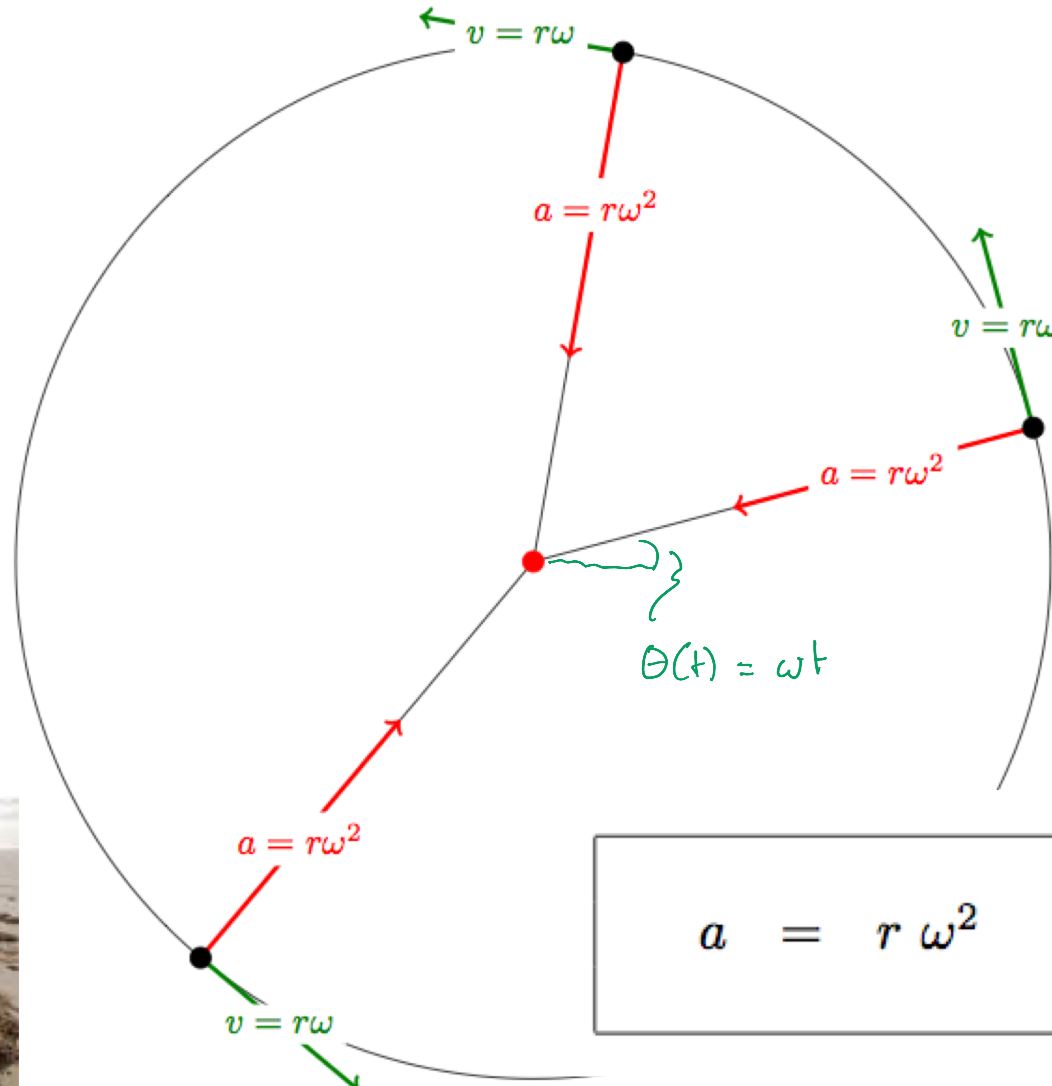
Mouvement circulaire uniforme

VITESSE ANGULAIRE

$$v = r\,\omega$$

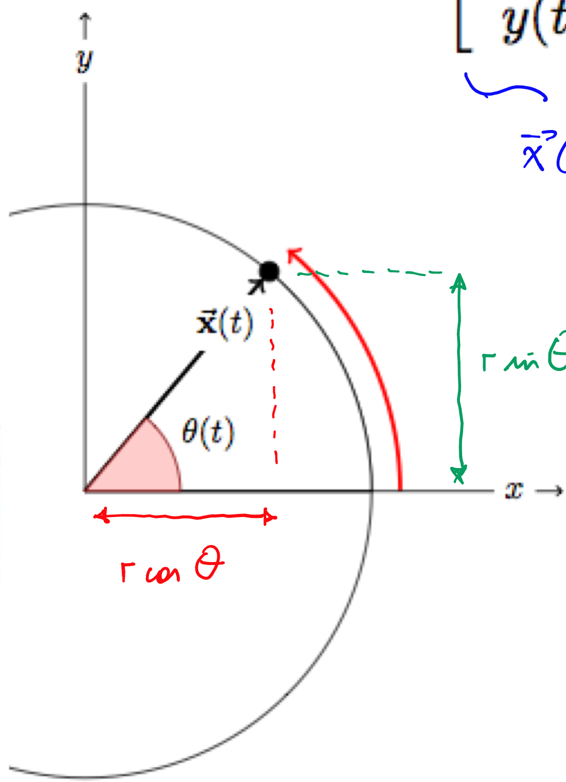


$$a = r\,\omega^2$$

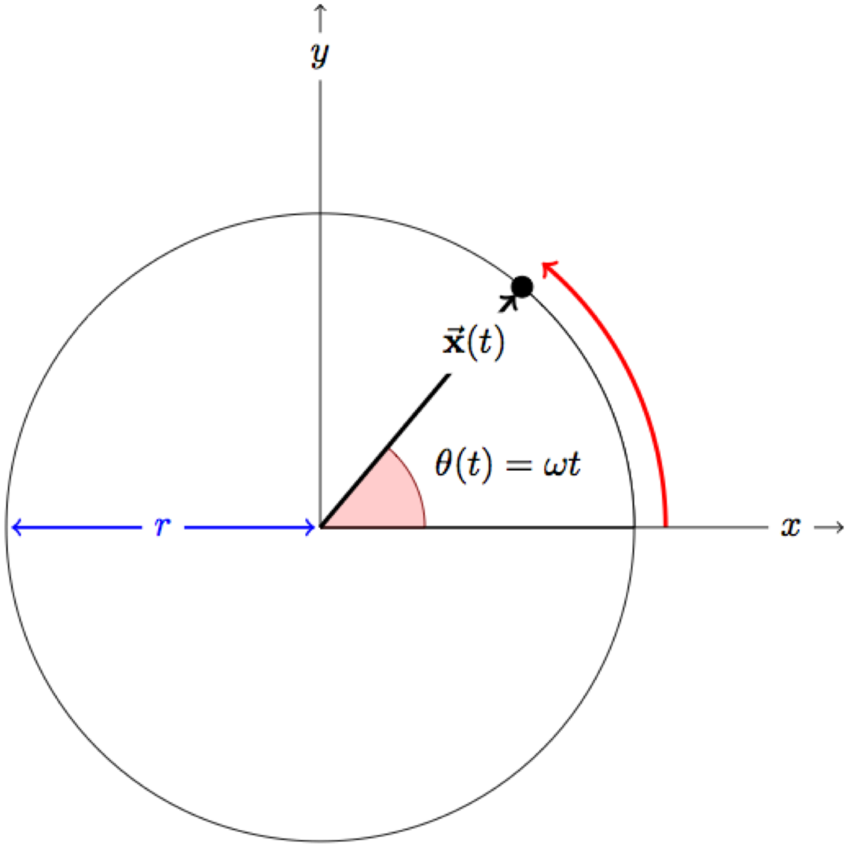
Vitesse angulaire constante : ω
Vitesse tangentielle
Accélération centripète

Le mouvement circulaire est harmonique

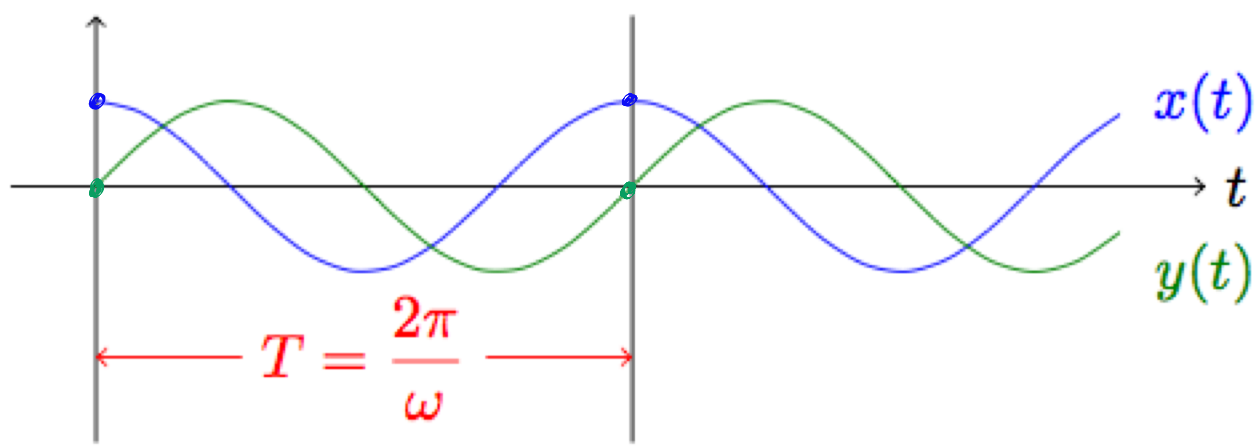
$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}}_{\vec{x}(t)} = \begin{bmatrix} \overbrace{r\cos(\theta(t))}^{x_x(t)} \\ \underbrace{r\sin(\theta(t))}_{x_y(t)} \end{bmatrix}$$

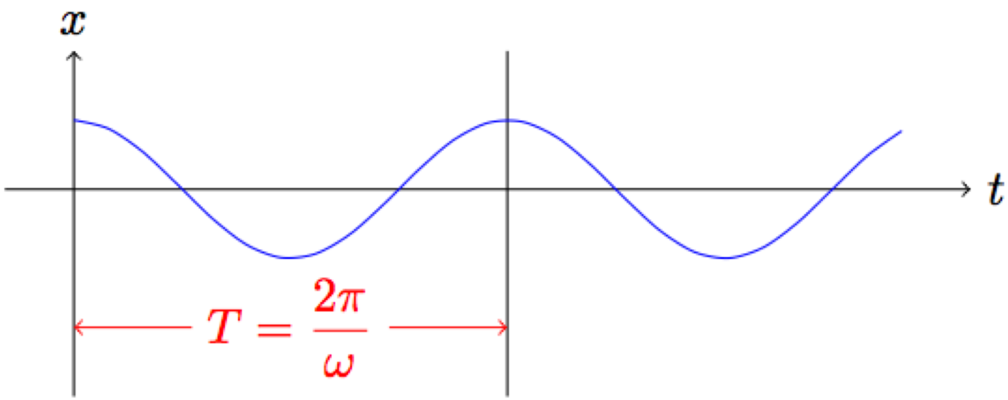


Le retour du cos et du sin



$$
\begin{aligned}
x(t) &= r \cos\left(\omega\, t \right) \\
y(t) &= r \sin\left(\omega\, t \right)
\end{aligned}
$$





$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

[rad/s]

[rad]

[1/s]

$$v = r\,\omega$$

Période : T

Fréquence : f

Vitessse angulaire : ω

Accélération centripète

$\vec{x} \cdot \vec{v} = 0$

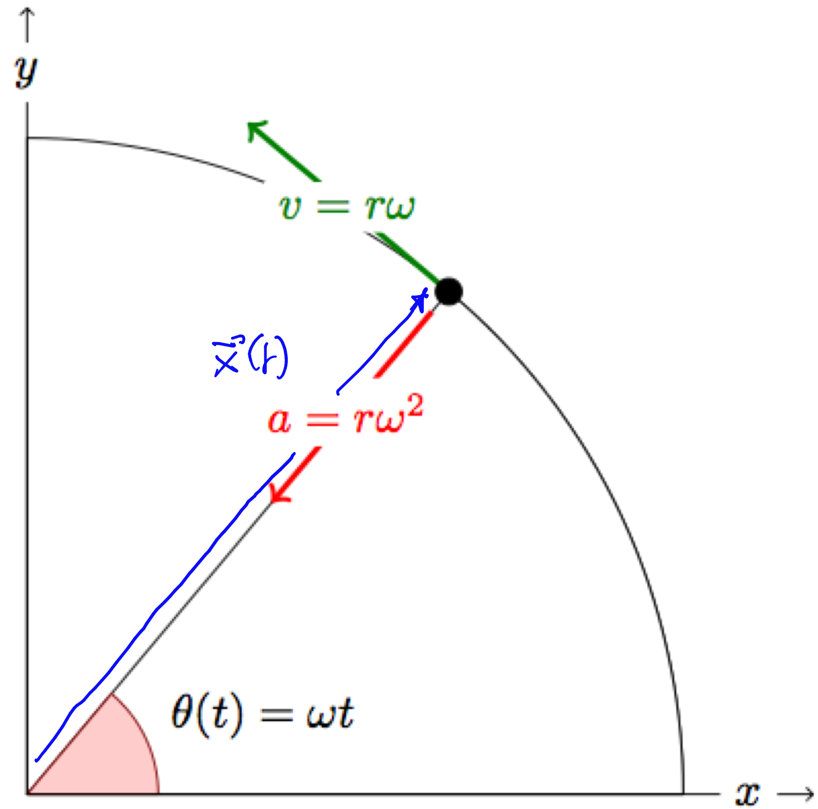
$r \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} \cdot r\omega \begin{bmatrix} -\sin \\ \cos \end{bmatrix} = 0$

VECTEUR DE LONGUEUR 1 !

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = r\omega \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = r\omega^2 \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$



$(\cos(\omega t))' = -\omega \sin(\omega t)$

Vitesse tangentielle

1

ASPIRATEUR

600 TOURS/MINUTE

$R = 0{,}1\ m$

$f = 10\ [1/s]$

$\omega = 2\pi f = 62{,}8\ [1/s]$

$v = R\omega = 6{,}28\ [m/s]$

$a = R\omega^2 = \underbrace{0{,}1 \times 3600}$

$\pm 400\ [m/s^2]$

IT IS BIG !

$g = 9{,}81\ m/s^2$

Aspirateur
600 tours/minute
R = 10 cm

$$f = 10 \text{ Hertz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 0.1 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 62.8 \text{ rad/s}$$

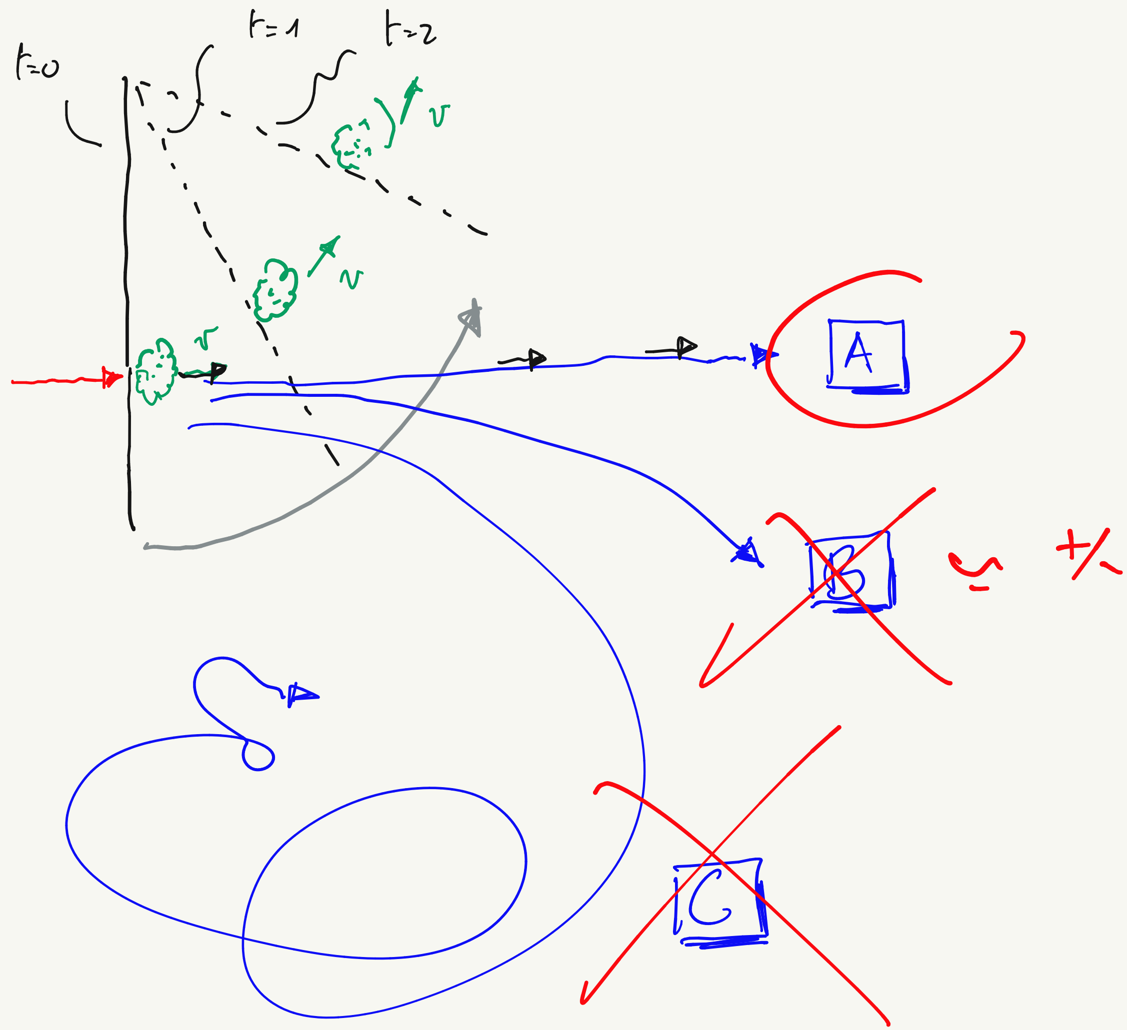
$$v = r\,\omega = 6.28 \text{ m/s}$$

$$a = r\,\omega^2 = 394.4 \text{ m/s}^2$$

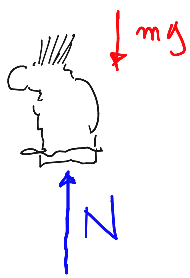
C'est quarante fois
la valeur de l'accélération de la gravité !
C'est une valeur très élevée !

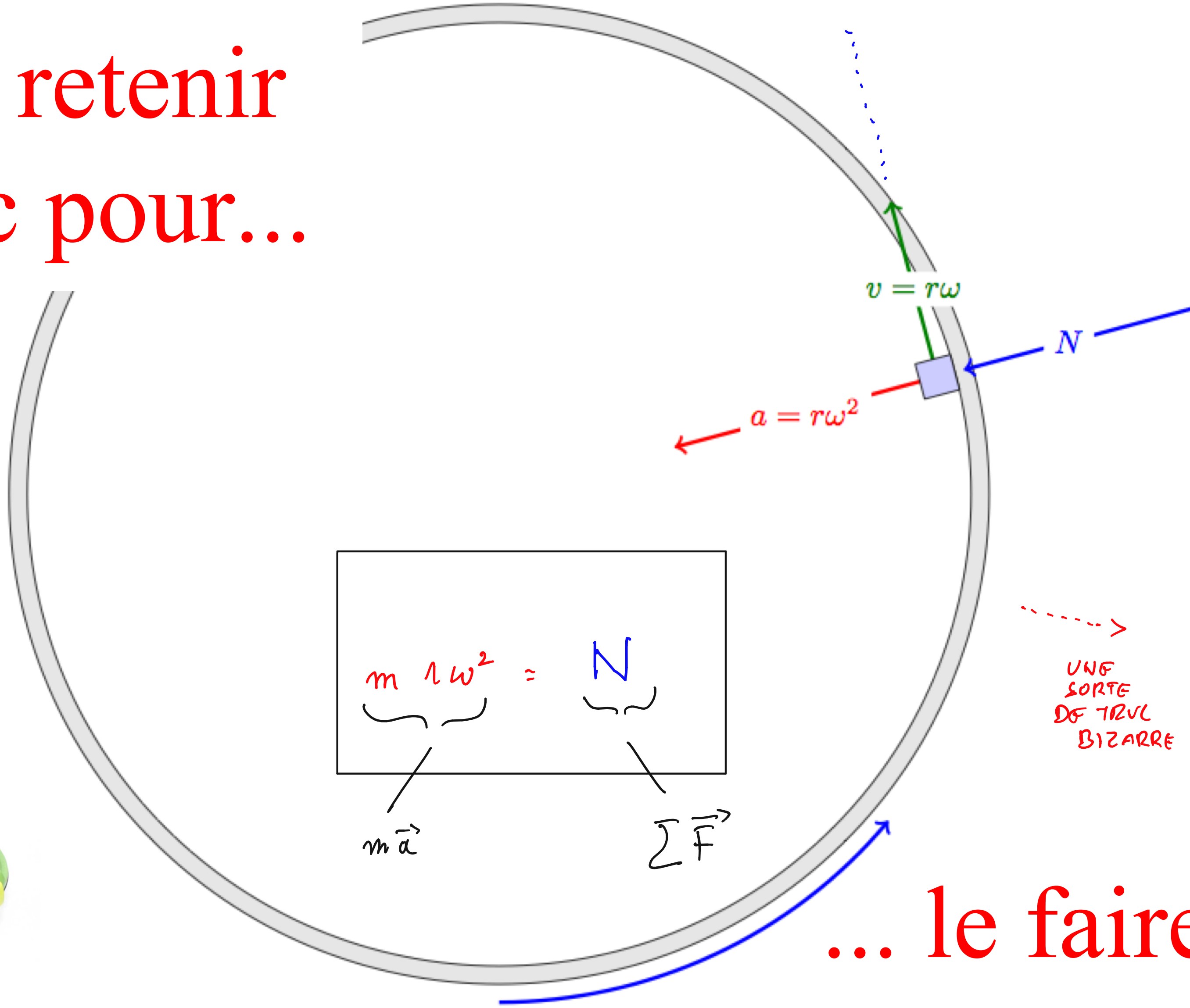
2

ESSOREUSE A SALADE



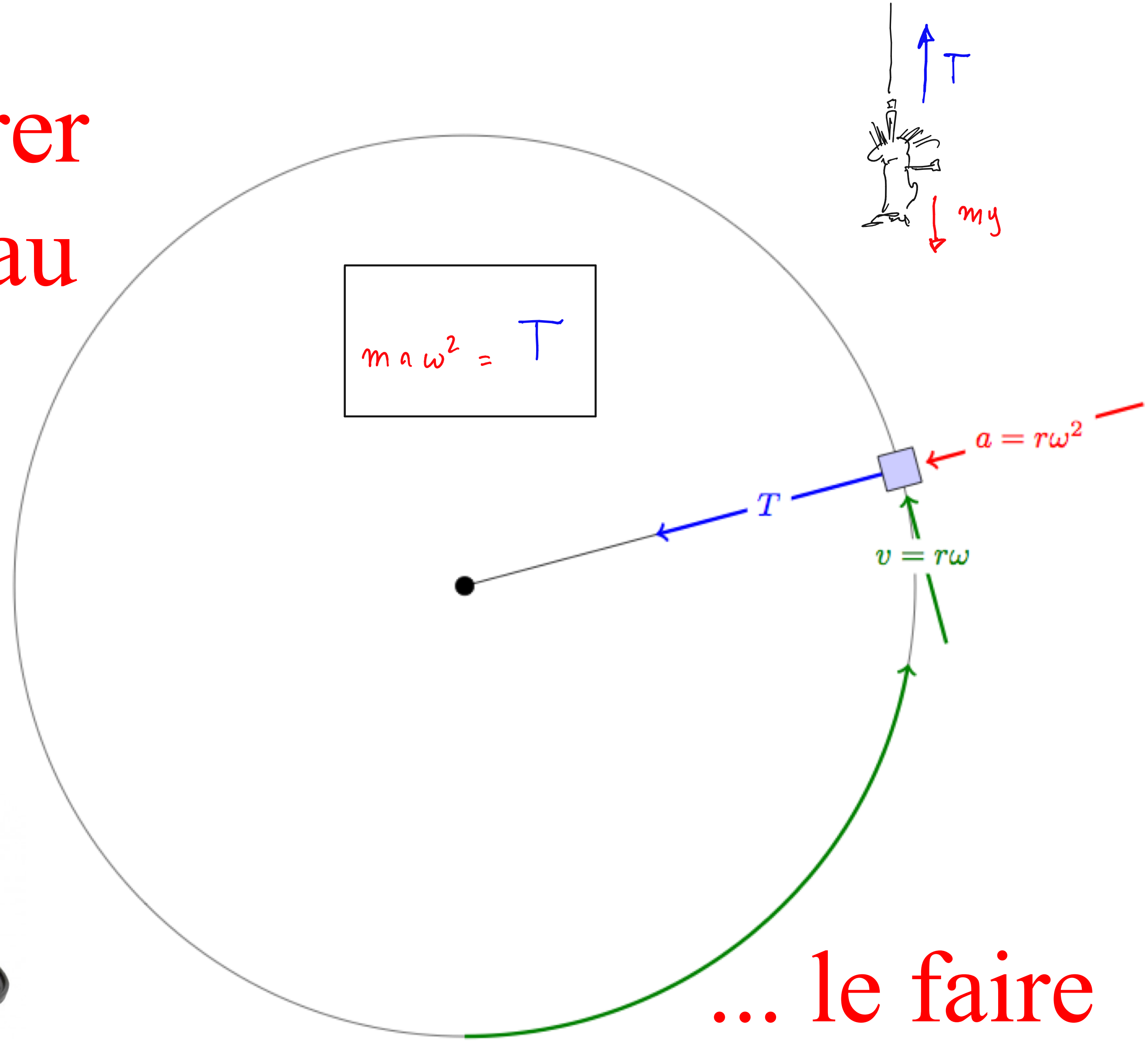
Il faut retenir le bloc pour...





... le faire tourner !

Il faut tirer sur le seau pour...



... le faire tourner !

$\boxed{3}$

$\boxed{\text{MACHINE A LAVER}}$

3600 TOURS / MINUTE

$R = 0{,}15\ m$

$f = 60\ [1/s]$

$\omega = 2\pi f = 380\ [1/s]$

$v = \omega R = \pm 50\ m/s$

$a = \omega^2 R = \begin{array}{r} 16000\cancel{0} \\ \underline{8000\cancel{0}} \\ 24000\ m/s^2 \end{array}$

$g = 10\ m/s^2$

$24\,000\ m/s^2$

Machine à laver
3600 tours/minute
R = 15 cm

$$f = 60 \text{ Hertz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 0.017 \text{ s}$$

$$\omega = 2\pi f = 377 \text{ rad/s}$$

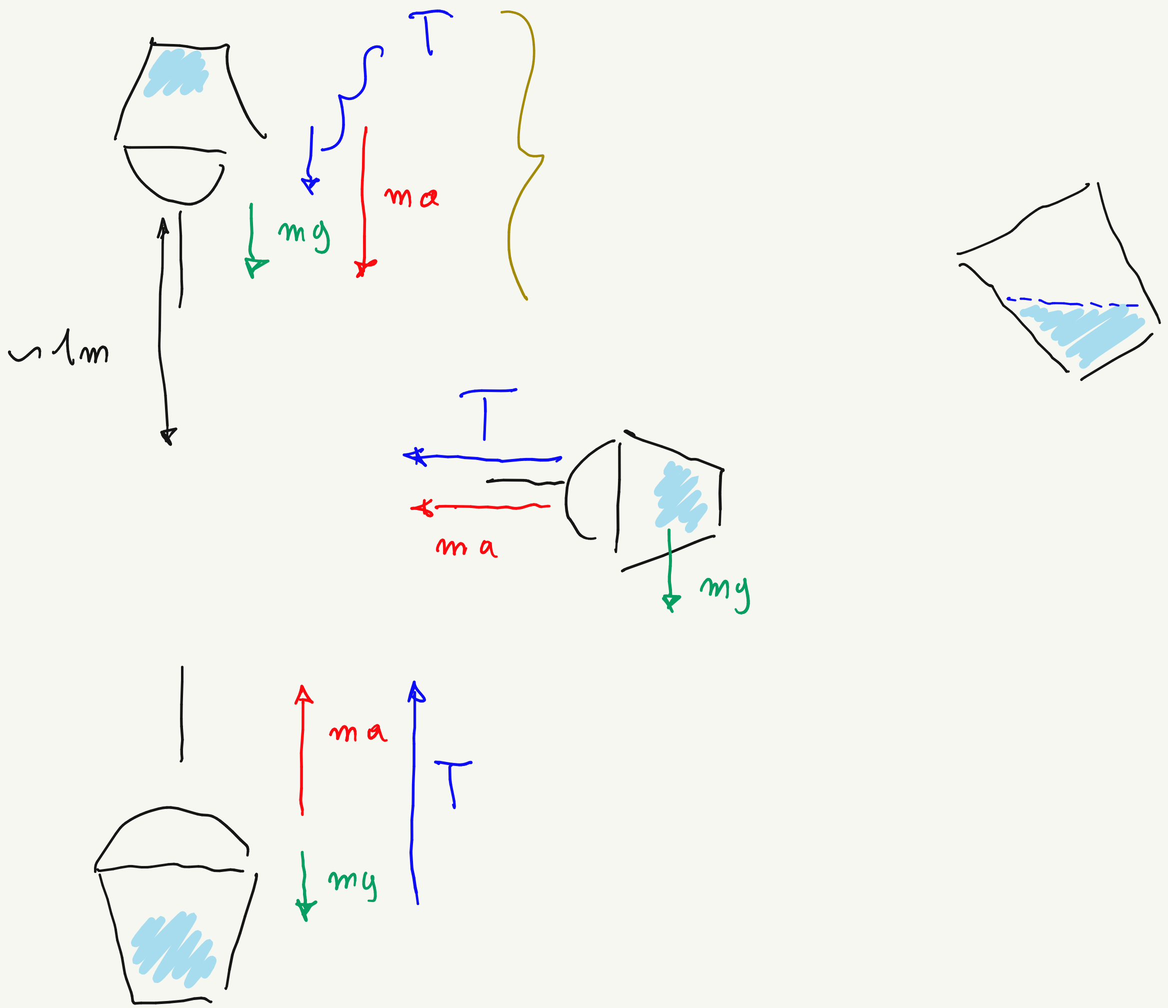
$$v = r\,\omega = 56.5 \text{ m/s}$$

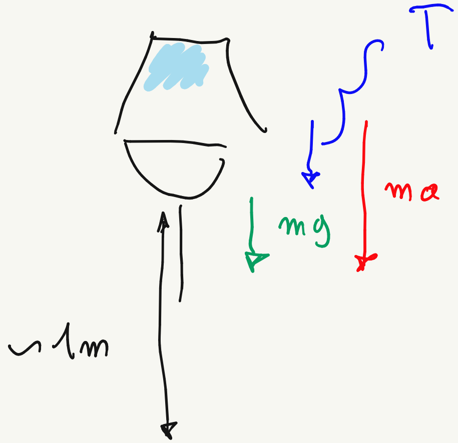
$$a = r\,\omega^2 = 21318 \text{ m/s}^2$$

C'est deux mille fois
la valeur de l'accélération de la gravité !
C'est une valeur vraiment très très élevée !

4

EXPERIENCE DU SAUT





$$T + mg = ma$$

L'EAU VA TOMBER

$$\underbrace{r\,\omega^2}_{\frac{v^2}{r}} < g$$

ACCELERATION CENTRIPETE

$r = 1$

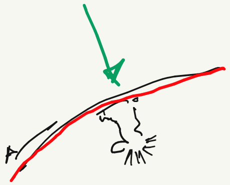
$$\omega < \sqrt{g}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

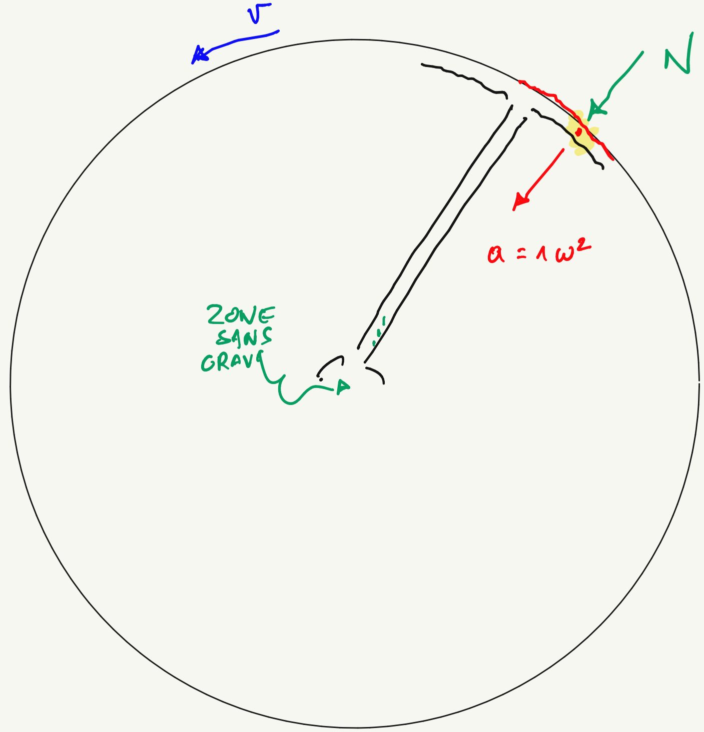
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \simeq 2\,\text{sec}$$

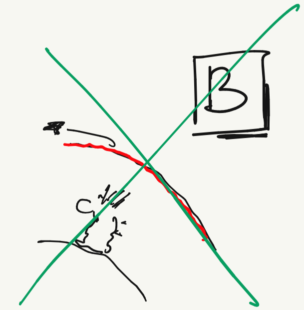
$\boxed{5}$

STATION SPATIALE



OK :-)





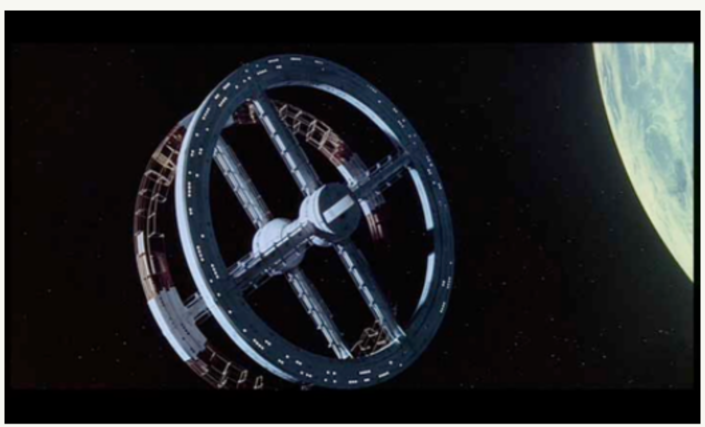
$\boxed{A}$

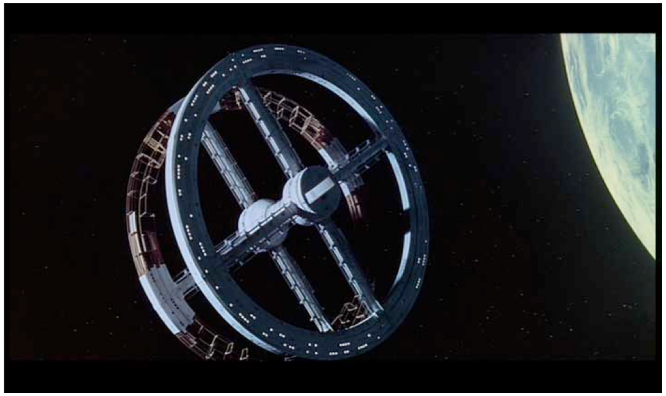
$$\underbrace{R}_{100\,m}\,\omega^2 = \overbrace{g}^{10\ :-)}$$

$$\omega = \sqrt{0{,}1} = 0{,}3$$

$$v = 30\ m/s$$

$$T = 2\pi/\omega = 20\ sec$$





Station spatiale
3 tours/minute
R = 100 m

$$a = r\,\omega^2 = 10 \text{ m/s}^2$$

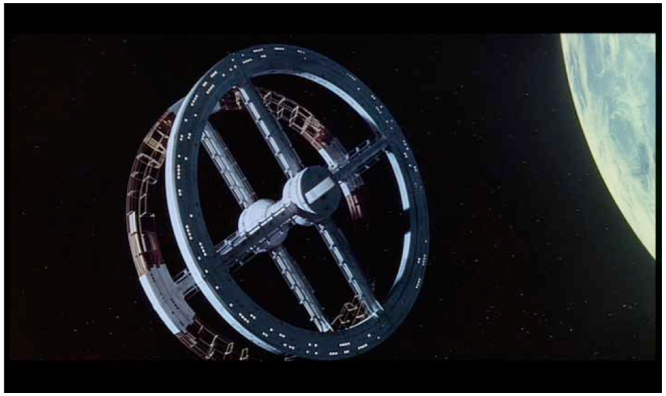
$$\omega^2 = 0.1 \text{ (rad/s)}^2 \qquad \omega = 0.3 \text{ rad/s}$$

$$v = r\,\omega = 30 \text{ m/s}$$

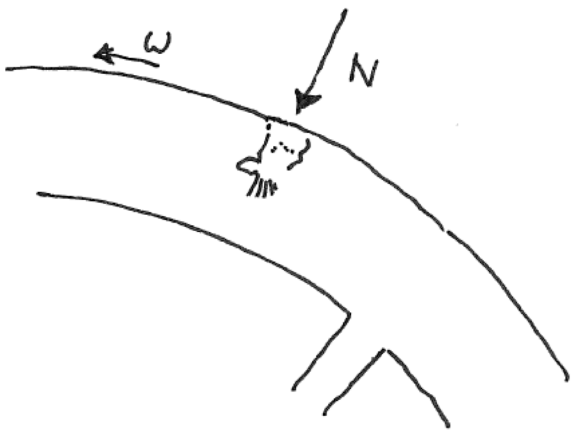
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0.05 \text{ Hertz}$$

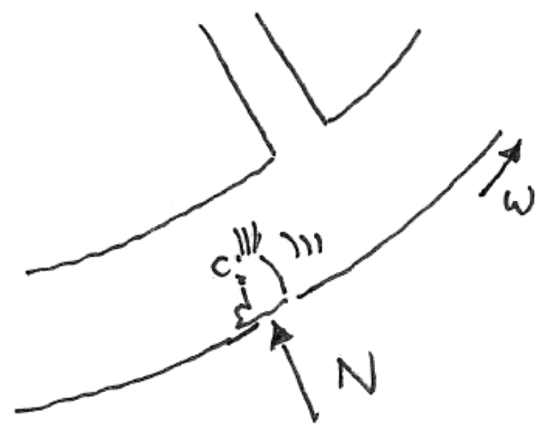
$$T = \frac{1}{f} = 20 \text{ s}$$

On fait tourner la station spatiale pour obtenir une gravité artificielle !



Station spatiale
3 tours/minute
R = 100 m





On fait tourner la station spatiale pour obtenir une gravité artificielle !

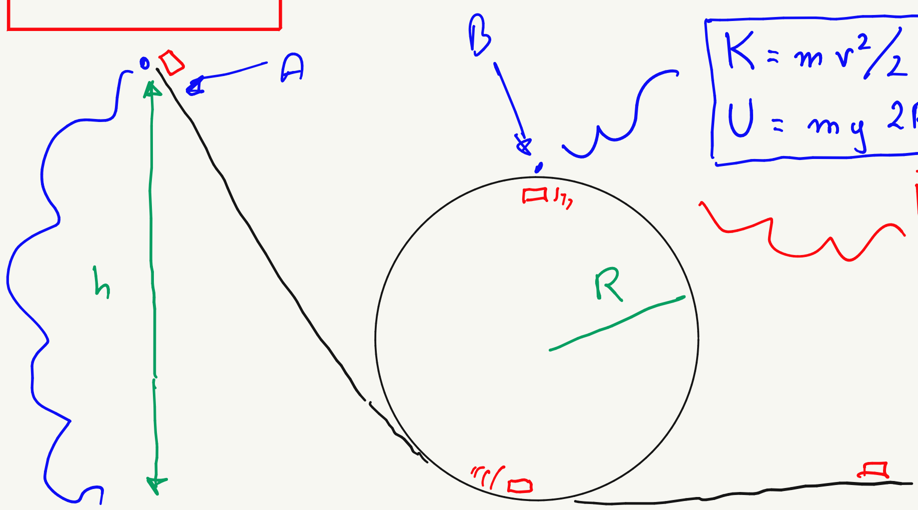
6

EXERCICE CLASSIQUE

PAS DE FROTTEMENT

$v = \omega R$

$a = \omega^2 R = \dfrac{\omega^2 R^2}{R} = \dfrac{v^2}{R}$



$K = m v^2/2$

$U = m g\, 2R$

L'ACCELERATION CENTRIPETE DOIT ETRE SUPERIEUR À g

$$\boxed{\frac{v^2}{R} \geq g}$$

$K = 0$

$U = mgh$

$$\boxed{mgh = \frac{m v^2}{2} + m g 2R}$$

$$\cancel{m} v^2 = 2 \cancel{m} g h - 4 \cancel{m} g R$$

$$v^2 = g(2h - 4R)$$

$[m^2/s^2]$ $\quad$ $[m/s^2][m]$

$$\frac{\cancel{g}(2h - 4R)}{R} \geq \cancel{g}$$

$$2h - 4R \geq R$$

$$2h \geq 5R$$

$$\boxed{h \geq \frac{5R}{2}}$$

Le MRUA :-)

$$
\begin{aligned}
y''(t) &= a \\
y'(t) &= \overbrace{v_0 + a\ t}^{v(t)} \\
y(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{a\ t^2}{2}
\end{aligned}
$$

Des millions de gens ont vu tomber une pomme,
Newton est le seul qui se soit demandé pourquoi...
(Bernard Baruch)

Le MCUA :-)

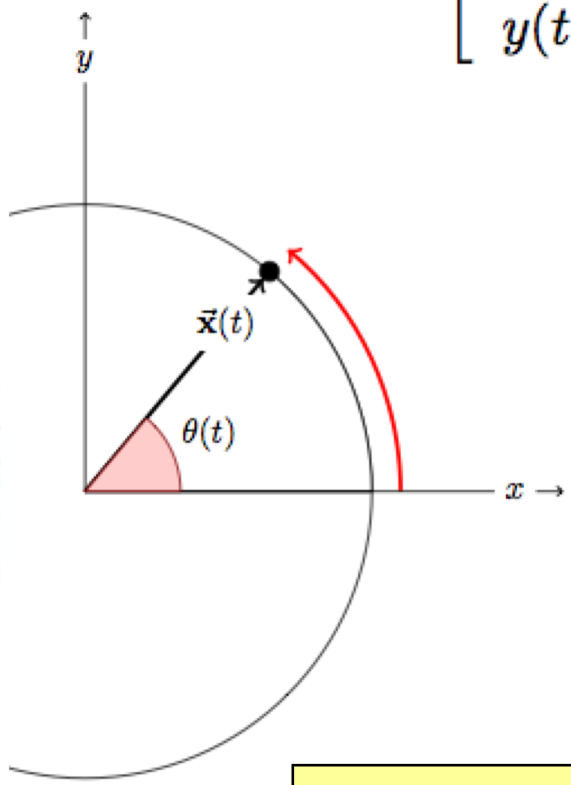
$$\begin{aligned}
\theta''(t) &= \alpha \\
\theta'(t) &= \overbrace{\omega_0 + \alpha\, t}^{\omega(t)} \\
\theta(t) &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha\, t^2}{2}
\end{aligned}$$

Maintenant, faisons strictement et exactement la même chose avec un mouvement circulaire !

Définissons le MCUA !

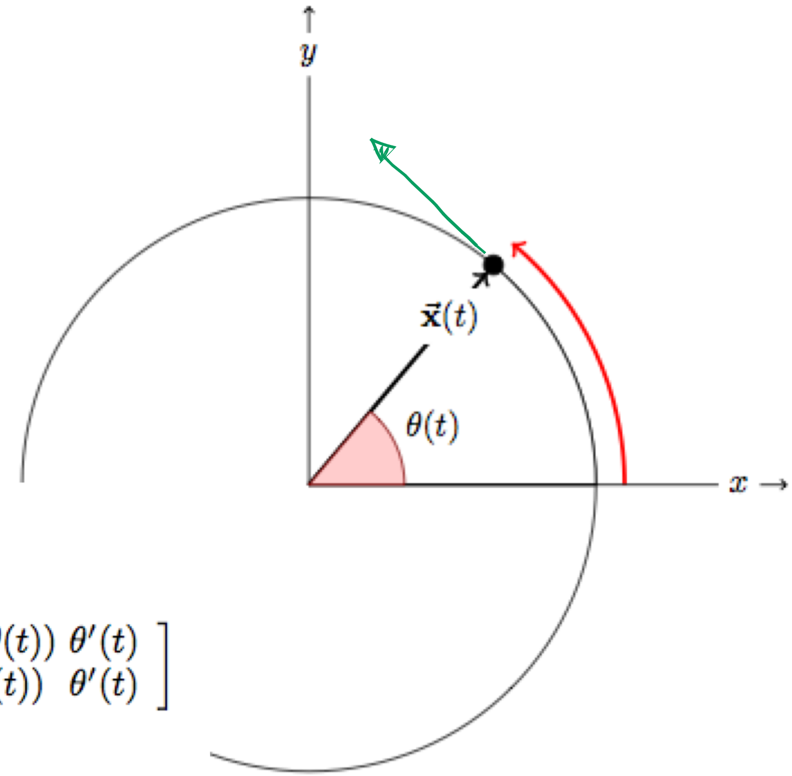
Le MCUA :-)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta(t)) \\ r\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$



Mouvement circulaire non-uniforme...
Vitesse angulaire non-constante
Accélération angulaire constante

Calculons la vitesse et l'accélération !



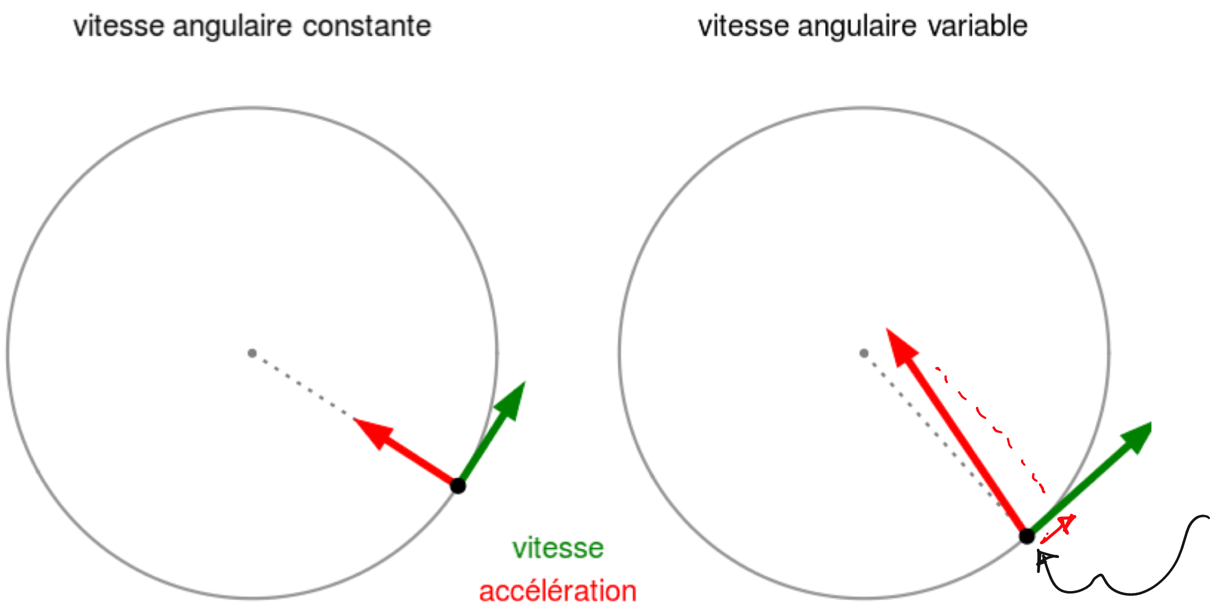
$$\vec{\mathbf{v}}(t) = r\,\omega(t)\begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = r\omega'(t)\begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega(t)\begin{bmatrix} -\cos(\theta(t))\ \theta'(t) \\ -\sin(\theta(t))\ \theta'(t) \end{bmatrix}$$

$$= r\alpha\begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega^2(t)\begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

La vitesse est toujours bien tangente au mouvement !
Mais son module est désormais variable
car la vitesse angulaire n'est pas constante !

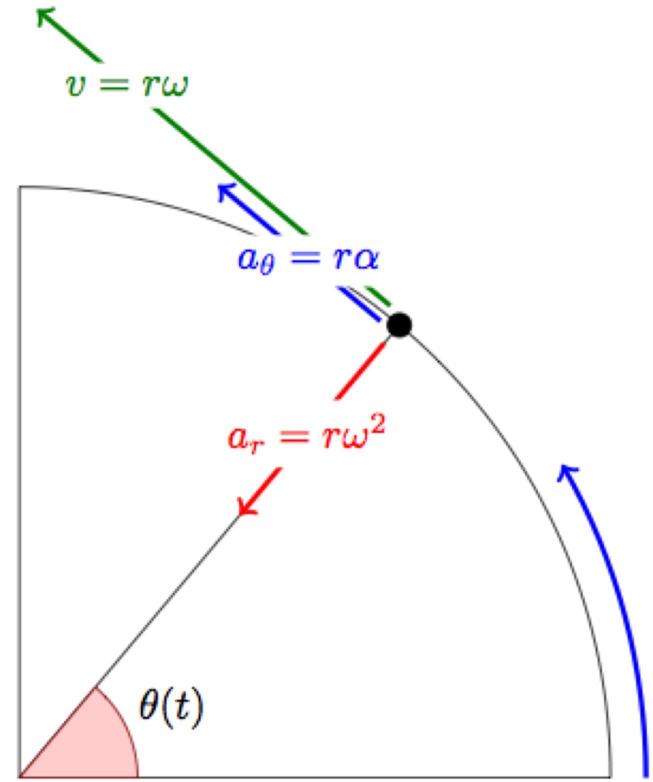
Une vitesse angulaire variable crée une accélération tangentielle !



EST-CE QUE LA VITESSE ANGULAIRE ↗ OU ↘ ?

!

L'accélération centripète provient de la variation de direction de la vitesse.
L'accélération tangentielle provient de la variation du module de la vitesse.



$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = r\omega(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = r\alpha \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega^2(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

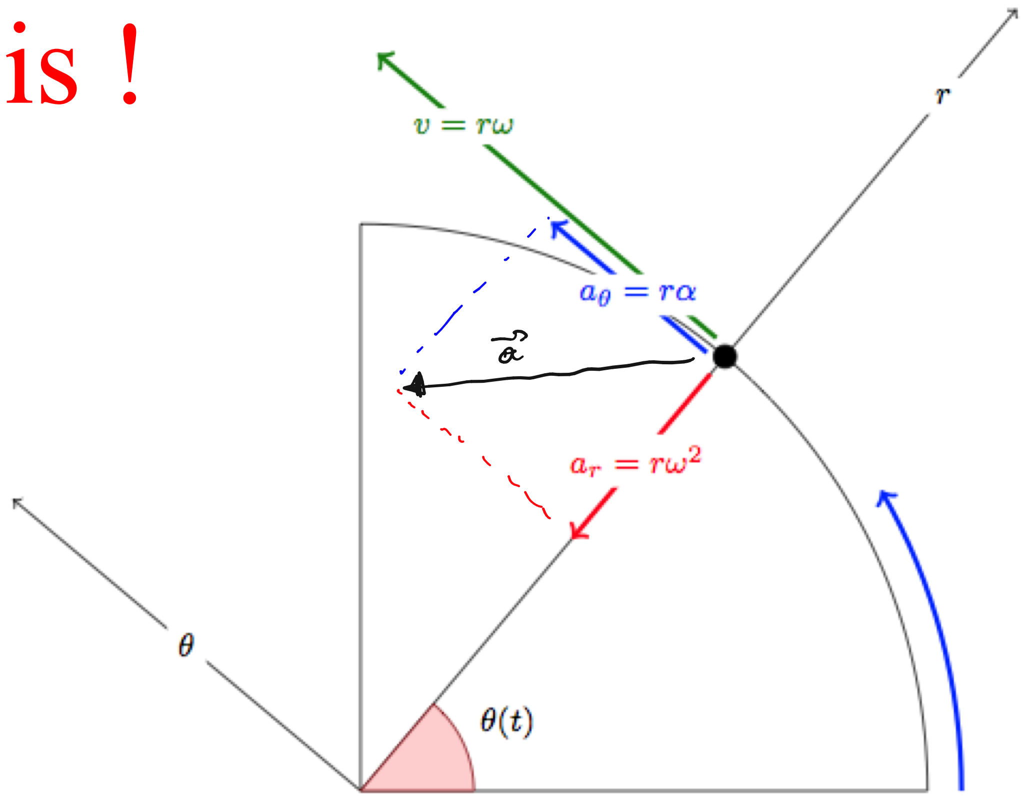
Accélération tangentielle

Accélération centripète

Avec des axes bien choisis !

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}$$

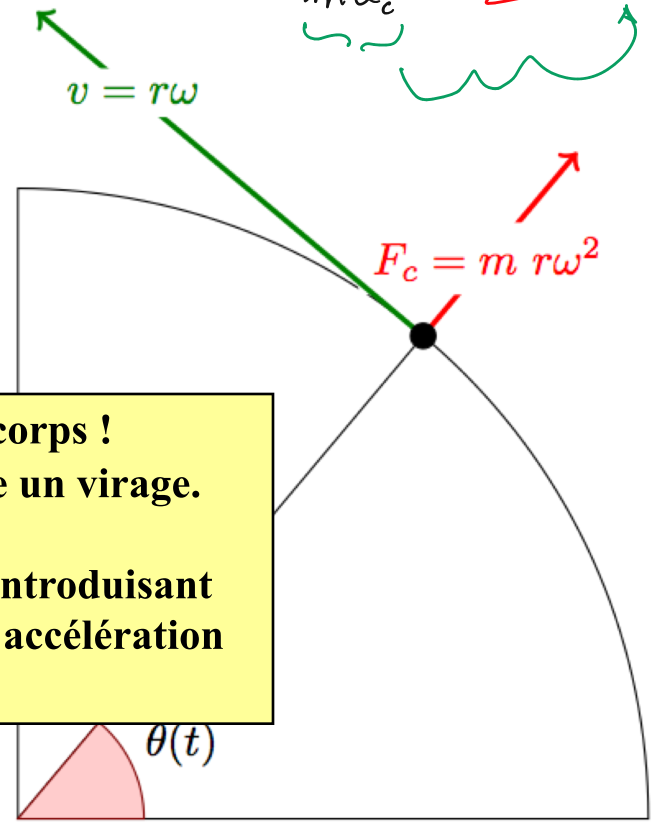


Vitesse : $v = r\omega$ [m/s]

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$ [m/s^2]

Vitesse angulaire ω [radians/s] et accélération angulaire α [radians/s^2]

$m\vec{a}_c = \sum \vec{F}$



On effectue tous les calculs dans un repère mobile lié au corps !
Par exemple, on attache le repère à la voiture qui effectue un virage.

Ensuite, on tient compte du fait que le repère tourne, en introduisant une pseudo-force centrifuge qui aura le même effet que l'accélération centripète qu'on obtient dans un repère fixe !

Remplacer l'accélération centripète par la pseudo-force centrifuge !

$ma = F$

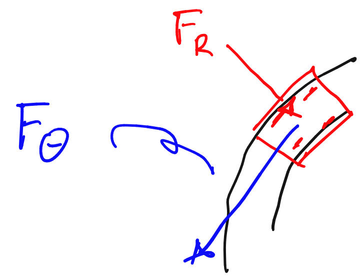
Dynamique du mouvement circulaire

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$\downarrow$$

$$m\begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \end{bmatrix}$$

Comment faire tourner le train ?



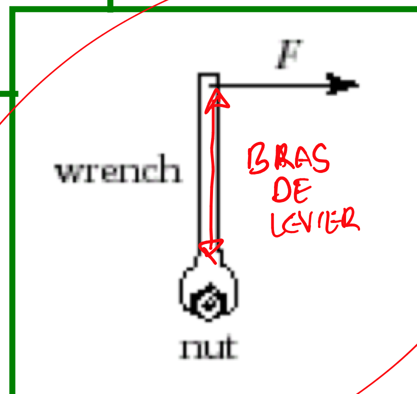
$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

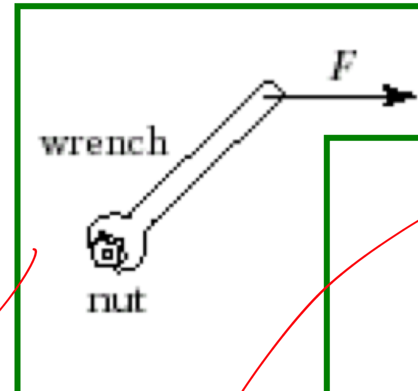
FORCES RADIALES

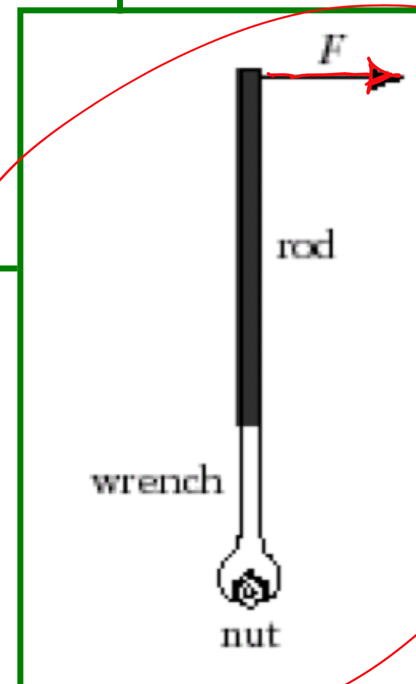
$$m\begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \end{bmatrix}$$

FERA AVANCER LE TRAIN

Dans un mouvement circulaire, seules les forces qui ont un moment non nul par rapport au centre de rotation vont augmenter la vitesse de rotation !



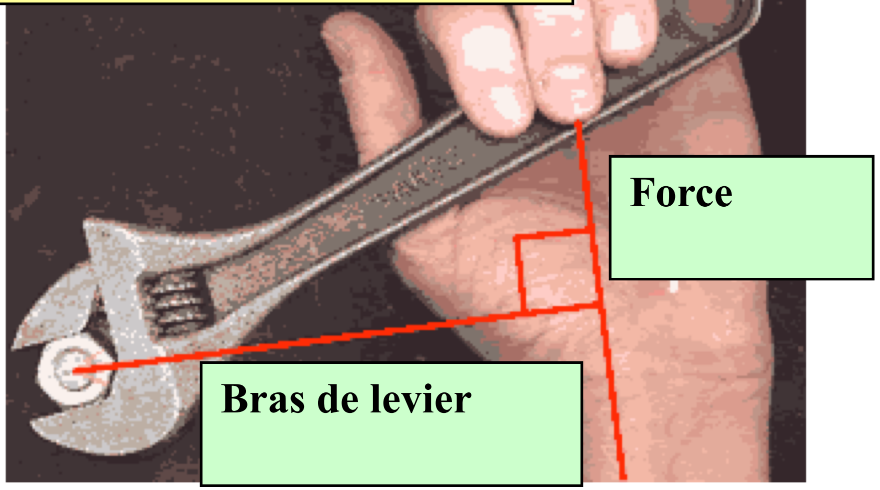




C'est koi
le bon mouvement,
Monsieur le plombier :-)

Ce qui fait tourner la clé, c'est le moment !

Supposons que l'on fixe une barre en un point et
que l'on souhaite la faire tourner autour de ce point en y appliquant une force,
l'accélération angulaire sera proportionnel
au moment de cette force par rapport à ce point !



$$\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \boxed{\begin{array}{l}\text{Forces}\\ \sum \vec{\mathbf{F}}\end{array}}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right)\, dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\ dt$$

En supposant que les forces sont constantes.

$$\left[m\ \vec{\mathbf{v}}\right]_b - \left[m\ \vec{\mathbf{v}}\right]_a = \sum \vec{\mathbf{F}}\ (t_b - t_a)$$

$$\Delta\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \boxed{\begin{array}{l}\sum \vec{\mathbf{F}}\ \Delta t\\ \text{Impulsions}\end{array}}$$

$$\underbrace{m\vec{a}}_{} = \sum \vec{F}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\underbrace{(m\vec{v})}_{}$$

QUANTITE DE MVT

Bilan de la quantité de mouvement

$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) \cdot \vec{v} = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}$

Puissance des forces

$$\frac{d}{dt}\Big(m\,\vec{\mathbf{v}}\Big)\cdot\vec{\mathbf{v}} \;=\; \boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\,v^2\Big) \;=\; \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\,v^2\Big)\,dt \;=\; \sum\int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\,dt \;=\; \sum\int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}\,dt = \sum\int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{x}}$$

En supposant que les forces sont constantes.

$$\Big[\tfrac{1}{2}m\,v^2\Big]_b - \Big[\tfrac{1}{2}m\,v^2\Big]_a \;=\; \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot(\vec{\mathbf{x}}_b - \vec{\mathbf{x}}_a)$$

$$\Delta\Big(\tfrac{1}{2}m\,v^2\Big) \;=\; \boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}$$

Travail des forces

Bilan d'énergie cinétique

$$\vec{\mathbf{r}} \times \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) \;=\; \boxed{\begin{array}{l}\text{Moments des forces}\\[4pt] \sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}\end{array}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right) \;=\; \sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right)\,dt \;=\; \sum \int_a^b \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}\,dt$$

En supposant que les moments sont constants.

$$\left[m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right]_b - \left[m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right]_a \;=\; \sum (\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}})\,(t_b - t_a)$$

$$\Delta\left(m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right) \;=\; \boxed{\begin{array}{l}\sum (\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}})\,\Delta t\\[4pt] \text{Impulsions angulaires}\end{array}}$$

$$\vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \underbrace{\sum \vec{r} \times \vec{F}}_{\text{MOMENT DE FORCE}}$$

$$\frac{d}{dt}\big(\underbrace{m\vec{r} \times \vec{v}}_{\text{MOMENT CINÉTIQUE}}\big)$$

Bilan
de moment cinétique

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,m\,\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{r}}\times m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}$$

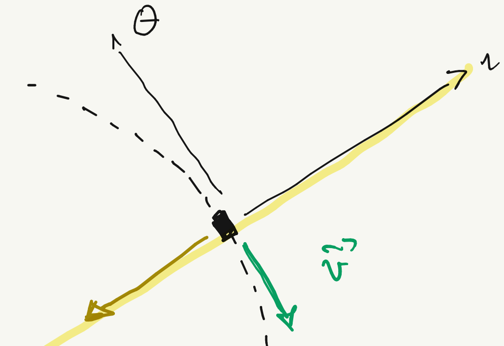
- **Dans un mouvement circulaire, l'accélération a toujours une composante centripète. Les variations de la vitesse angulaire génère une composante tangentielle.**

- **Seules les forces dont le moment n'est pas nul par rapport au centre de rotation permettent de modifier la vitesse angulaire d'un mouvement circulaire.**

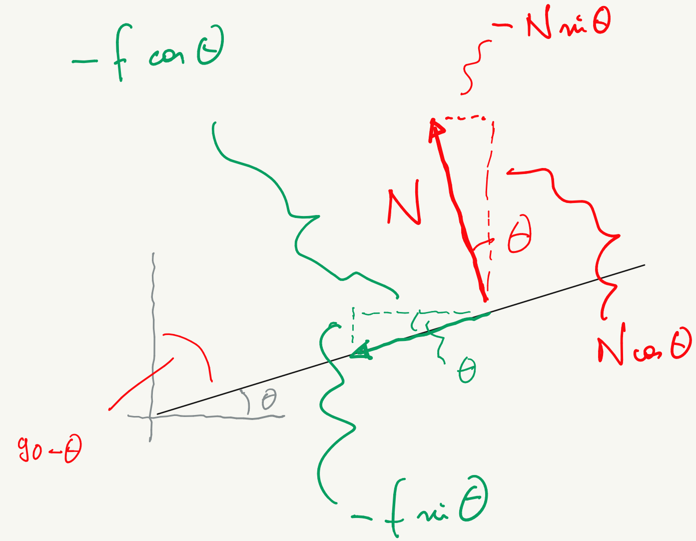
- **Les forces modifient la quantité de mouvement**
  Les moments modifient le moment cinétique

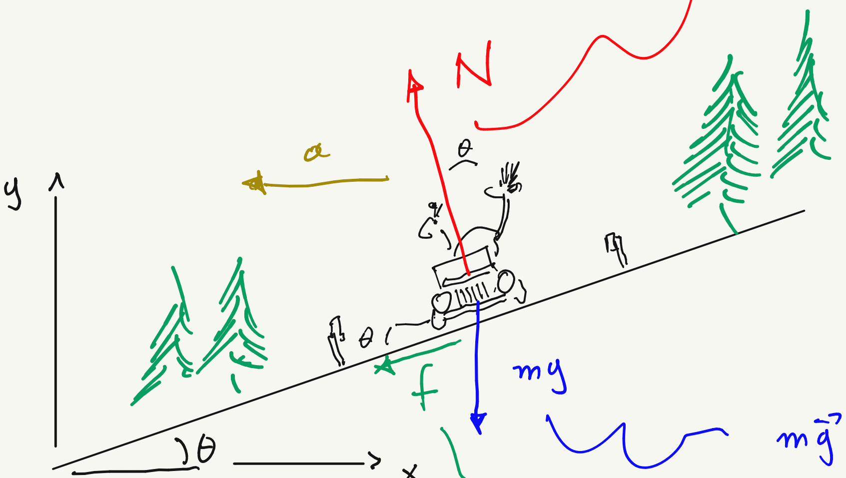
Vitesse maximale sans risque de dérapage ?

Automobile de 1000 kg
Angle de 30 degré par rapport à l'horizontale
Rayon du virage : 100 m
Coefficient de frottement statique de 0.1



$$\vec{a} = \begin{bmatrix} -v^2/R \\ 0 \end{bmatrix}$$





$$\vec{N} = \begin{bmatrix} -N\sin\theta \\ N\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$m\vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$

$$\vec{f} = \mu_s N \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$$

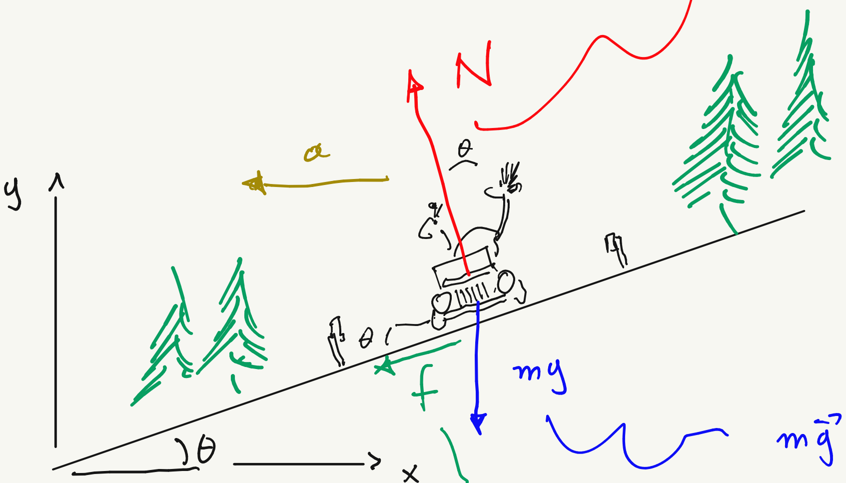
CAR ON NE DERAPE PAS!

$$\boxed{m\vec{a} = \sum \vec{F}}$$

2 INCONNUES
N ET v

$$\begin{cases} -m\dfrac{v^2}{R} = 0 - N\sin\theta - \mu_s N\cos\theta \\ 0 = -mg + N\cos\theta - \mu_s N\sin\theta \end{cases}$$

2 EQUATIONS



$$\vec{N} = \begin{bmatrix} -N\sin\theta \\ N\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$m\vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$

$$\vec{f} = \mu_s N \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$$

CAR ON NE DERAPE PAS !

$$\boxed{m\vec{a} = \sum \vec{F}}$$

2 INCONNUES

N ET v

$$\begin{cases} -m\dfrac{v^2}{R} = 0 - N\sin\theta - \mu_s N\cos\theta \\ 0 = -mg + N\cos\theta - \mu_s N\sin\theta \end{cases}$$

2 EQUATIONS

$$mg = N(\cos\theta - \mu_s\sin\theta)$$

$$N = \frac{mg}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}$$

$$\frac{\cancel{m}v^2}{R} = N(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)$$

$$= \cancel{m}g\,\frac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}$$

$$\boxed{v = \sqrt{gR\,\frac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}}}$$

[m/s] [m/s²] [m]