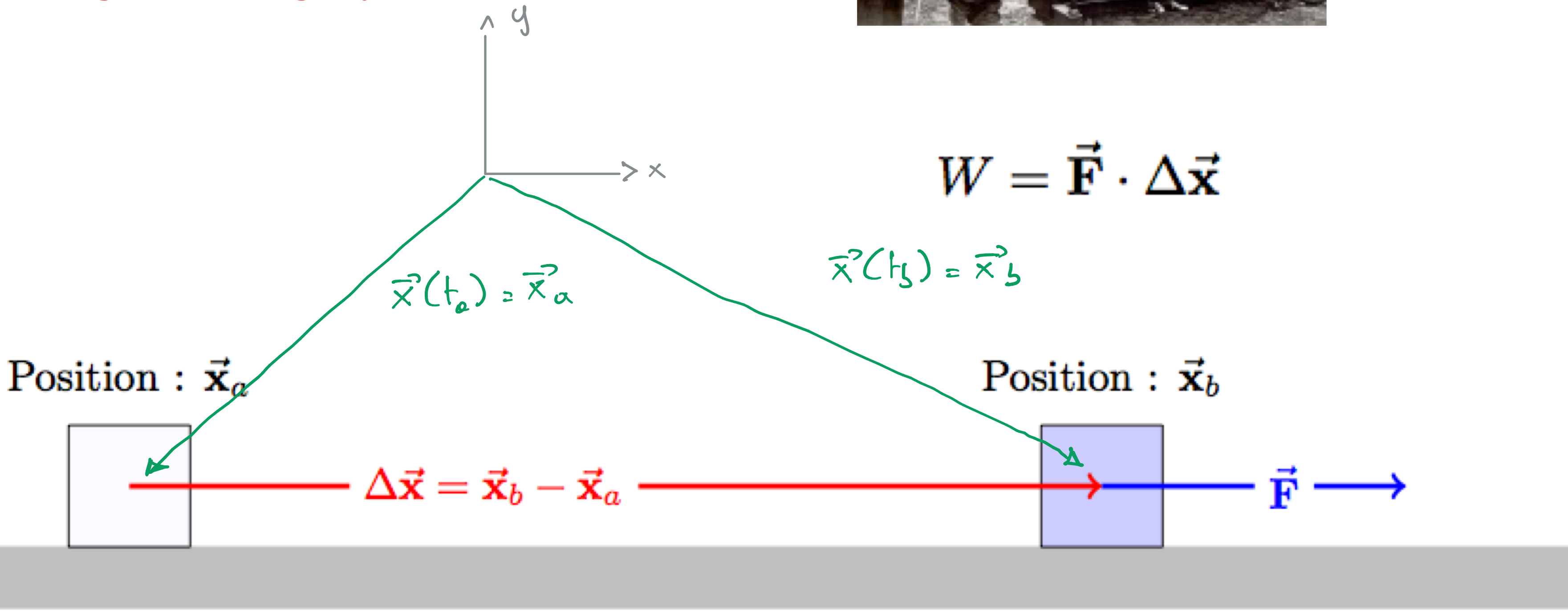


Le travail est le résultat du produit scalaire entre la force et le déplacement

Il peut être positif : travail moteur
Il peut être négatif : travail résistif
Il peut être nul !

Après quelques instants !

$$W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}$$



1

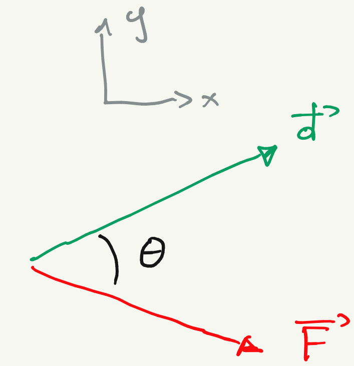
LE TRAVAIL D'UNE FORCE CONSTANTE

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{d}}$$

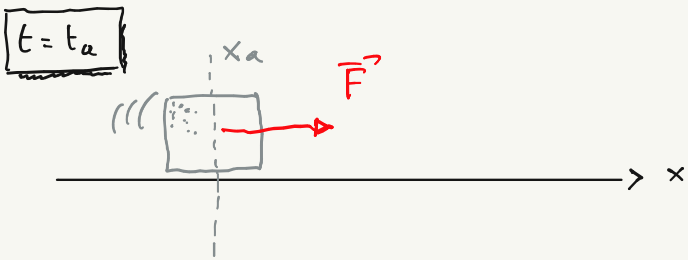
$[N\,m]$ = [Joule]

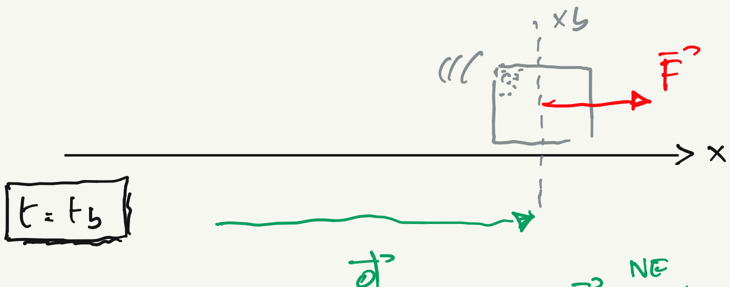
EN GENERAL

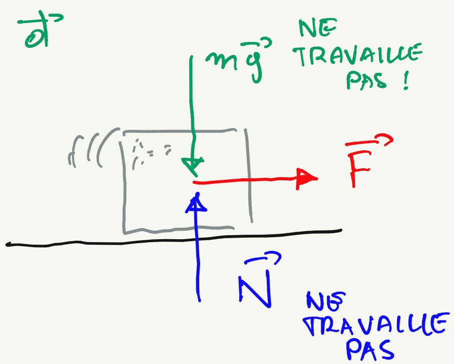
$W \neq F d$

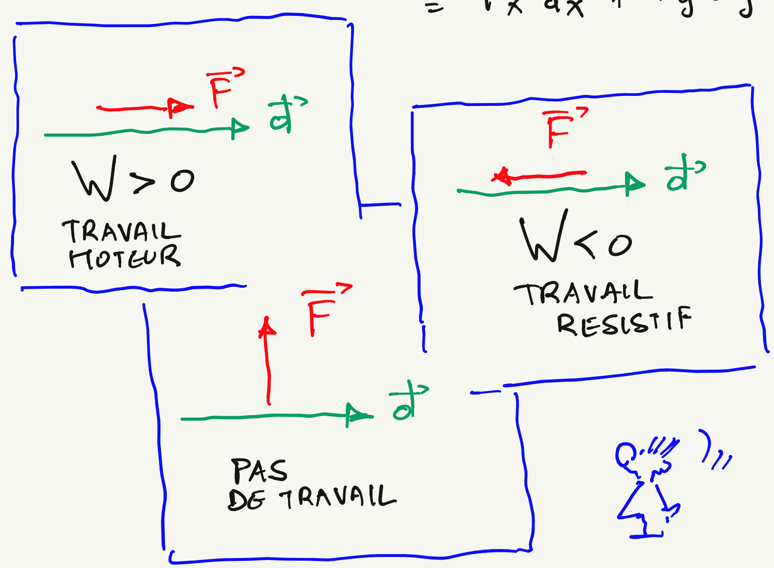


$$W = F d \cos\theta = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} = F_x d_x + F_y d_y$$

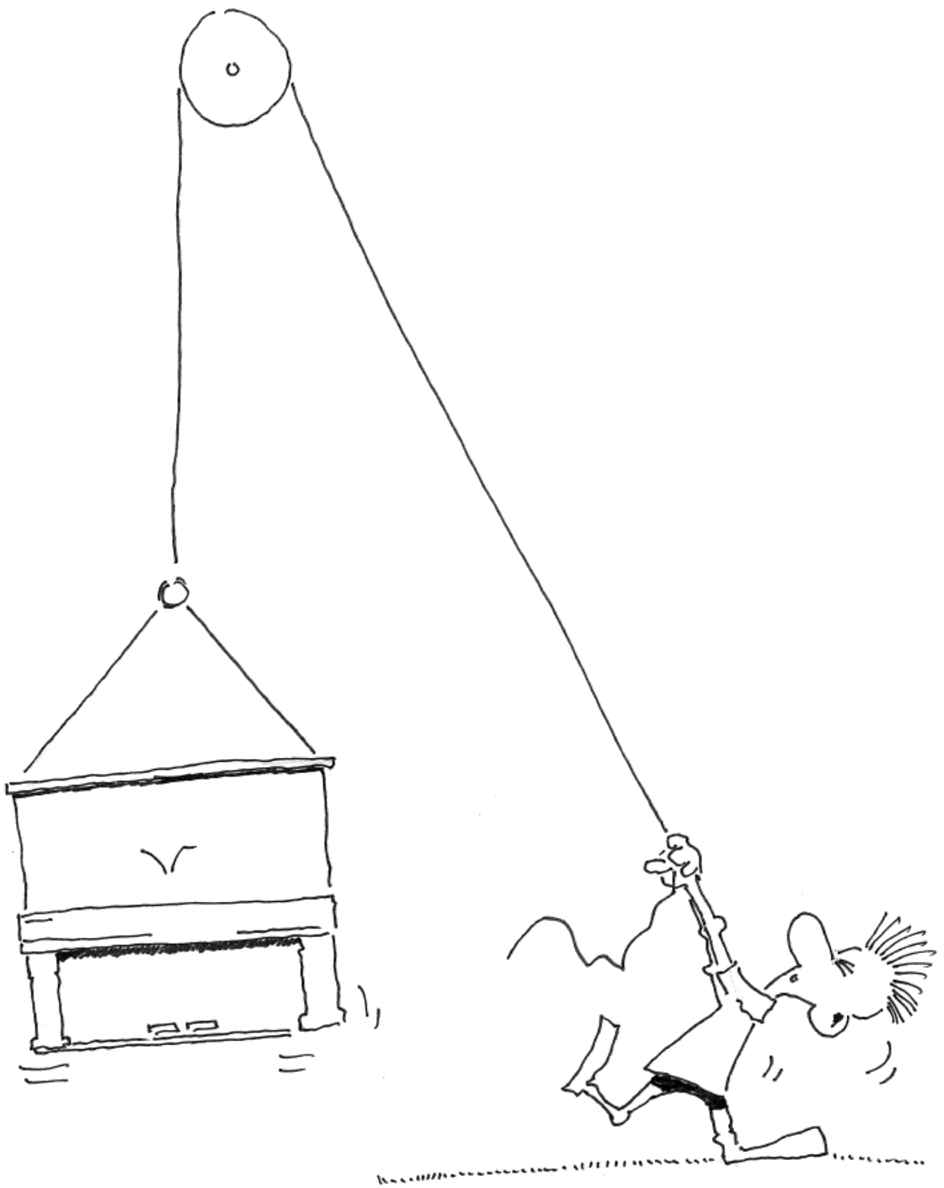




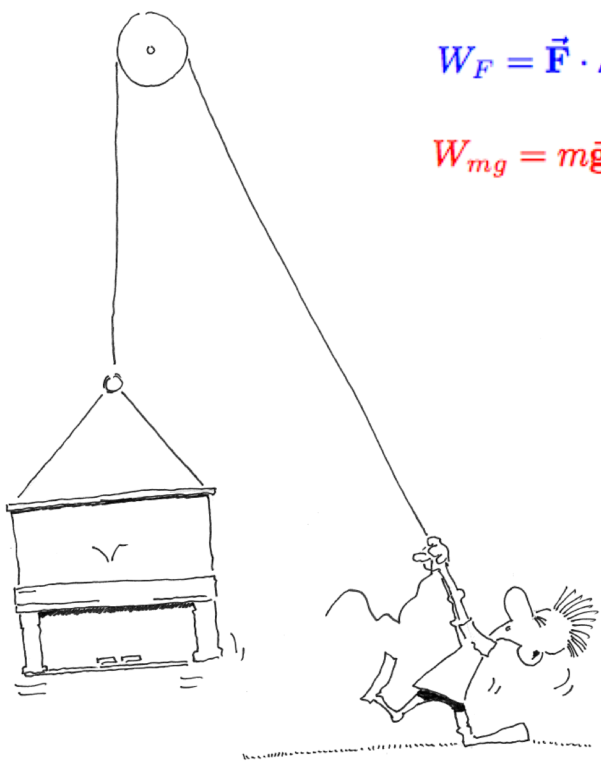




Bon ici
je travaille ?



Le piano monte !

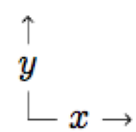


$$W_F = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}} = Fh > 0$$

$$W_{mg} = m\vec{\mathbf{g}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}} = -mgh < 0$$

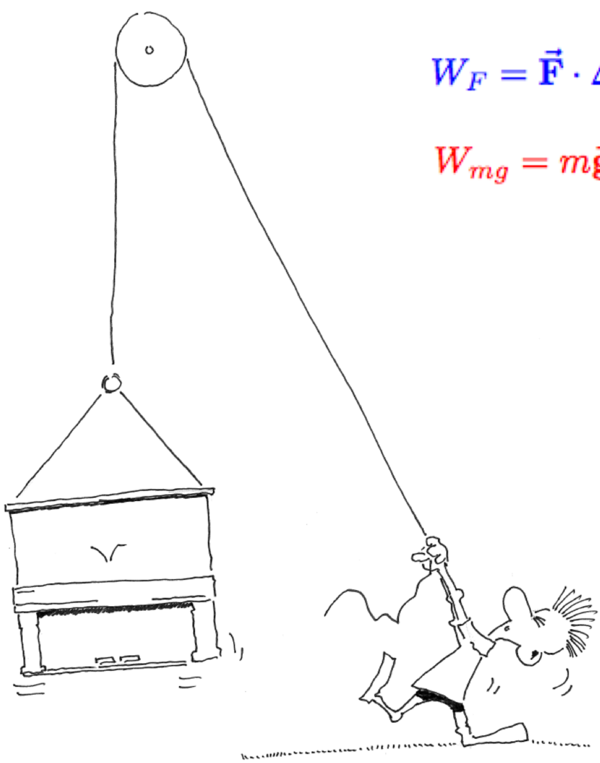
Position : $\vec{\mathbf{x}}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix}$

Position : $\vec{\mathbf{x}}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$



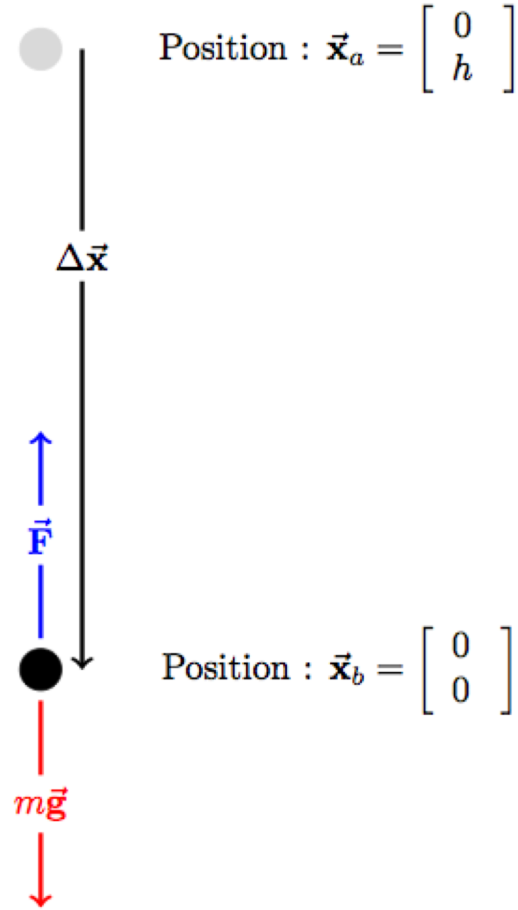
L’ouvrier fait un travail positif !

Le piano descend !



$$W_F = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}} = -Fh < 0$$

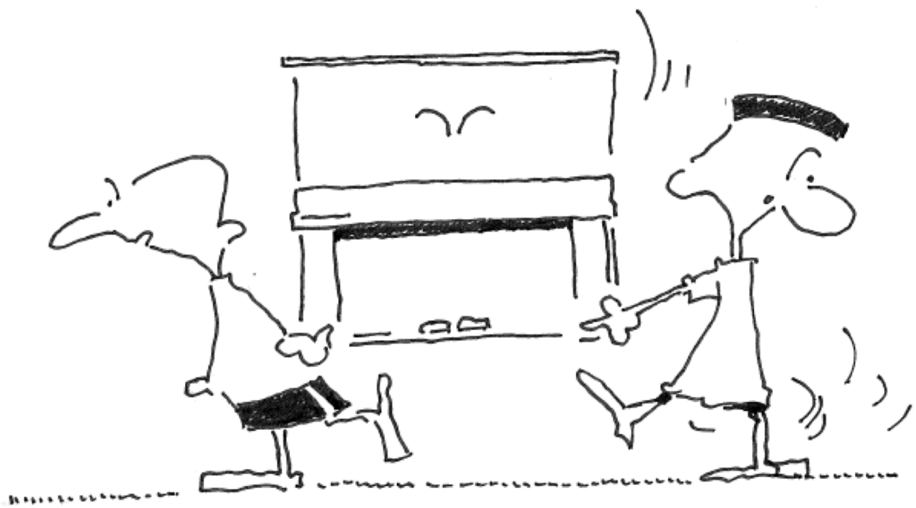
$$W_{mg} = m\vec{\mathbf{g}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}} = mgh > 0$$



$y \uparrow$ $x \rightarrow$

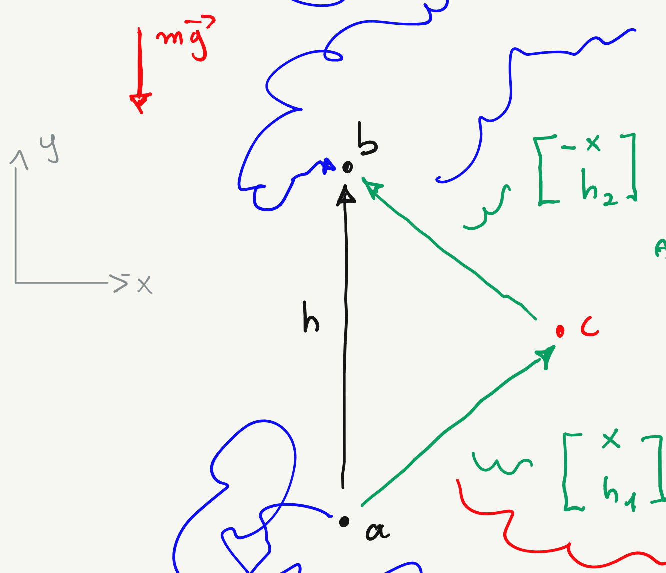
L'ouvrier fait un travail négatif !

Ces ouvriers
ne travaillent pas !



$\boxed{2}$

EN GENERAL !



$$W_{\substack{mg \\ c \to b}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -x \\ h_2 \end{bmatrix}}_{-mgh_2}$$

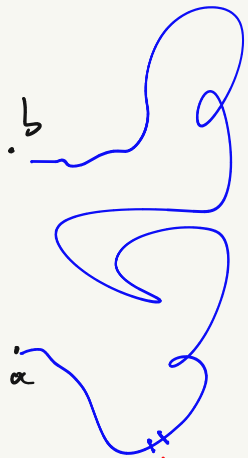
$$W_{\substack{mg \\ a \to b}} = W_{\substack{mg \\ a \to c}} + W_{\substack{mg \\ c \to b}}$$

AVEC $h_1 + h_2 = h$

$$W_{\substack{mg \\ a \to c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ h_1 \end{bmatrix}}_{-mgh_1}$$

$$W_{\substack{mg \\ a \to b}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix}}_{-mgh}$$

EN GENERAL :-)



$d\vec{x} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$

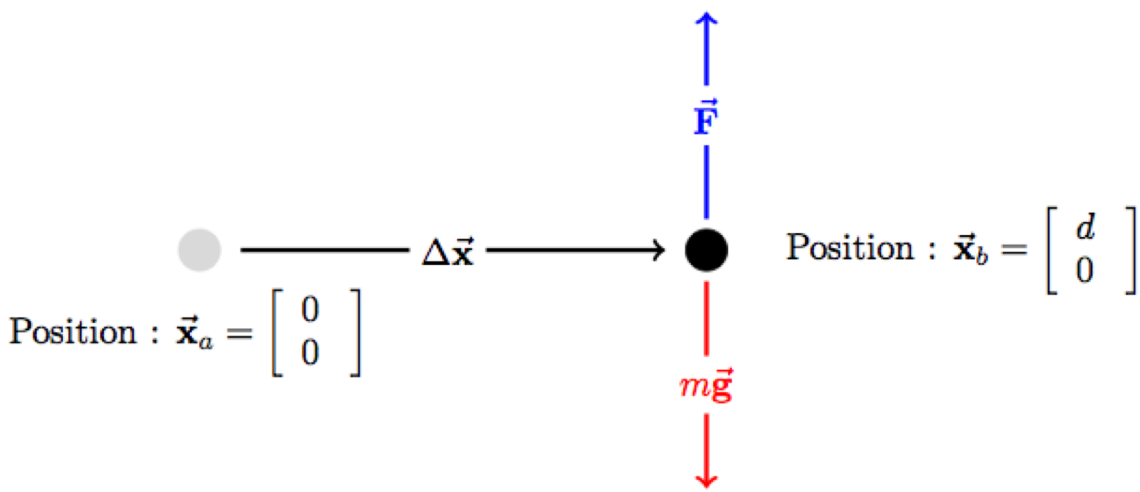
$$\boxed{W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{x}}$$

$\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$ $\qquad d\vec{x} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$

$$= -mg \underbrace{\int_a^b dx}_{[x]_a^b} \qquad [x]_a^b = \underbrace{x_b - x_a}_{\Delta x}$$

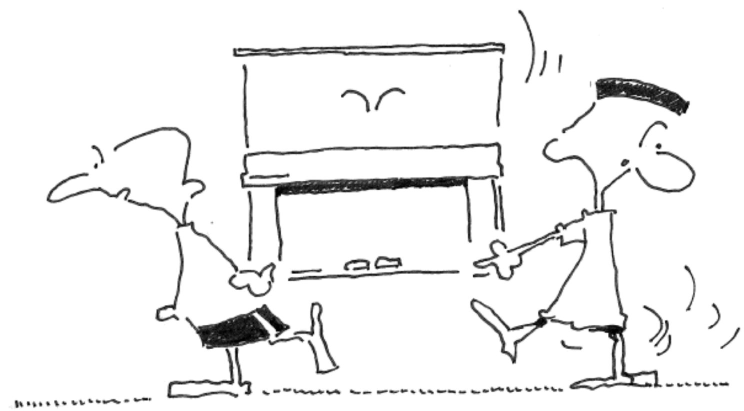
$$W = \vec{F} \cdot \underbrace{\int_a^b d\vec{x}}_{\Delta \vec{x} = \vec{d}}$$

Ces ouvriers ne travaillent pas !



$$W_{mg} = m\vec{\mathbf{g}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}} = 0$$

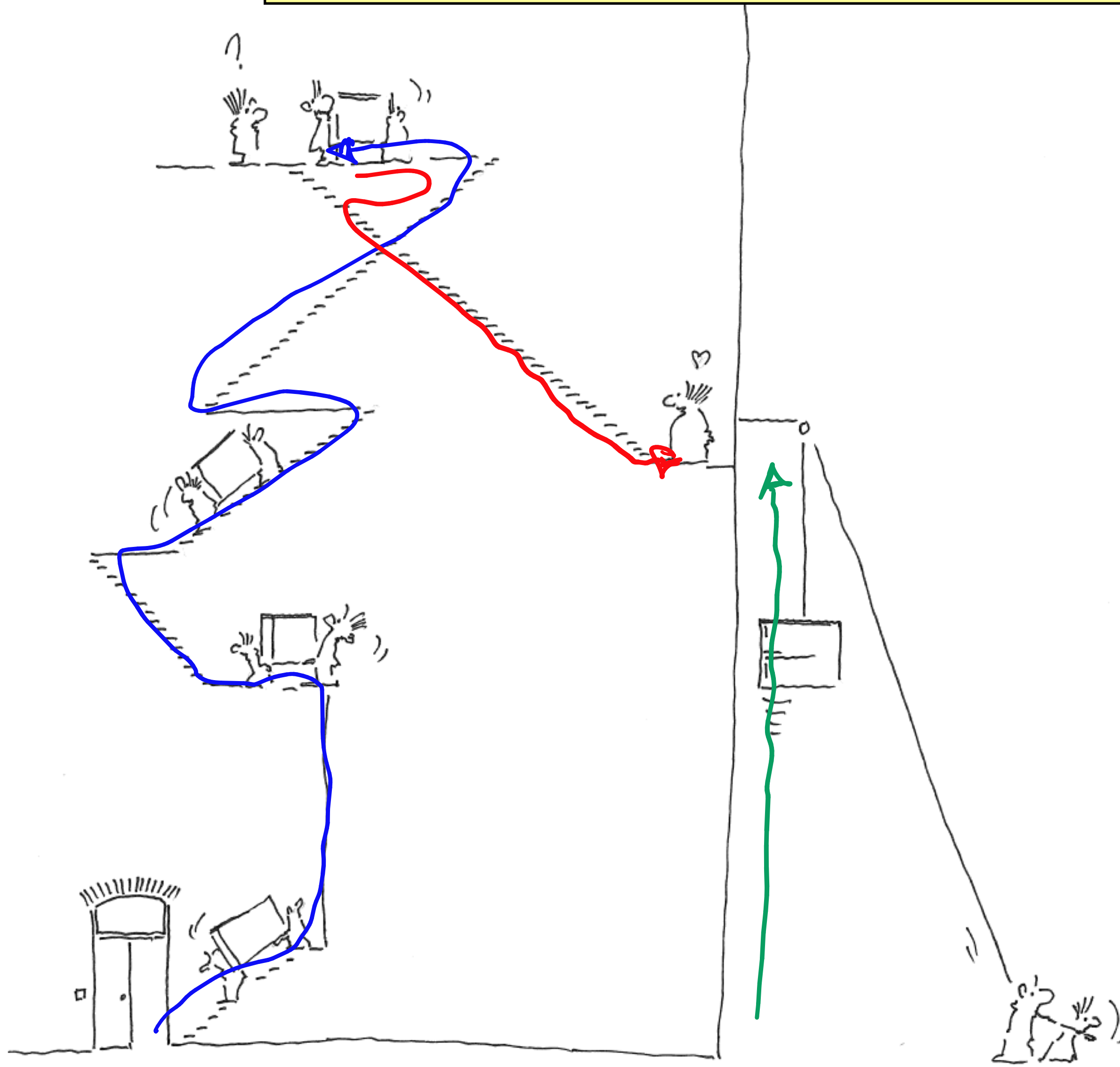
$$W_F = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}} = 0$$



On peut donc être fatigués, sans travailler !

Quel est le chemin pour faire le moins de travail possible ?

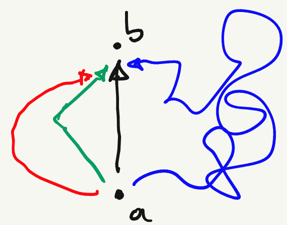
Le travail de la force de gravité ne dépend que des positions finale et initale !
La gravité est une force conservative !



GRAVITE

FORCE
CONSTANTE

LE TRAVAIL
EST INDEPENDANT
DU CHEMIN
PARCOURU



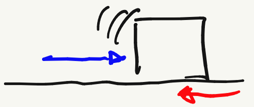
FORCES
CONSERVATIVES

FROTTEMENT

FORCE
NON
CONSTANTE

(EN GENERAL :-)

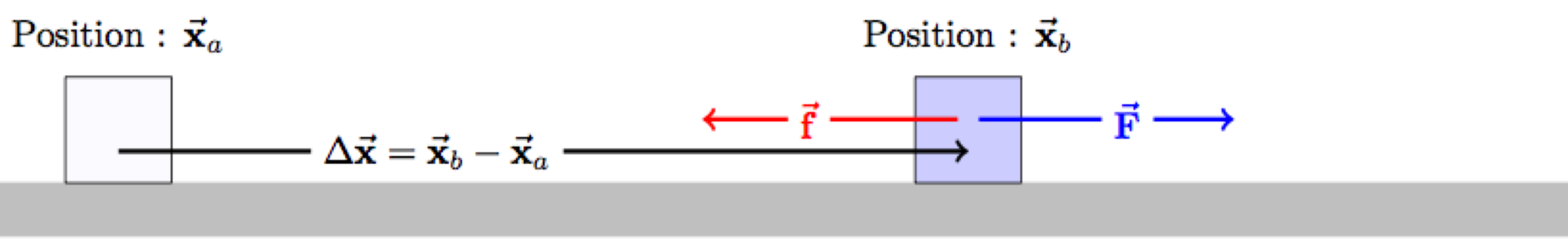
LE TRAVAIL
DEPEND
DU CHEMIN
PARCOURU



FORCES
NON
CONSERVATIVES

Le travail du frottement avec une surface immobile est toujours négatif

Le travail du frottement dépend du trajet parcouru : il faut donc prendre le chemin le plus court pour le minimiser !
Le frottement est une force non-conservative !



3

THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

QUANTITE DE MOUVEMENT

$$\frac{d}{dt}\big(\underbrace{m\vec{v}}_{\text{quantité de mouvement}}\big) = \sum \vec{F}$$

FORCES

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v})\cdot\vec{v} = \sum \vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{mv^2}{2}}_{\text{énergie cinétique}}\Big) = \sum \underbrace{\vec{F}\cdot\vec{v}}_{\text{puissance des forces}}$$

PUISSANCES

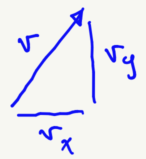
ENERGIE CINETIQUE

[Joule]

$$\Big[\underbrace{kg\,\frac{m}{s^2}}_{N}\;m\Big]$$

PUISSANCE DES FORCES

$$\Big[N\,\frac{m}{s}\Big] = \underbrace{[\text{Joule}/s]}_{[\text{Watt}]}$$



$$\underbrace{v^2}_{v_x^2+v_y^2} = \underbrace{\vec v \cdot \vec v}_{\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \,=\, v_x^2 + v_y^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{v_x^2}{2}\right)}_{\cancel{\frac{1}{2}\,2}\, v_x \frac{dv_x}{dt}} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{v_y^2}{2}\right)}_{\cancel{\frac{1}{2}\,2}\, v_y \frac{dv_y}{dt}}$$

$$= \vec v \cdot \frac{d\vec v}{dt}$$

QUANTITE DE MOUVEMENT

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\underbrace{m\vec v}) = \sum \vec F}$$

FORCES

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(m\vec v)\cdot\vec v}_{} = \sum \vec F \cdot \vec v$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{m v^2}{2}}_{\text{ENERGIE CINETIQUE}}\right) = \underbrace{\sum \vec F \cdot \vec v}_{\text{PUISSANCE DES FORCES}}}$$

PUISSANCES

$$\left(f^2(x)\right)' = 2 f(x) f'(x)$$

CHAIN RULE :-)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

PUISSANCES

$$\underbrace{\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) dt}_{} = \sum \underbrace{\int_a^b \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt}_{}$$

SUPPOSONS QUE $\vec{F}$ SOIT CONSTANT :-)

$$= \left[\frac{mv^2}{2}\right]_a^b$$

$$= \left[\frac{mv^2}{2}\right]_b - \left[\frac{mv^2}{2}\right]_a$$

$$= \Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

$$\sum \vec{F} \cdot \underbrace{\int_a^b \frac{d\vec{x}}{\cancel{dt}}\, \cancel{dt}}_{}$$

$$[\vec{x}]_a^b = [\vec{x}_b - \vec{x}_a] = \Delta\vec{x}$$

$$\boxed{\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum \vec{F} \cdot \Delta\vec{x}}$$

TRAVAUX

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right)\cdot\vec{\mathbf{v}} = \boxed{\text{Puissance des forces} \quad \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

$\downarrow$ En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right)\,dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\,dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}\,dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{x}}$$

$\downarrow$ En supposant que les forces sont constantes.

!!!

$$\left[\tfrac{1}{2}m\,v^2\right]_b - \left[\tfrac{1}{2}m\,v^2\right]_a = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\left(\vec{\mathbf{x}}_b - \vec{\mathbf{x}}_a\right)$$

$$\Delta\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right) = \boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}} \quad \text{Travail des forces}}$$

Bilan d’énergie cinétique

$\boxed{4}$

L'ENERGIE C'EST FACILE !

$$\boxed{\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum \vec{F} \cdot \Delta\vec{x}}$$

JET D'UN CAILLOU

$\boxed{h\ ?}$

$mg \downarrow$

• b $\boxed{v_b = 0}$

h

• a $\uparrow \boxed{v_a = v}$

ETAT a	ETAT b
$\frac{1}{2}mv^2$	0

$$\underbrace{\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}_{0 - \frac{mv^2}{2}} = \underbrace{\sum \vec{F} \cdot \Delta\vec{x}}_{-mgh}$$

$$\boxed{h = \frac{v^2}{2g}}$$

CHUTE LIBRE

$\boxed{v\ ?}$

• a $\boxed{v_a = 0}$

$\downarrow mg$

h

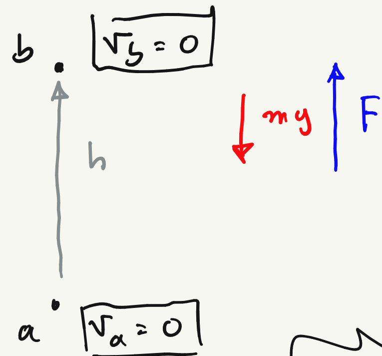
• b $\boxed{v_b = v}$

$$\underbrace{\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}_{\frac{mv^2}{2} - 0} = \underbrace{\sum \vec{F} \cdot \Delta\vec{x}}_{mgh}$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

JE SOULEVE
MON SAC

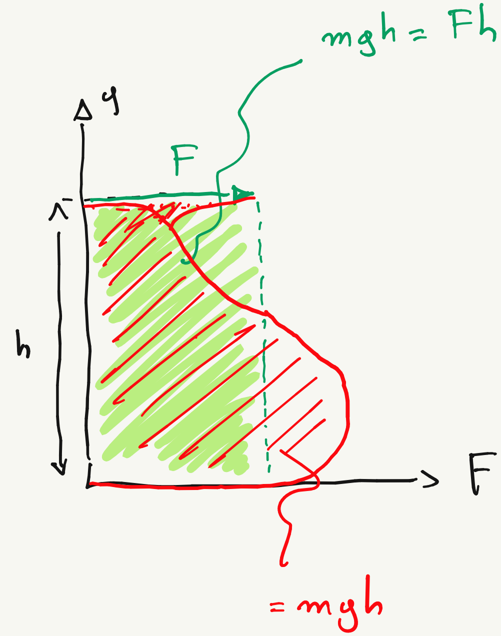
$\boxed{F\ ?}$



$\boxed{F = mg}$

$$\underbrace{\Delta\left(\frac{1}{2} m v^2\right)}_{=0} = \underbrace{\sum \vec{F} \cdot \Delta\vec{x}}_{W_F + W_{mg}}$$

$$\underbrace{W_F}_{Fh} + \underbrace{W_{mg}}_{-mgh}$$



$$\boxed{\begin{aligned} y(0) &= h \\ v(0) &= 0 \\ a(0) &= -g \end{aligned}}$$

$$y(t) = h - g\frac{t^2}{2}$$

En imposant que $y(t_c) = 0$

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(t_c) &= 0 \\ v(t_c) &= -gt_c = -\sqrt{2hg} \\ a(t_c) &= -g \end{aligned}}$$

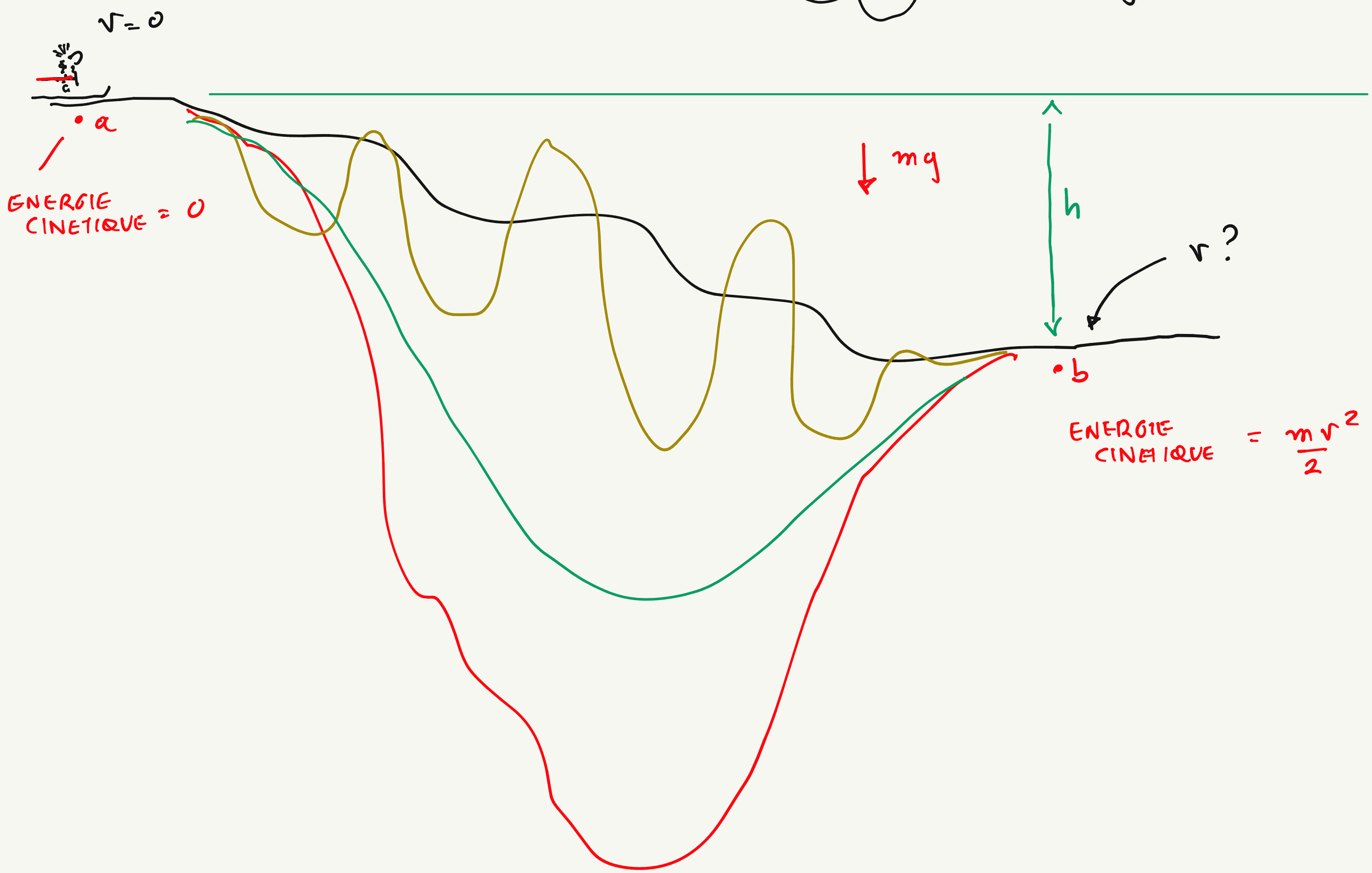
Chute libre

Calcul du temps de chute libre !
Ce temps est indépendant de la masse !

LE SKIEUR !

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgh$$

$$v = \sqrt{2gh}$$



$$\begin{aligned} y(t_a) &= h \\ v(t_a) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) &= mgh \\ \tfrac{1}{2}mv_b^2 - \underbrace{\frac{1}{2}mv_a^2}_{=0} &= mgh \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

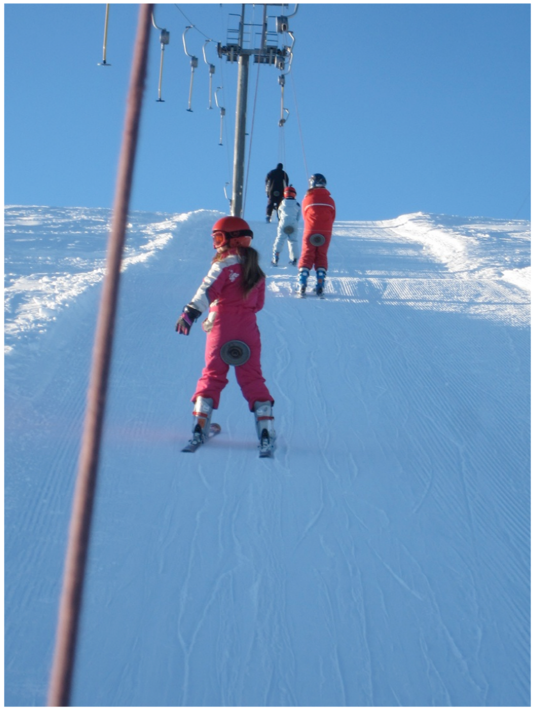
$$\color{red}{v_b^2} = 2gh$$

$$\begin{aligned} y(t_b) &= 0 \\ v(t_b) &= \color{red}{-\sqrt{2hg}} \end{aligned}$$

Chute libre

Il n'est plus nécessaire de calculer le temps de la chute libre…

Quelle est
l'accélération
du skieur si
il lâche
la perche ?



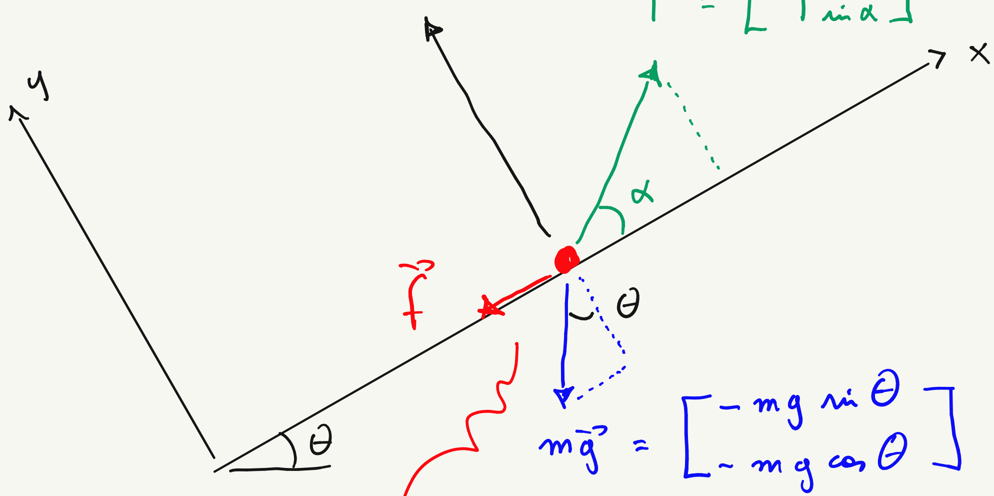
5

SKIEUR TRACTÉ

$$\sum F_x = 0$$

$$\vec N = \begin{bmatrix} 0 \\ mg\cos\theta - T\sin\alpha \end{bmatrix}$$

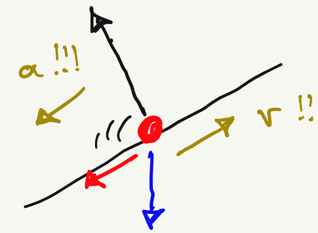
$$\vec T = \begin{bmatrix} T\cos\alpha \\ T\sin\alpha \end{bmatrix}$$



$$m\vec g = \begin{bmatrix} -mg\sin\theta \\ -mg\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec f = \begin{bmatrix} -\mu_c(mg\cos\theta - T\sin\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}$$

SI JE LACHE LA PERCHE !



$$ma = mg\sin\theta + \mu_c mg\cos\theta$$

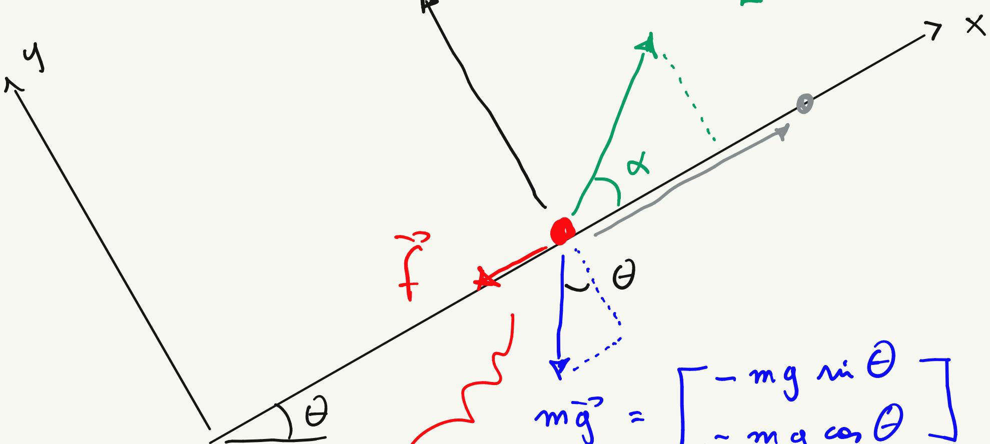
$$T\cos\alpha - mg\sin\theta - \mu_c(mg\cos\theta - T\sin\alpha) = 0$$

$$\mu_c = \frac{T\cos\alpha - mg\sin\theta}{mg\cos\theta - T\sin\alpha}$$

$\boxed{6}$

SKIEUR TRACTÉ

$$\sum W = 0$$



$$\vec{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ mg\cos\theta - T\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} T\cos\alpha \\ T\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$m\vec{g} = \begin{bmatrix} -mg\sin\theta \\ -mg\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} -\mu_c(mg\cos\theta - T\sin\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W_T = d\,T\cos\alpha$$

$$W_N = 0$$

$$W_f = -d\mu_c(\dots)$$

$$W_{mg} = -d\,mg\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \boxed{\begin{array}{l}\text{Forces}\\ \sum \vec{\mathbf{F}}\end{array}}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right)\,dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\,dt$$

En supposant que les forces sont constantes.

$$\left[m\,\vec{\mathbf{v}}\right]_b - \left[m\,\vec{\mathbf{v}}\right]_a = \sum \vec{\mathbf{F}}\,(t_b - t_a)$$

$$\Delta\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \boxed{\begin{array}{l}\sum \vec{\mathbf{F}}\,\Delta t\\ \text{Impulsions}\end{array}}$$

Bilan de la quantité de mouvement

Quelle est
l'impulsion
soumise
à la balle ?

7

IMPULSION DONNEE A UNE BALLE

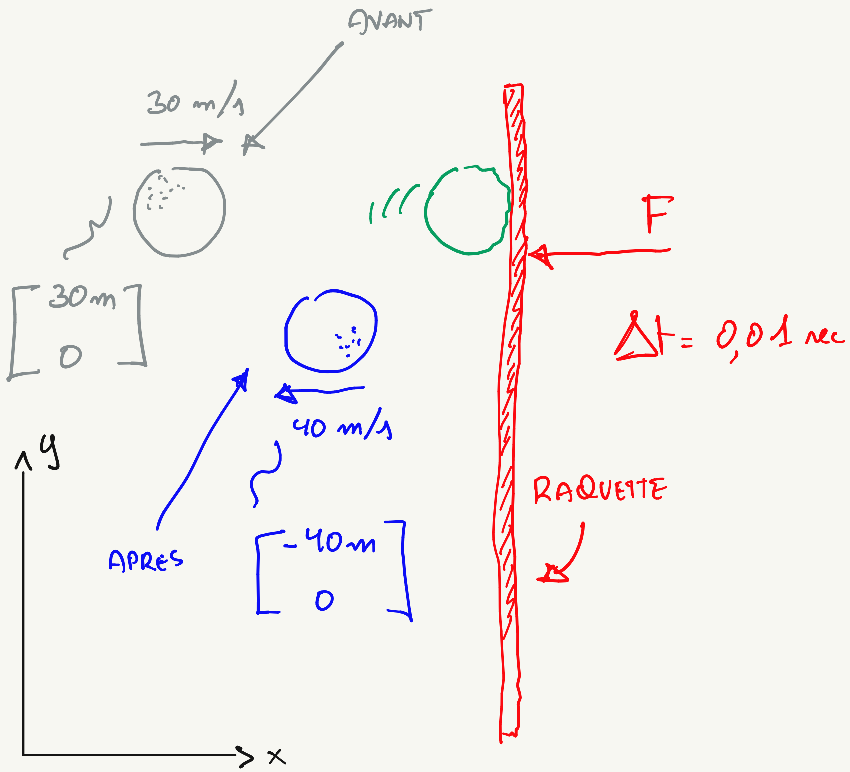
0,15 kg

0.01 sec

$$\underbrace{\Delta m \vec{v}}_{-70 \times 0.15 \ \frac{kg\,m}{s}} = \vec{F} \cdot \Delta T$$

$$F = \begin{bmatrix} -0{,}15 \times 70 / 0.01 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{F = 150 \times 70 = 1050 \text{ N} \quad :-)}$$



- Une force dont le point d'application se déplace effectue un travail.
- Le travail effectué par la gravité dépend uniquement des positions initiale et finale et non du trajet parcouru.
  La force de gravité est une force conservative.
- Le travail effectué par le frottement sur une surface immobile est toujours négatif et dépend du trajet parcouru.
  Le frottement est une force non conservative.

FORCES

$$\frac{d}{dt}\left(\overbrace{m\,\vec{\mathbf{v}}}^{\text{QUANTITE DE MVT}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\tfrac{1}{2}m\,v^2}_{\text{ENERGIE CINETIQUE}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

PUISSANCES

Lorsque les forces sont constantes,

IMPULSIONS

$$\Delta\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t$$

$$\Delta\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}$$

TRAVAUX

Ne pas oublier !