- **La masse mesure la résistance d’un corps à une accélération causée par une force.**
- **Le moment d’inertie mesure la résistance d’un corps à une accélération angulaire causée par un moment de force.**

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(m\;\vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\;v^2 + \tfrac{1}{2}I\;\omega^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(I\;\omega\Big) &= \sum M_i
\end{aligned}
$$

Equilibre statique

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
0 &= \sum M_i
\end{aligned}
$$

Théorème de Huygens
Moment d'inertie quelconque

$$
\begin{aligned}
I_h &= \sum m_i \left(\vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{h}}\right) \cdot \left(\vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{h}}\right) \\
&= \underbrace{\sum m_i\, \vec{\mathbf{r}}_i \cdot \vec{\mathbf{r}}_i}_{=I} + \underbrace{\sum m_i\, \vec{\mathbf{h}} \cdot \vec{\mathbf{h}}}_{=mh^2} + 2 \left(\cancel{\underbrace{\sum m_i\, \vec{\mathbf{r}}_i}_{=0}}\right) \cdot \vec{\mathbf{h}}
\end{aligned}
$$

En vertu de la définition du centre de masse !

Une conséquence immédiate de ce théorème est qu'il est moins coûteux (en énergie) de faire tourner un corps autour d'un axe passant par le centre de masse.

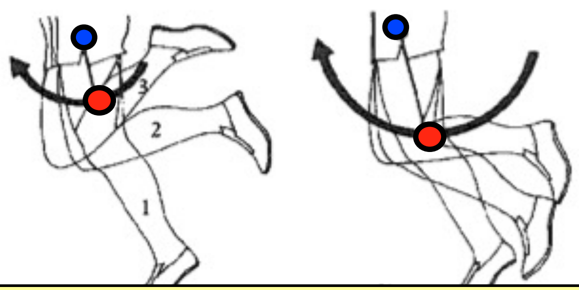
Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\, h^2 + I$$

Moment d’inertie de la jambe par rapport à la hanche

Lors d’un sprint, le coureur va chercher à ramener ses jambes le plus rapidement possible en avant.

Il va attirer le talon vers le haut durant la phase d’oscillation.
Le moment d’inertie par rapport à la hanche est diminué.



Pour les courses de fond, le coureur va dépenser moins d’énergie à relever le talon.

Le moment d’inertie par rapport à la hanche reste plus grand.
La vitesse est évidemment aussi moins rapide !

Accélération dans l'avant-bras due à la gravité

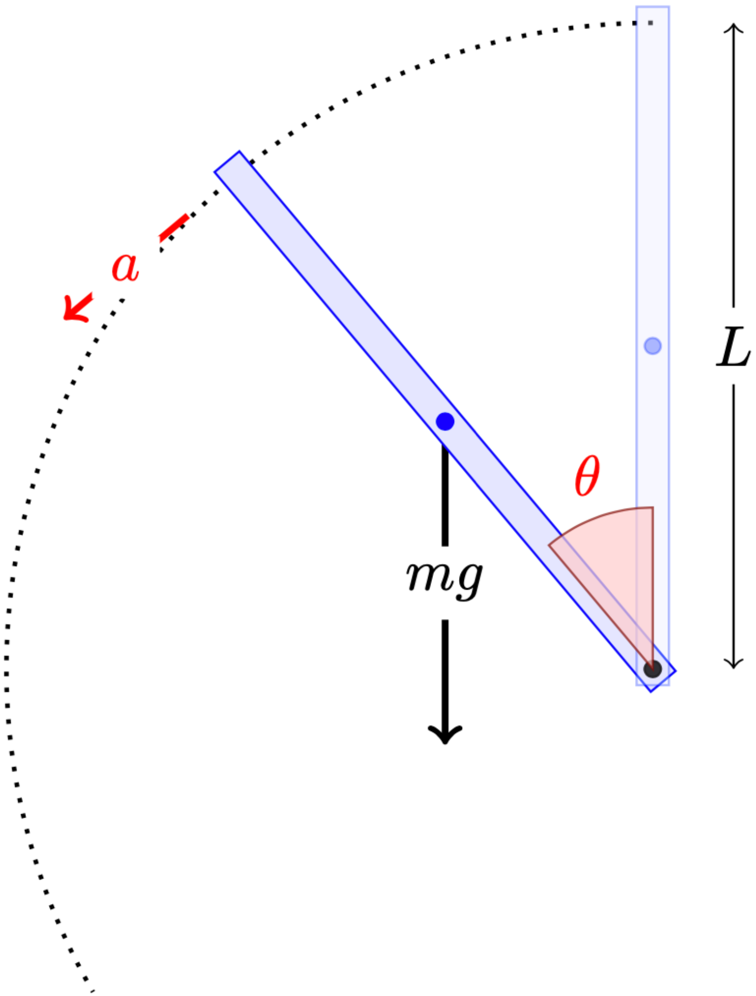
Quelle est l'accélération angulaire pour un angle quelconque ?
Quelle est l'accélération tangentielle lorsque l'avant-bras est horizontal ?

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2 + \tfrac{1}{2}I\,\omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

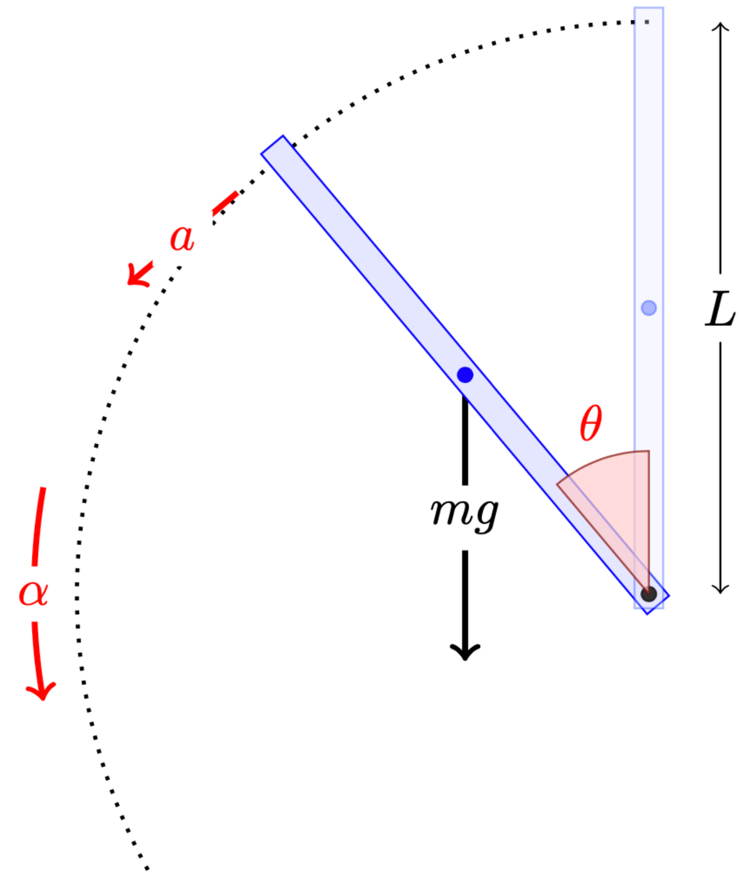
$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) = \sum M_i$$

Baisser
le bras



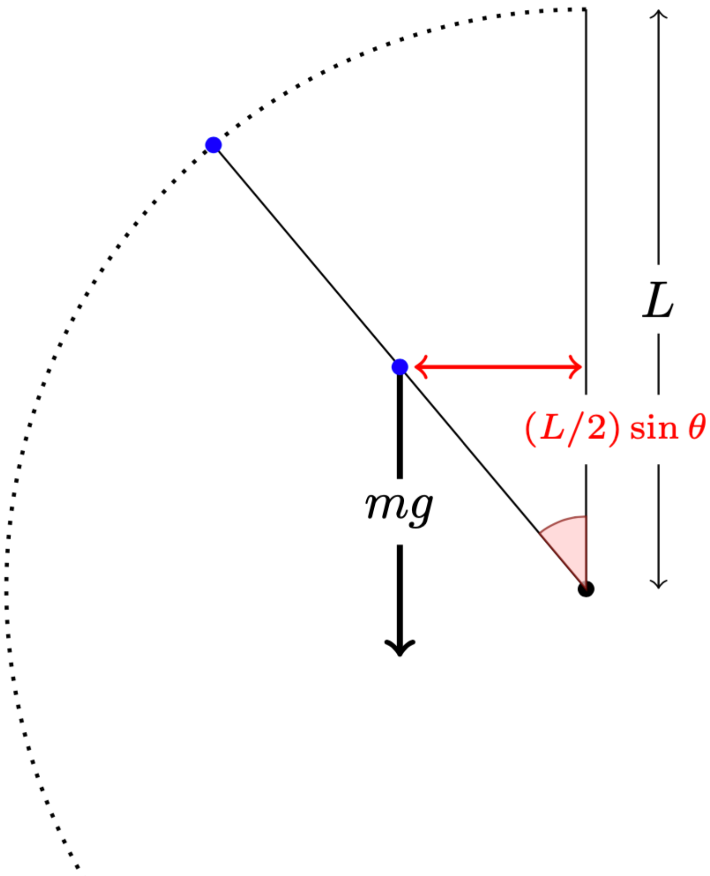
$$\frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) \quad = \quad \sum M_i$$

Tout d’abord, calculer
le moment d’inertie du bras
autour de l’épaule !



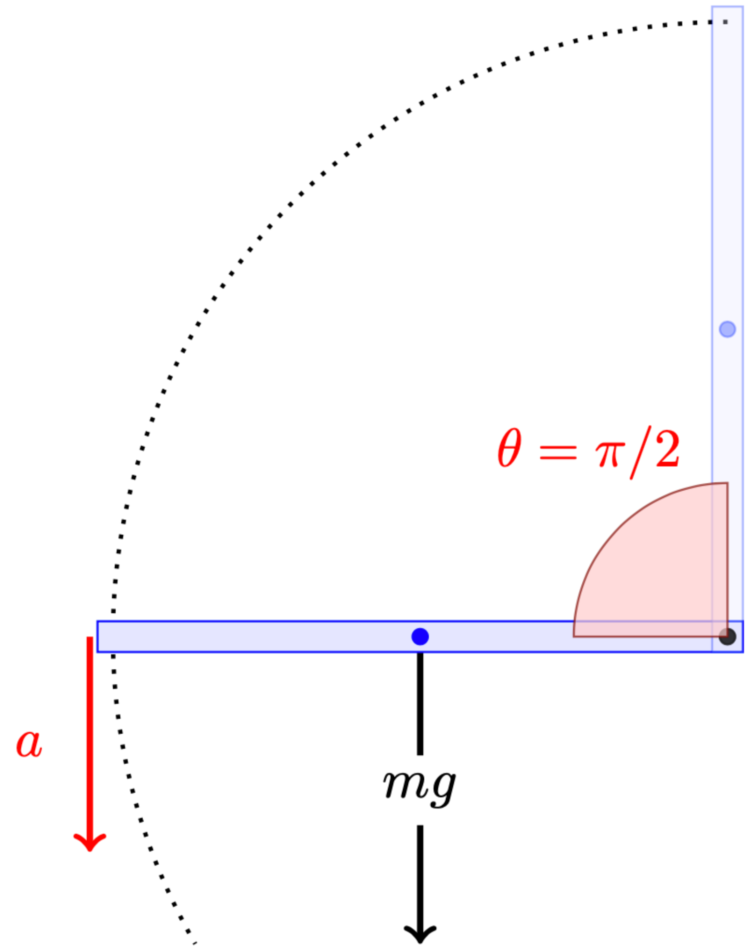
$$
\begin{aligned}
I_h &= I + mh^2 \\
&= \frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{4} = \frac{(1+3)mL^2}{12} = \frac{4mL^2}{12} = \frac{mL^2}{3}
\end{aligned}
$$

Ensuite calculer le moment de la force
et en déduire finalement
l'accélération de la main !



$$\begin{aligned} I_h \, \alpha &= mg \, \frac{L}{2} \sin(\theta) \\ \frac{mL^2}{3} \, \frac{a}{L} &= \frac{mgL}{2} \, \sin(\theta) \\ a &= \frac{3}{2} \, g \, \sin(\theta) \end{aligned}$$

La main a une accélération
supérieure
à celle de la chute libre !

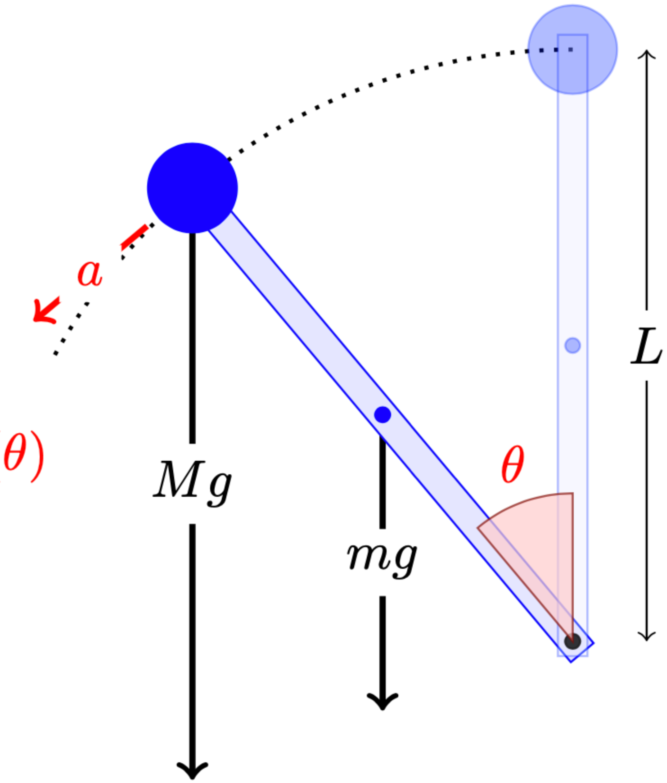


$$
\begin{aligned}
{\color{blue}I_h}\ \alpha &= mg\ {\color{red}\frac{L}{2}\sin(\theta)} \\
{\color{blue}\frac{mL^2}{3}}\ \frac{a}{L} &= \frac{mgL}{2}\ \sin(\theta) \\
a &= \frac{3}{2}\ g\ \sin(\theta)
\end{aligned}
$$

L'accélération est maximale lorsque ${\color{red}\theta = \pi/2}$.

$$
a = \frac{3}{2}\ g
$$

Et avec le poids ?



$$
\begin{aligned}
I\alpha &= mg\,\frac{L}{2}\sin(\theta) + Mg\,L\sin(\theta)\\
\left(M+\frac{m}{3}\right)L^2\frac{a}{L} &= \left(M+\frac{m}{2}\right)gL\sin(\theta)\\
a &= \left(\frac{6M+3m}{6M+2m}\right)\,g\sin(\theta)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{I = ML^2 + \frac{mL^2}{3}}$$

On tient compte de l'inertie du poids et du bras !

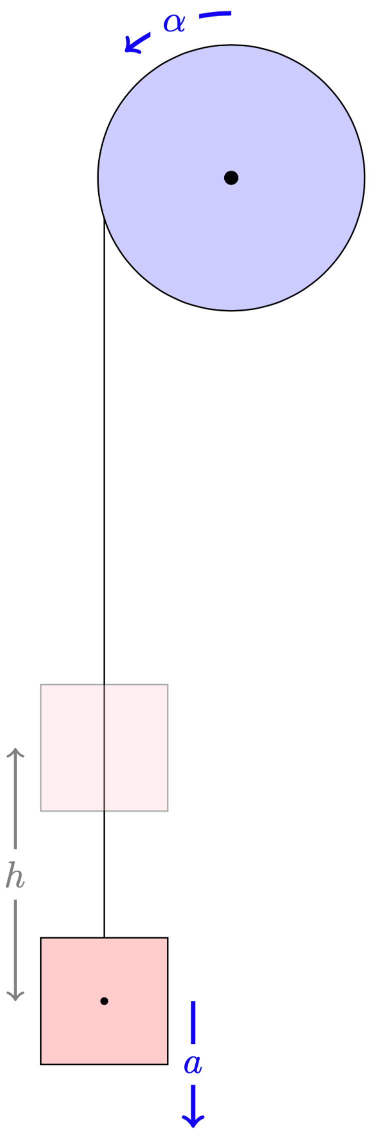
On lache un bloc attaché à une poulie

Quelle est la vitesse angulaire de la poulie après 3 secondes ?
Vitesse du bloc lorsqu'il est descendu de 1.6 mètre ?

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2 + \tfrac{1}{2}I\,\omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

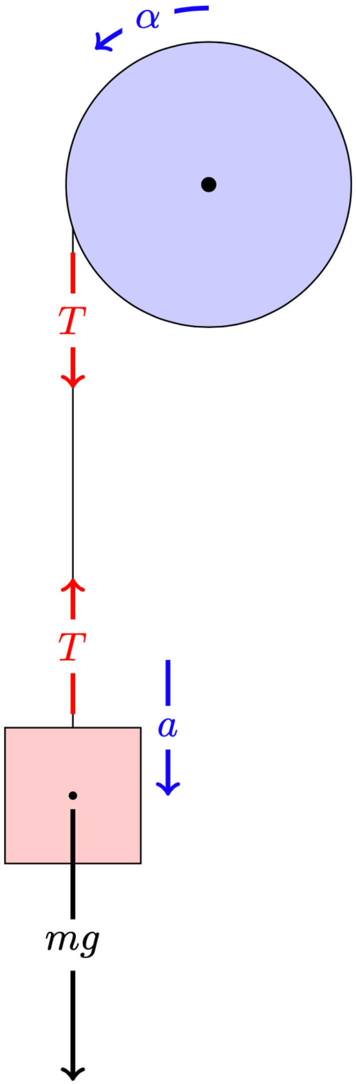
$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) = \sum M_i$$



La solution avec la dynamique

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\ v^2 + \frac{1}{2}I\ \omega^2\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\left(I\ \omega\right) &= \sum M_i
\end{aligned}
$$

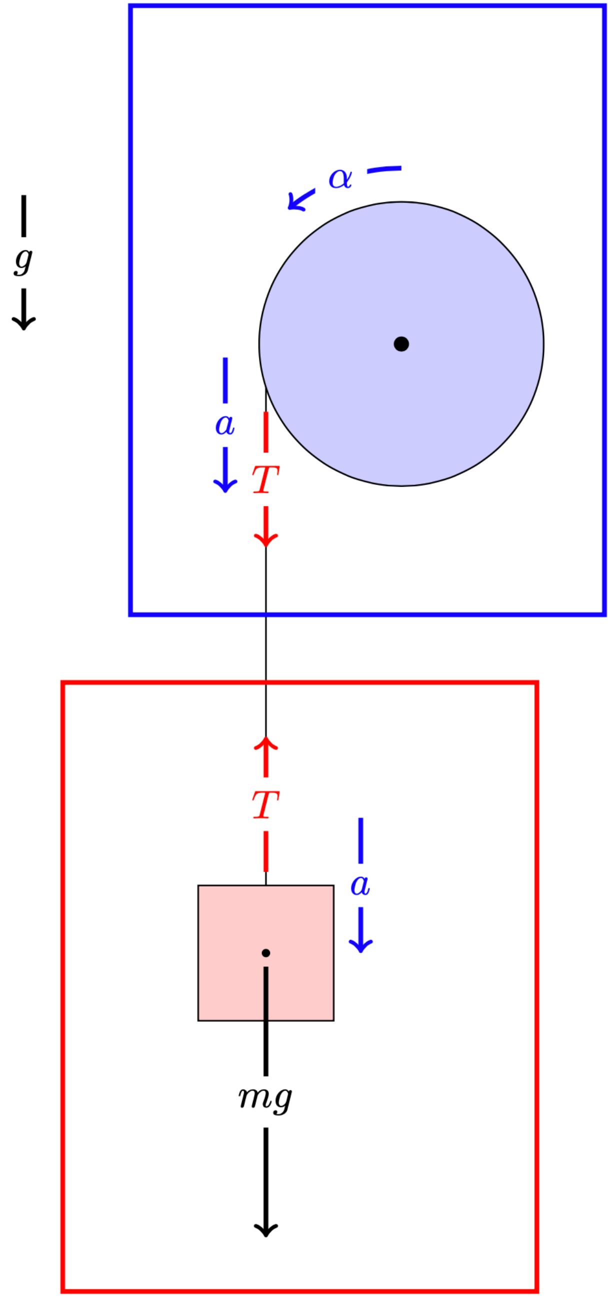
$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\left(I\ \omega\right) &= \sum M_i
\end{aligned}
$$



Approche classique avec des forces et de moments

On utilise le bilan de quantité de mouvement et le bilan de moment cinétique

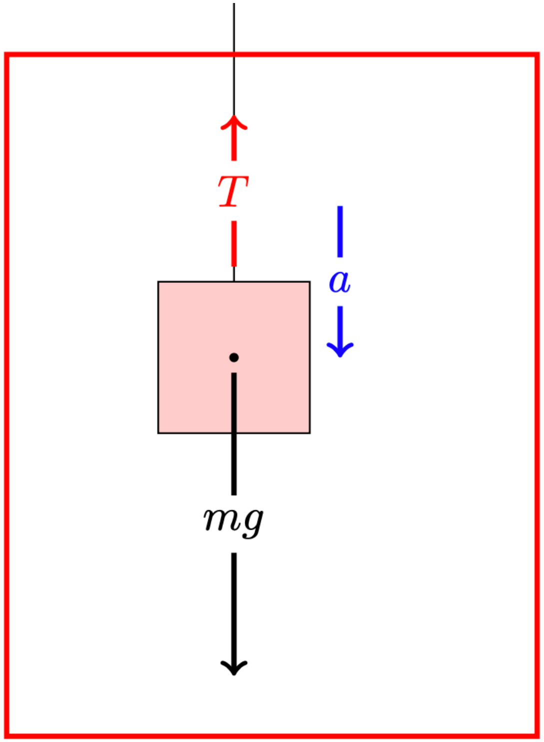
Deux corps distincts



La poulie
qui tourne !

Le bloc
qui tombe !

Le bloc qui tombe !

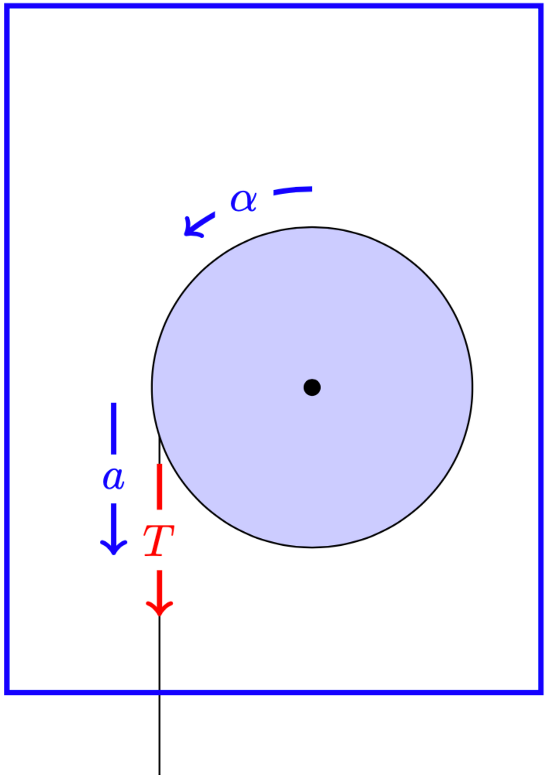


$$mg - T = ma$$

$$\Downarrow$$

$$T = m(g - a)$$

La poulie qui tourne !



$$TR = \frac{MR^2}{2}\,\alpha = \frac{MR^2}{2}\,\frac{a}{R}$$

$$T = \frac{Ma}{2}$$

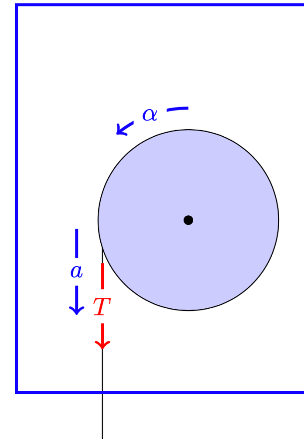
On considère ici un cylindre plein de masse M et de rayon R

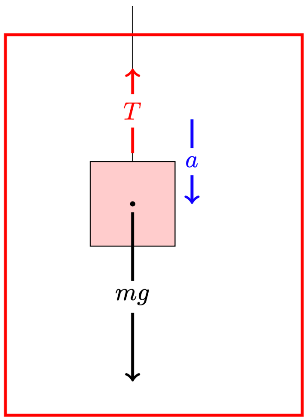
Deux équations
Deux inconnues

$$TR = \frac{MR^2}{2}\alpha = \frac{MR^2}{2}\frac{a}{R}$$

$$\downarrow$$

$$T = \frac{Ma}{2}$$





$$mg - T = ma$$

$$\downarrow$$

$$T = m(g-a)$$

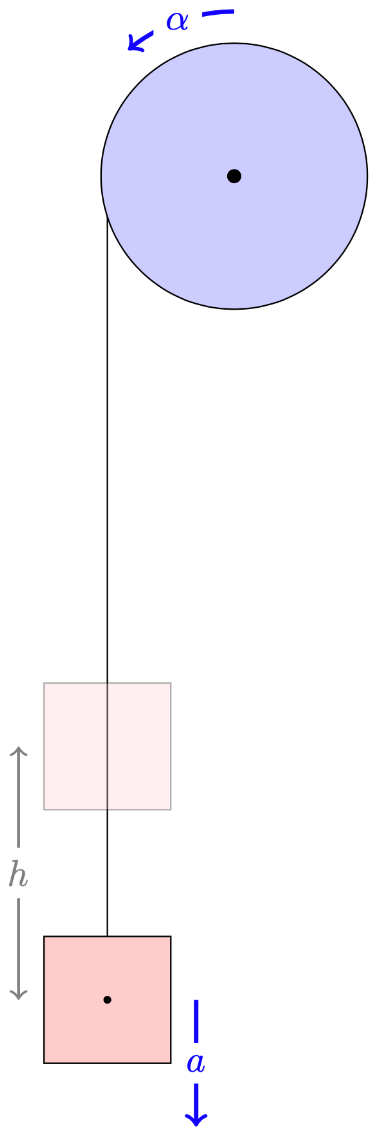
$$m(g-a) = \frac{Ma}{2}$$

$$2mg - 2ma = Ma$$

$$2mg = (M+2m)a$$

$$\downarrow$$

$$a = \frac{2mg}{(M+2m)}$$



Bloc qui tombe !
Calcul de la vitesse

$$h = \frac{at^2}{2}$$

$$\downarrow$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

$$v = at = a\sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2ha^2}{a}} = \sqrt{2ha}$$

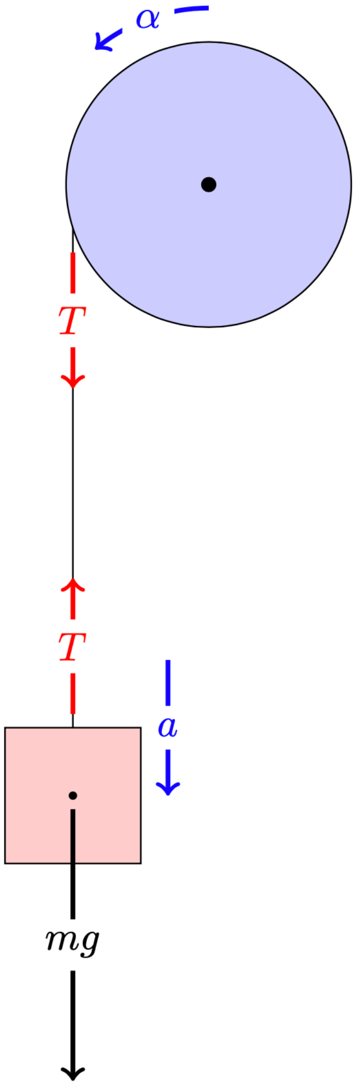
$$\downarrow$$

Comme on a obtenu $a = \dfrac{2mg}{(M+2m)}$

$$v = \sqrt{\frac{4mgh}{(M+2m)}}$$

L’énergie...
So easy !

$$\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\ v^2 + \frac{1}{2}I\ \omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$
$$\frac{d}{dt}\left(I\ \omega\right) = \sum M_i$$



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\ v^2 + \frac{1}{2}I\ \omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

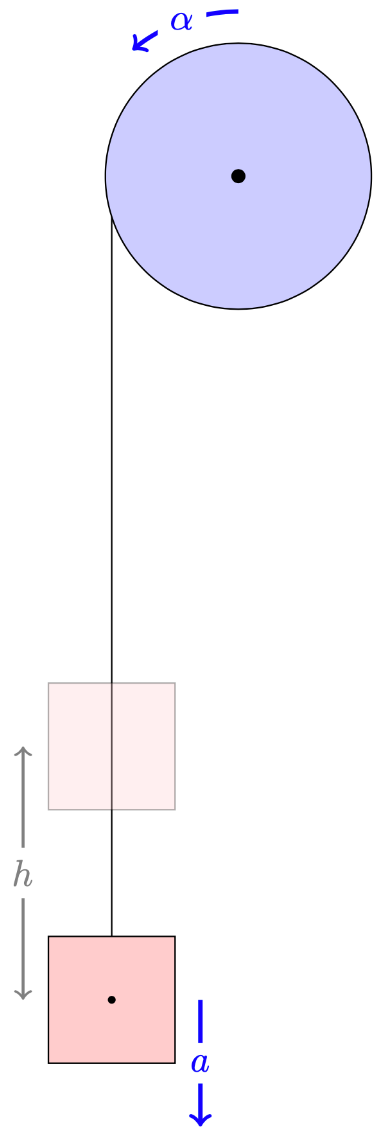
Approche en termes d’énergie cinétique
Ce sera nettement plus rapide !
Et on obtiendra évidemment la même solution !

Avant :-)

$$\begin{aligned} K &= 0 \\ U &= mgh \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \\ U &= 0 \end{aligned}$$

Après :-)



$$\begin{aligned} mgh &= \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \\ mgh &= \frac{mv^2}{2} + \frac{MR^2}{2}\,\frac{v^2}{2R^2} \\ 4mgh &= 2mv^2 + Mv^2 \end{aligned}$$

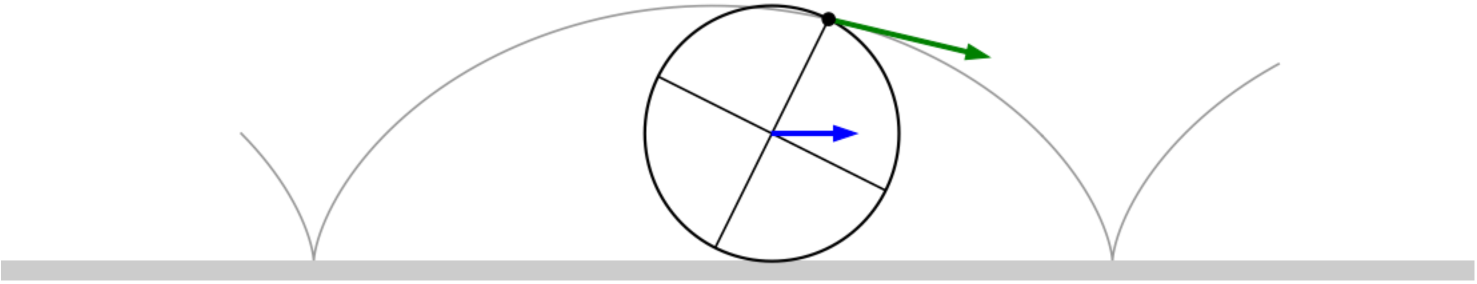
$$\downarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{4mgh}{(M+2m)}}$$

So easy !
L'approche énergétique !
Oui, oui : on a la même réponse !

Faisons un peu de vélo...

Comme la roue ne glisse pas, le point bas est très brièvement en contact avec la route.
Ce point est au repos et la roue tourne autour ce point.



On applique une force F pour freiner une roue...

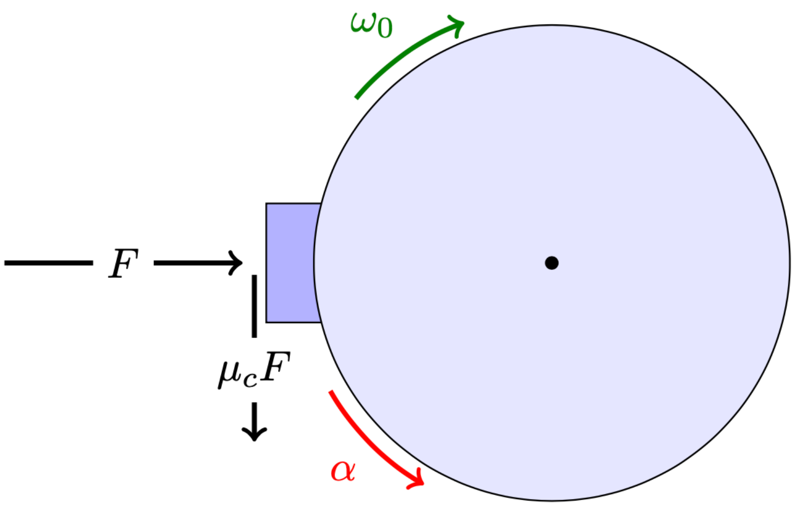
Combien de tours va effectuer la roue avant de s'arrêter ?
Masse de la roue = m
Rayon de la roue = R
Vitesse angulaire initiale = ω
Coefficient de frottement = μ

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{2}I\,\omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) = \sum M_i$$

La roue tourne en l'air !
Comment freiner sa rotation ?



$$\mu_c F R \quad = \quad m R^2 \alpha$$

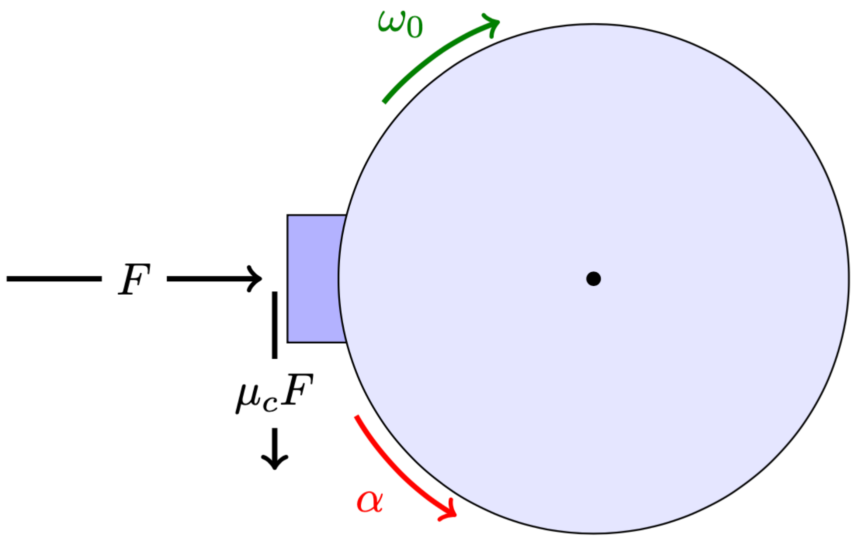
$$\downarrow$$

$$\alpha \quad = \quad \frac{\mu_c F}{m R}$$

Attention !
Sur le dessin, on dessine la décélération comme positive !
Et on fait donc de même dans l'équation !

L'équation et le dessin forment un tout !
Le dessin définit le signe de la variable !
On pourrait évidemment choisir une autre convention sur le dessin et dans l'équation !

Attention !
Comme la décélération est positive,
il faut mettre un signe négatif pour alpha !



$$\begin{aligned} \theta(t) &= \omega_0 t - \alpha \frac{t^2}{2} \\ \underbrace{\theta'(t)}_{=0} &= \omega_0 - \alpha t \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$t_f = \frac{\omega_0}{\alpha}$$

Nombre de tours effectués
avant que la roue s'immobilise

$$\theta(t_f) = \frac{\omega_0^2}{\alpha} - \alpha \frac{\omega_0^2}{2\alpha^2} = \frac{\omega_0^2}{2\alpha}$$

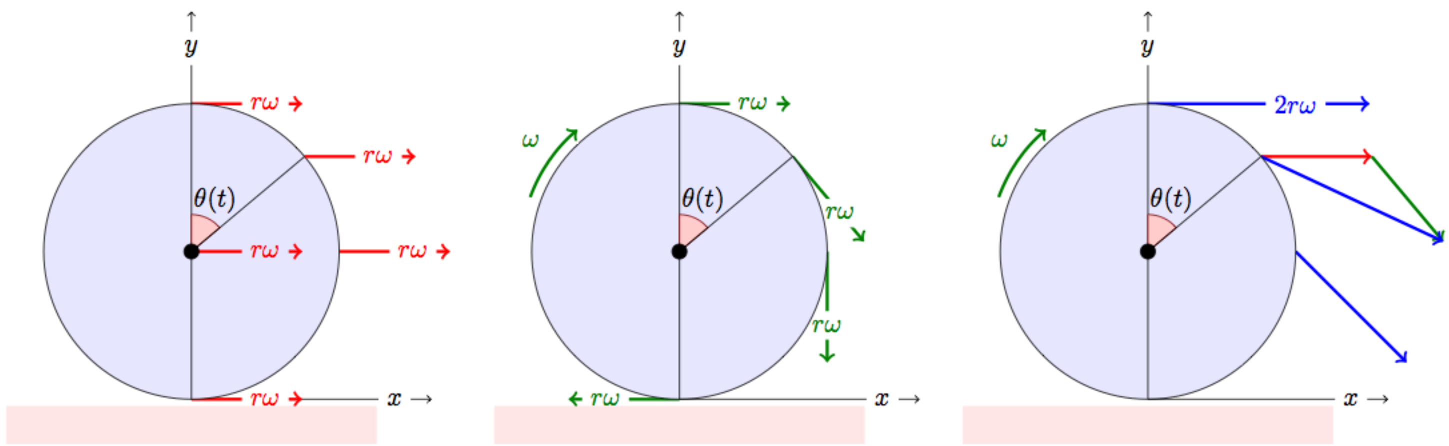
Le roulement : c'est combiner une translation et une rotation !

Rotation autour du centre

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \boxed{\vec{\mathbf{v}}_c} + \boxed{\vec{\mathbf{v}}_t(t)}$$

Translation du centre

Le roulement, c'est une translation du centre avec une rotation autour du centre

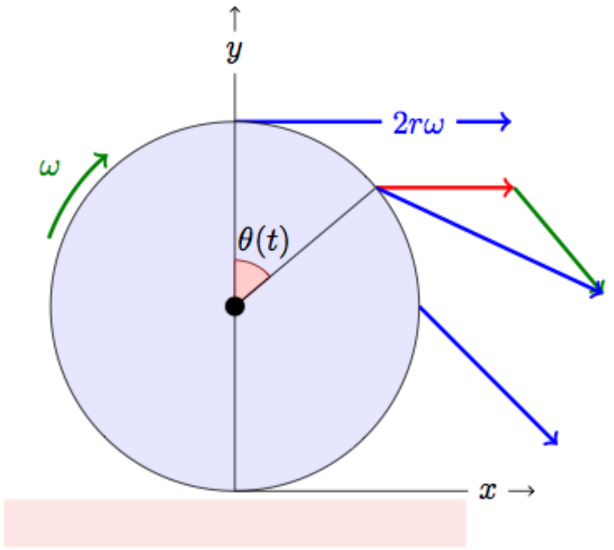


$$\boxed{\vec{\mathbf{v}}(t)} = \boxed{\vec{\mathbf{v}}_c} + \boxed{\vec{\mathbf{v}}_t(t)}$$

Rotation autour du centre

Translation du centre

Le roulement, c'est une translation du centre avec une rotation autour du centre



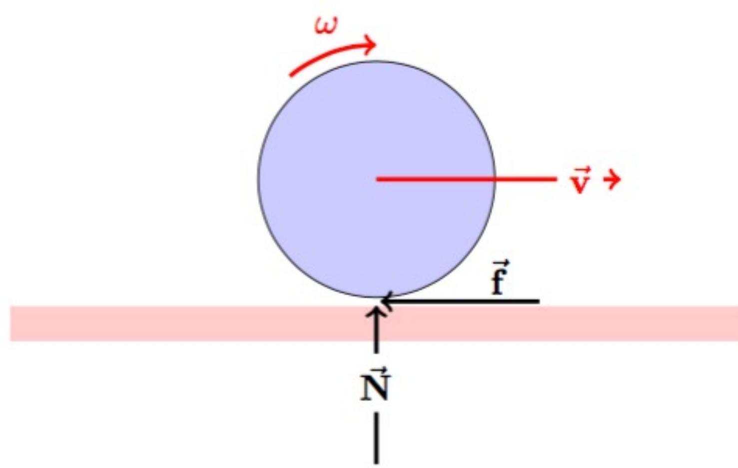
Le mouvement circulaire est dans le sens horlogique.
La roue avance vers la droite.

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} v_c(t) \\ 0 \end{bmatrix} + r\omega(t)\begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \begin{bmatrix} a_c(t) \\ 0 \end{bmatrix} + r\omega^2(t)\begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ -\cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\alpha(t)\begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

Condition de roulement sans glissement

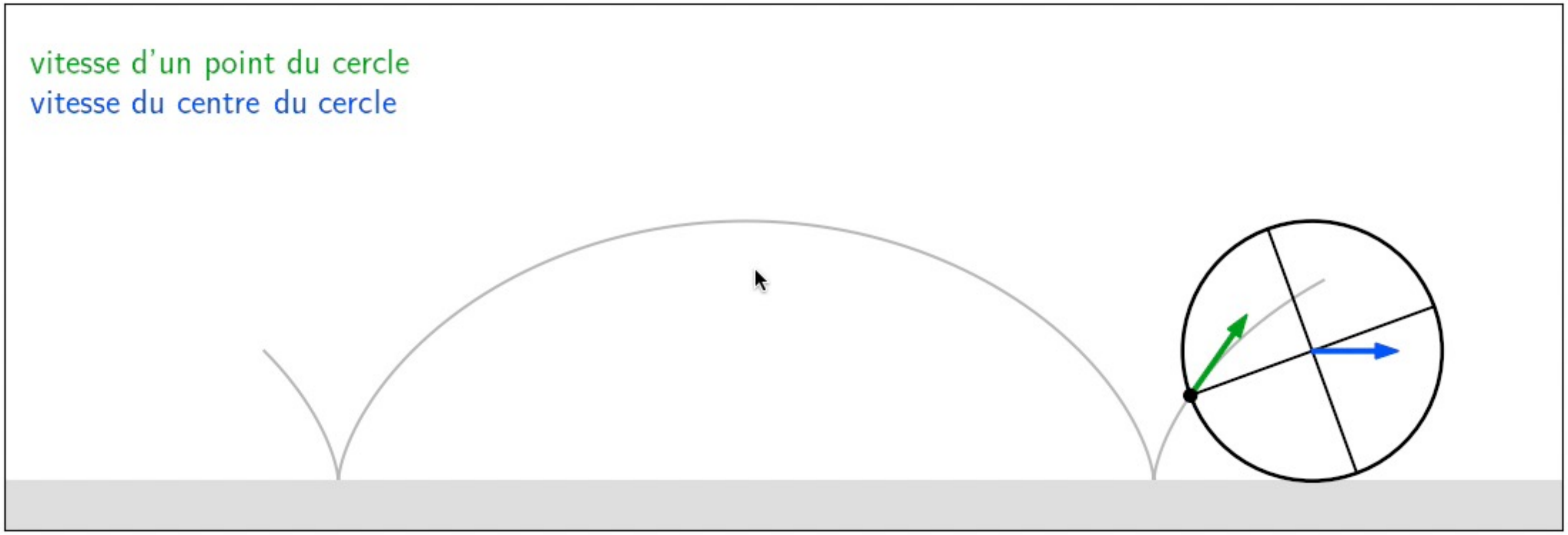
$$\begin{aligned} v &= \omega r \\ a &= \alpha r \end{aligned}$$



C'est l'inverse du glissement sans roulement ou dérapage incontrolé !

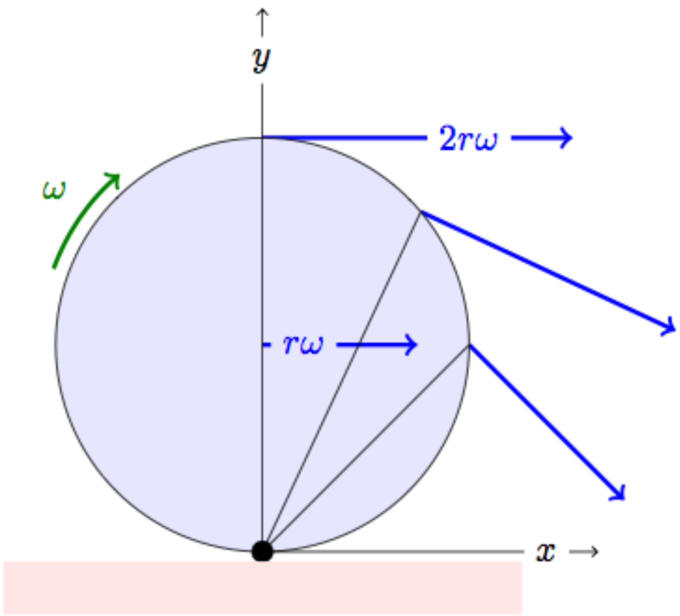
Roulement sans glissement d'une roue !

La trajectoire d'un point particulier de la roue est une courbe bien compliquée...



La roue tourne autour du point de contact

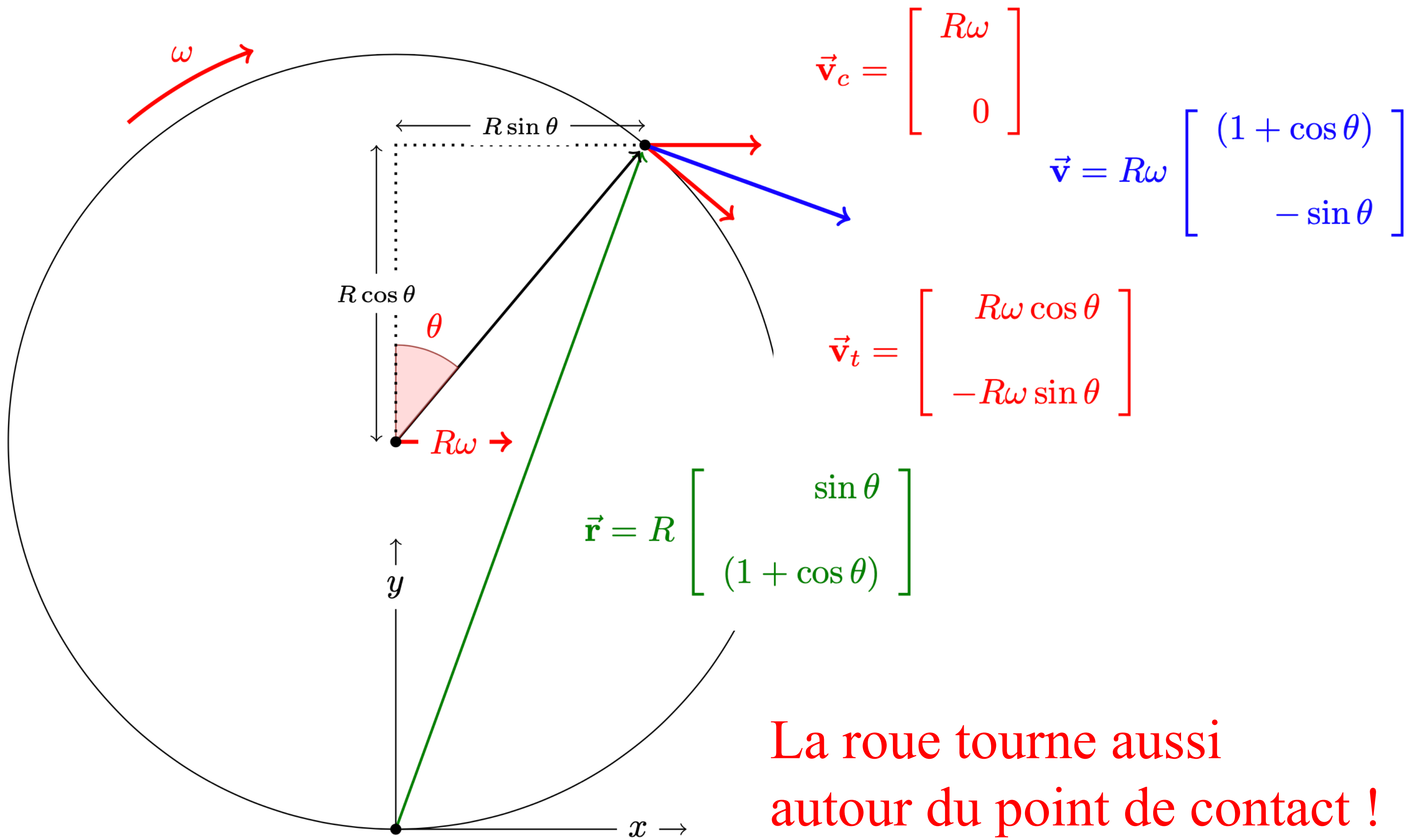
En un tour de roue, le centre avance d'une distance 2πR



La norme de la vitesse du centre est égale à la norme de la vitesse tangentielle de rotation !

On en déduit la même relation pour les accélérations

Condition de roulement sans glissement
$$\begin{aligned} v &= \omega r \\ a &= \alpha r \end{aligned}$$

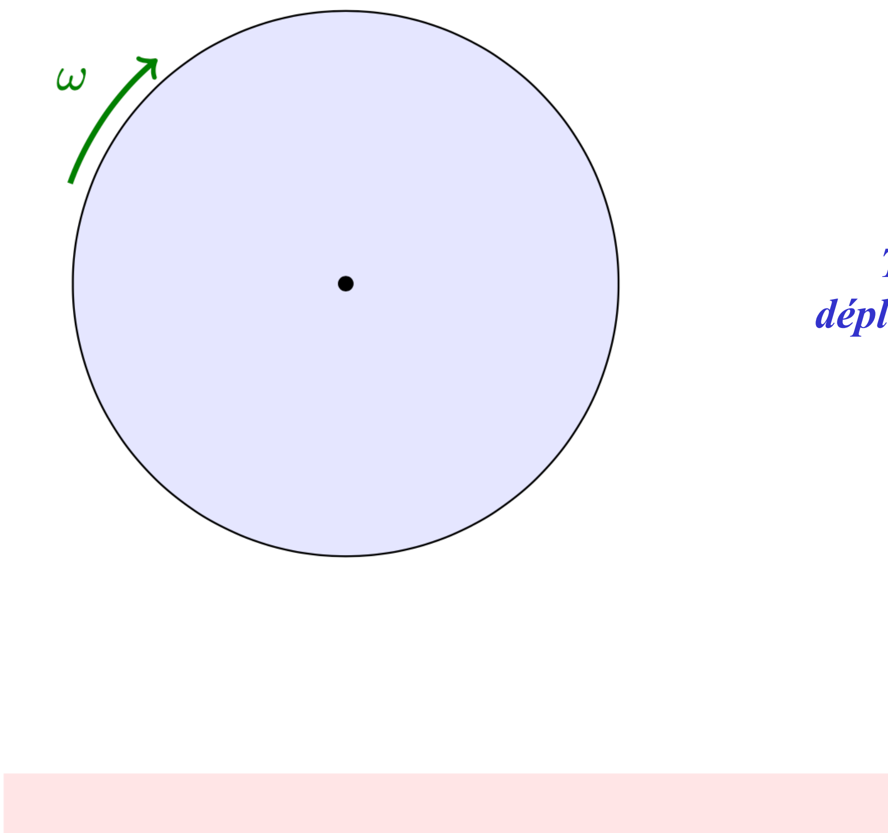


La roue tourne aussi
autour du point de contact !
Si, si, si !

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{r}} = v_x r_x + v_y r_y = R^2\omega(1+\cos\theta)\sin\theta - R^2\omega\sin\theta(1+\cos\theta) = 0$$

$$v = r\omega$$

Une roue en rotation !
On va la déposer sur le sol...

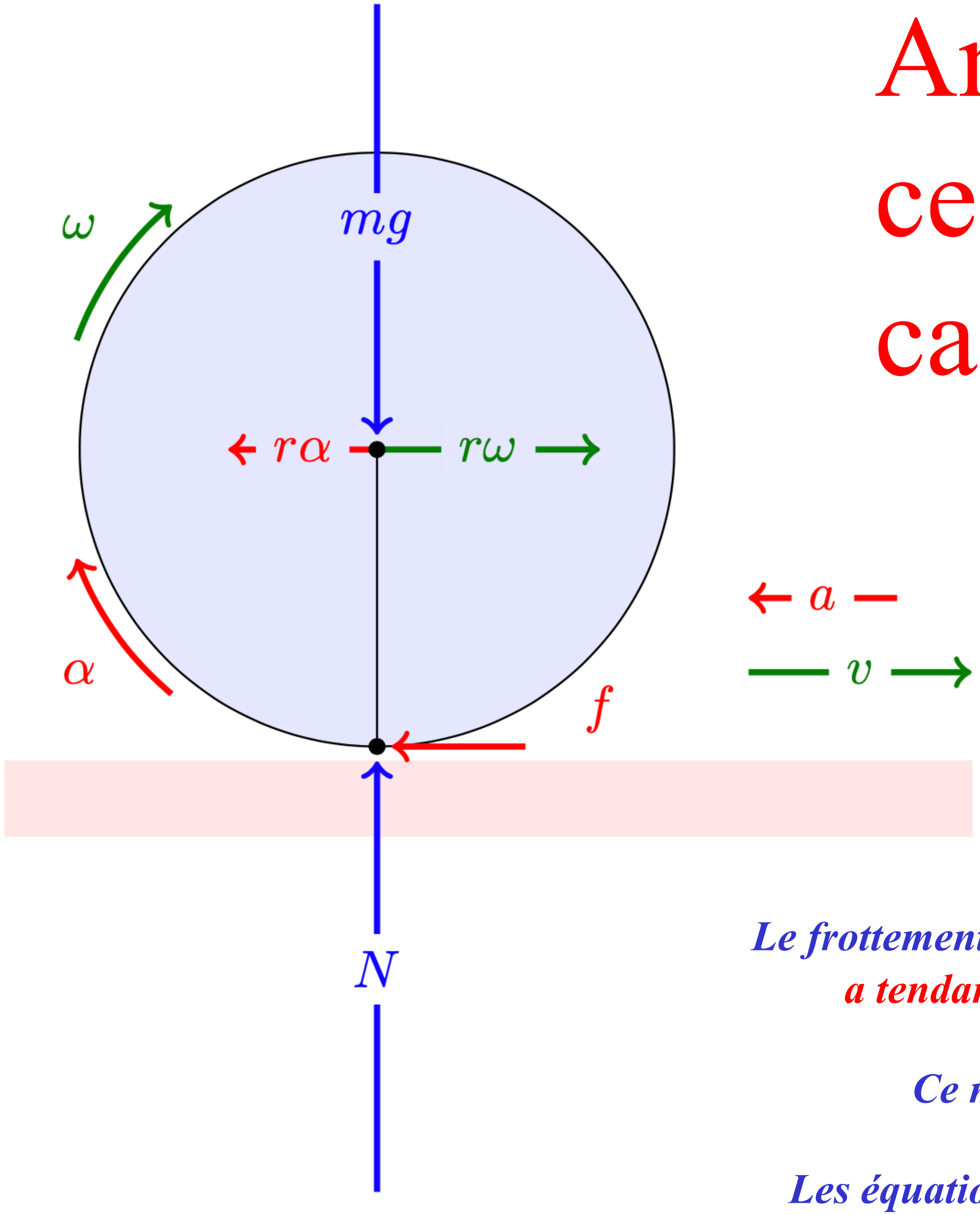


Intuitivement, on imagine bien la situation !

Tout d'abord, la roue va rouler sur le sole et se déplacer vers la droite dès qu'elle touchera le sol !

Ensuite, le frottement au point de contact devrait ralentir son mouvement !

...et pourtant !



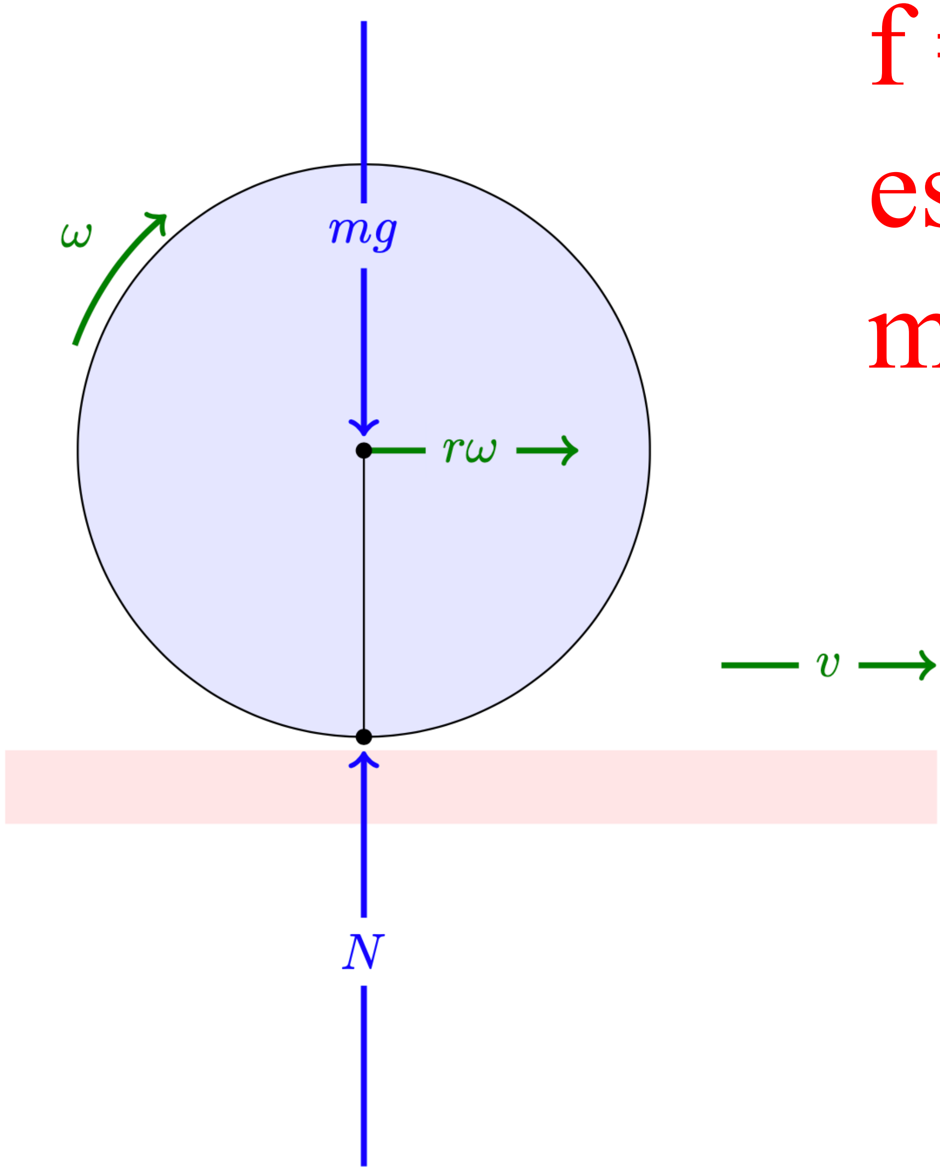
Analysons ce problème calmement !

$$\begin{cases} a & = & r\,\alpha \\ ma & = & f \\ I\alpha & = & -r\,f \end{cases}$$

Le frottement ralentit la progression de la roue mais a tendance à augmenter sa vitesse de rotation !

Ce modèle semble sérieusement déficient !

Les équations sont écrites par rapport aux normes des vecteurs tels que dessinés sur la figure !



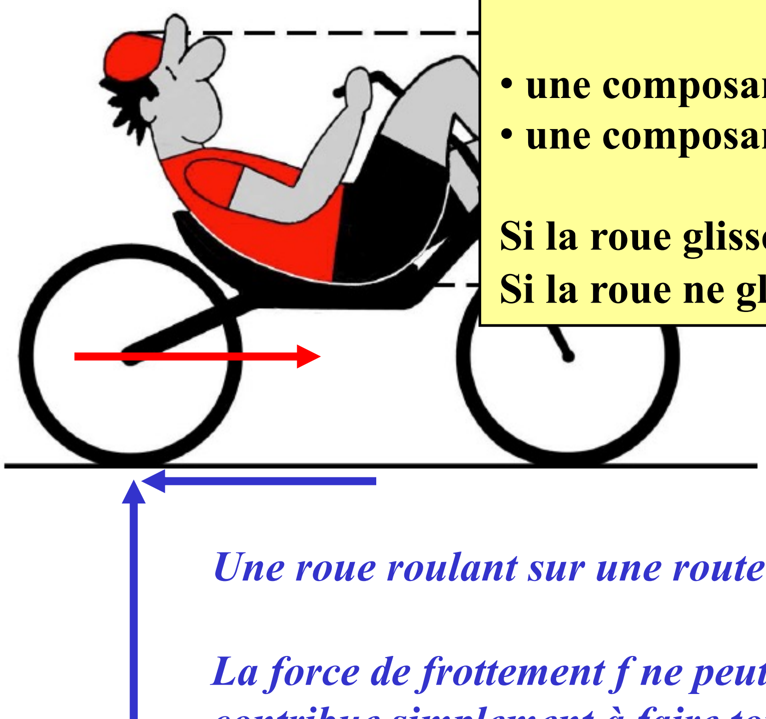
f = 0 est la solution mathématique !

$$\begin{cases} a = r\alpha \\ ma = 0 \\ I\alpha = 0 \end{cases}$$

La roule ne s'arrêtera jamais de rouler !

C'est pas possible cela ?

Est-ce que le frottement roue-sol devrait ralentir notre cycliste ?



La force de contact se compose de :

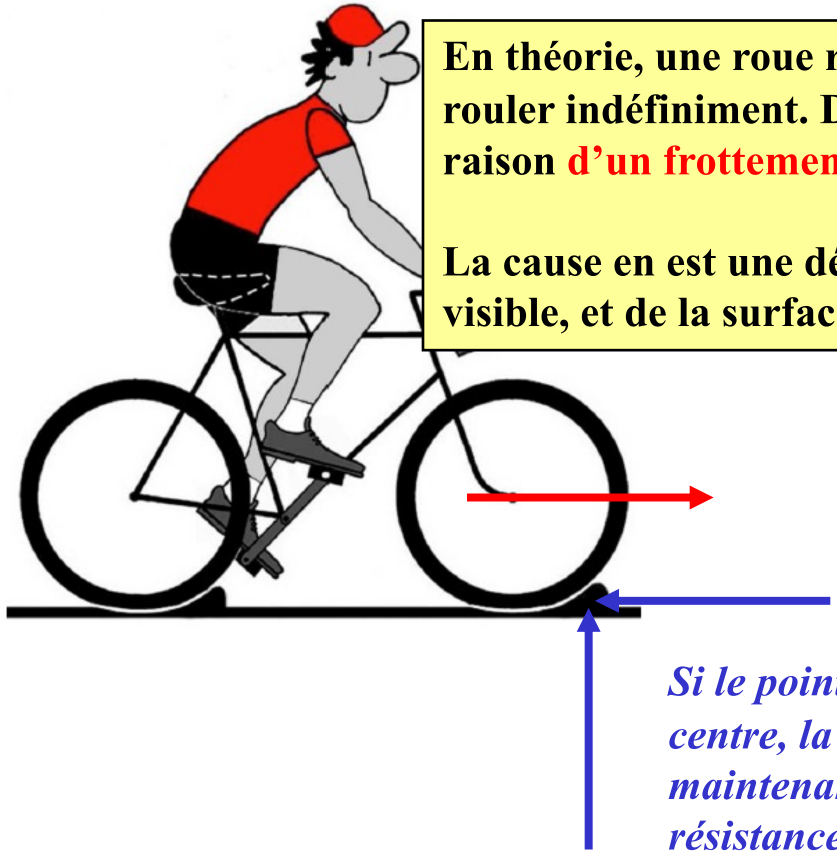
- **une composante perpendiculaire : N**
- **une composante tangentielle : f**

Si la roue glisse (dérape) sur la route, frottement cinétique !
Si la roue ne glisse pas, frottement statique !

Une roue roulant sur une route va finir par s'arrêter de rouler…

La force de frottement f ne peut pas expliquer cela, car son effet contribue simplement à faire tourner la roue de plus en plus vite !

En réalité, on est freiné par la résistance au roulement !



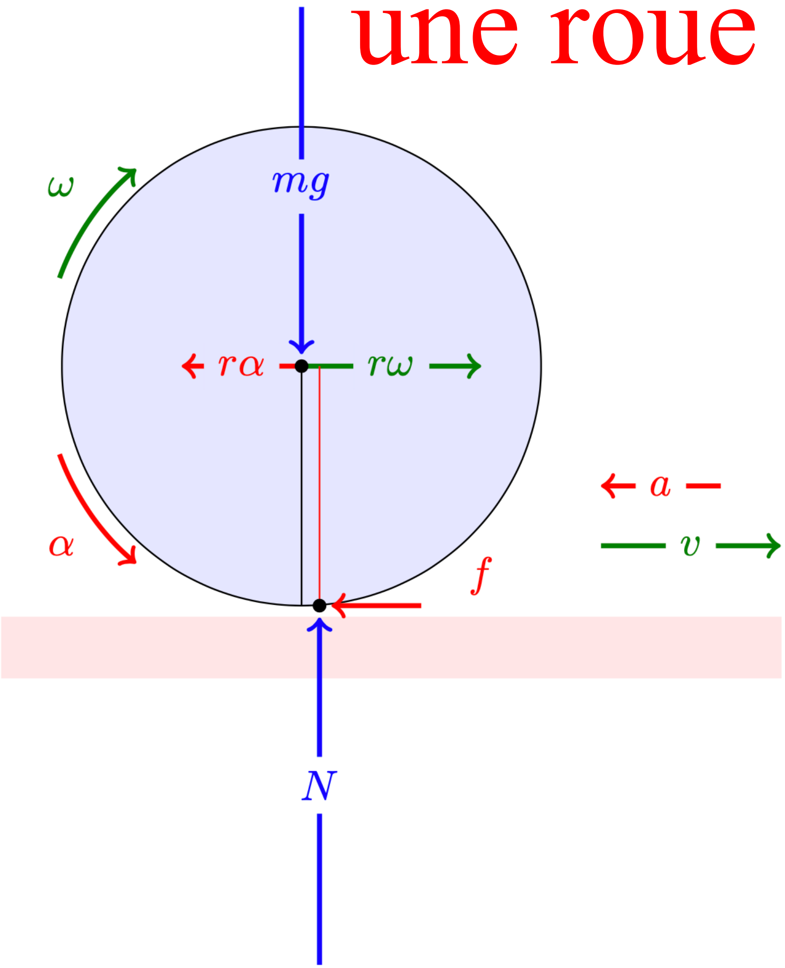
En théorie, une roue rigide sur une surface plane devrait rouler indéfiniment. Dans la pratique, ce n'est pas le cas en raison d'un frottement dit de roulement .

La cause en est une déformation du pneu de la roue, bien visible, et de la surface de la route, imperceptible celle-là.

$$f_r = \mu_r N$$

Si le point de contact n'est plus sous le centre, la composante normale s'oppose maintenant à la rotation : c'est cela la résistance au roulement !

C'est la résistance au roulement qui ralentit une roue roulant sans glisser

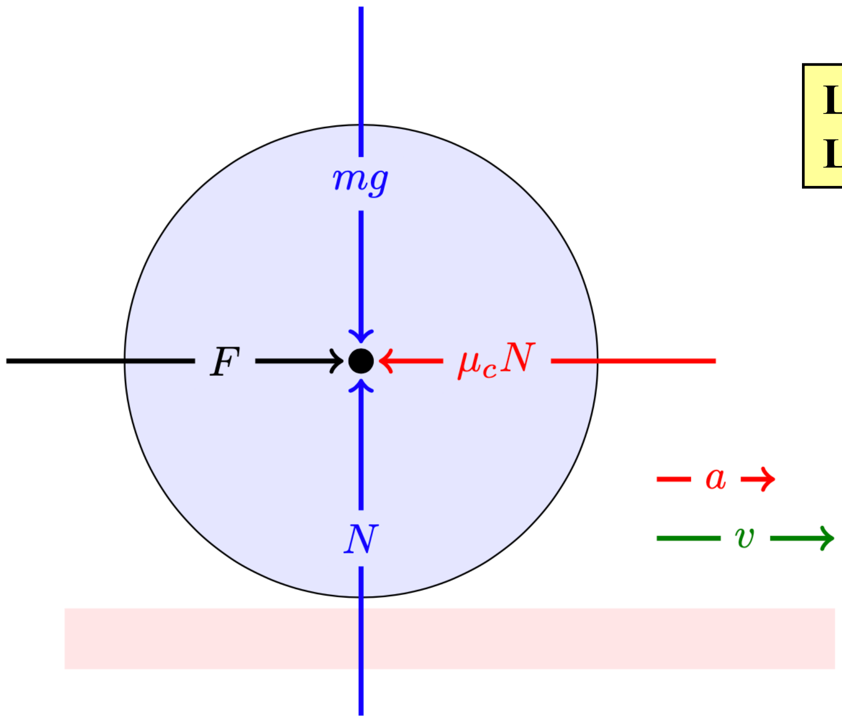


$$\begin{cases} a = r\,\alpha \\ ma = f \\ I\alpha = \epsilon\, N - r\, f \end{cases}$$

Mais les surfaces ne sont pas parfaitement rigides et vont subir une déformation !

L'effet combiné de f et de N correspond au frottement par roulement et aux pertes d'énergie dues à la déformation de la roue.

Modèle de la mécanique du point pour une roue qui roule sans glisser



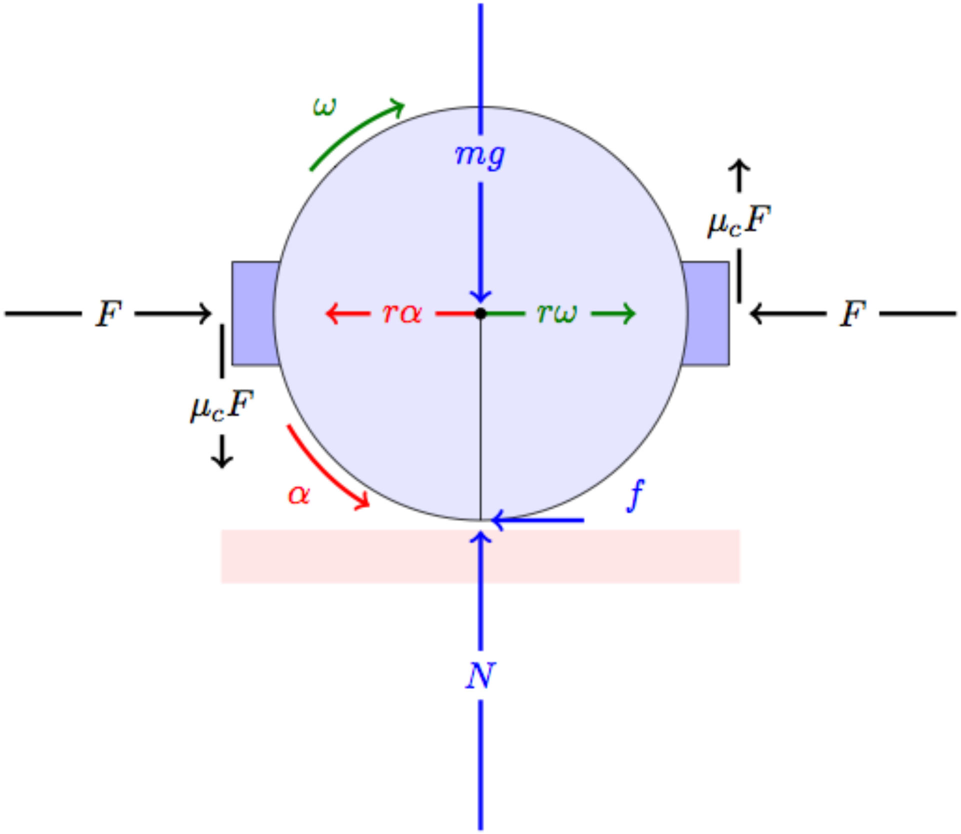
La force du moteur F fait avancer la voiture !
Le frottement de roulement la ralentit !

$$ma = F - \mu_r mg$$

En pratique, c'est surtout la force de trainée proportionnelle au carré de la vitesse qui ralentit une voiture sur l'autoroute.

Oui, oui, oui : diminuer sa vitesse permet vraiment d'économiser beaucoup de carburant !

Freinons !

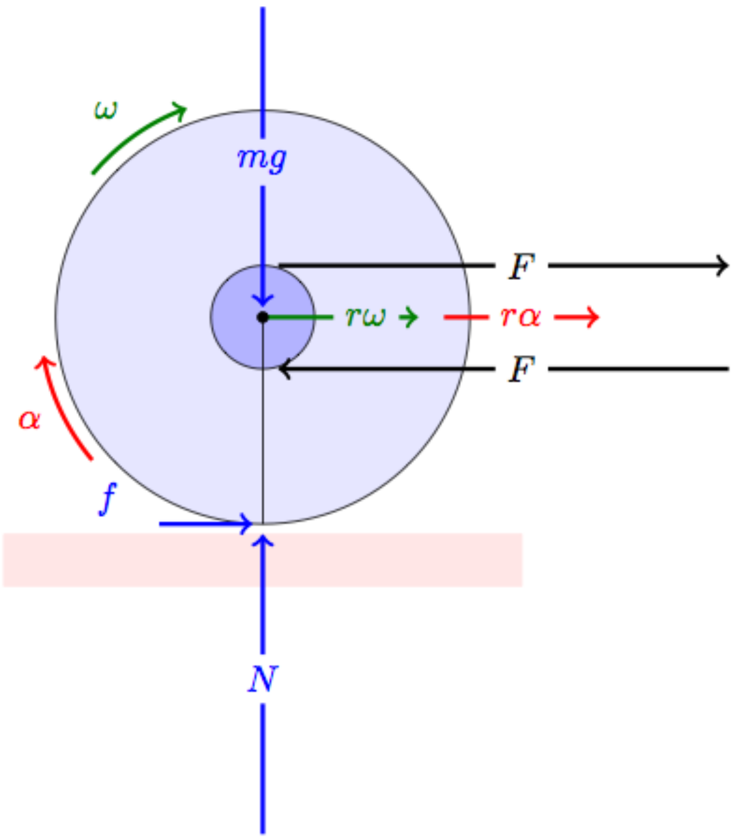


$$\begin{cases} ma = f \\ I\alpha = 2\mu_c\, r\, F - r\, f \end{cases}$$

Le freinage optimal est obtenu lorsque la roue est juste sur le point de glisser.

Si on freine trop brutalement, la roue se bloque et glisse sur la route !

Accélérons !



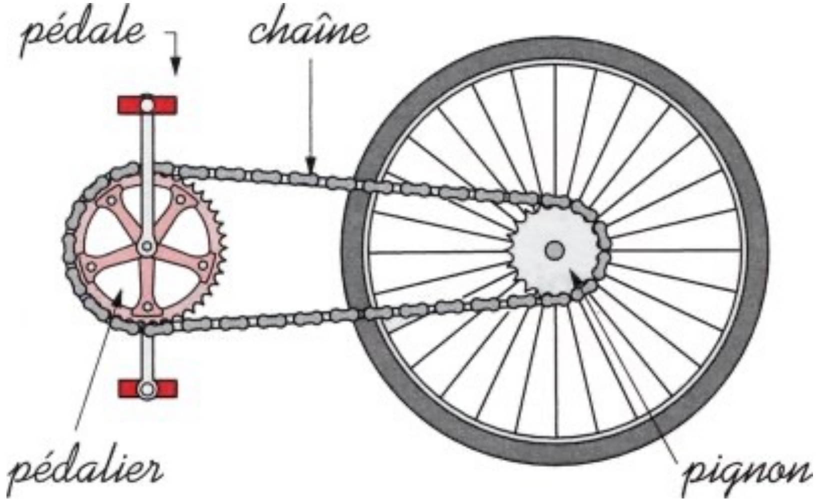
$$\begin{cases} ma = f \\ I\alpha = 2r_e\,F - r\,f \end{cases}$$

Comme la partie inférieure de la roue pousse sur la route vers l'arrière, la force de frottement est dirigée vers l'avant !

Transmission du mouvement de rotation

La vitesse de la chaine est identique sur le pignon du dérailleur et sur l'entrainement du pédalier

$$\underbrace{\omega_p r_p}_{v_p} = \underbrace{\omega_e r_e}_{v_e}$$



$$v = \omega r = \omega_p r = \omega_e \frac{r \; r_e}{r_p}$$

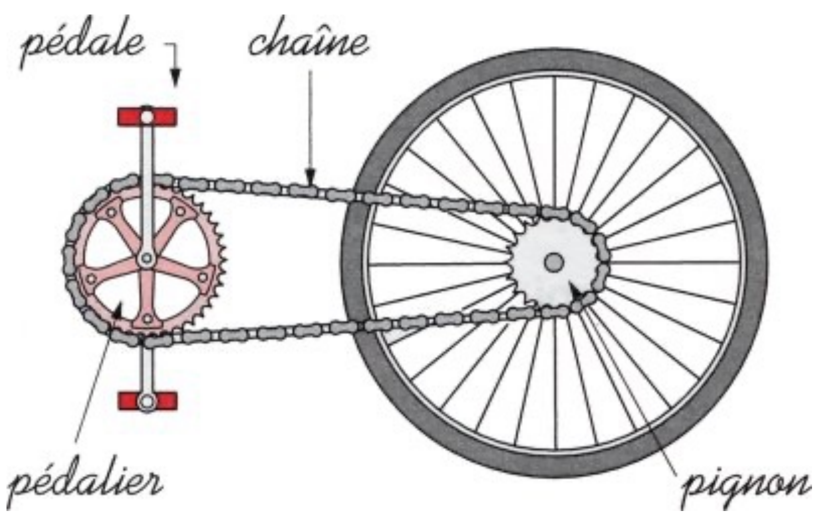
La vitesse angulaire de la roue est identique pour le pignon et la roue : on en déduit ainsi la vitesse du vélo !

Exemple

Un tour de pédalier par seconde
Rayon du pédalier = 10 cm
Rayon du pignon du dérailleur = 5 cm ou 2.5 cm
Rayon de la roue = 35 cm

$$\underbrace{\omega_p r_p}_{v_p} = \underbrace{\omega_e r_e}_{v_e}$$

$$v = \omega r = \omega_p r = \omega_e \frac{r\ r_e}{r_p}$$



Quelle sera la vitesse du vélo ?
Et avec un pignon avec deux fois moins de dents, quelle dviendra la vitesse du vélo ?
Comment conserver la même vitesse avec ce nouveau pignon ?

Un petit calcul tout simple

Un tour de pédalier par seconde
Rayon du pédalier = 10 cm
Rayon du pignon du dérailleur = 5 cm ou 2.5 cm
Rayon de la roue = 35 cm

$$v = \omega r = \omega_p r = \omega_e \frac{r \ r_e}{r_p}$$

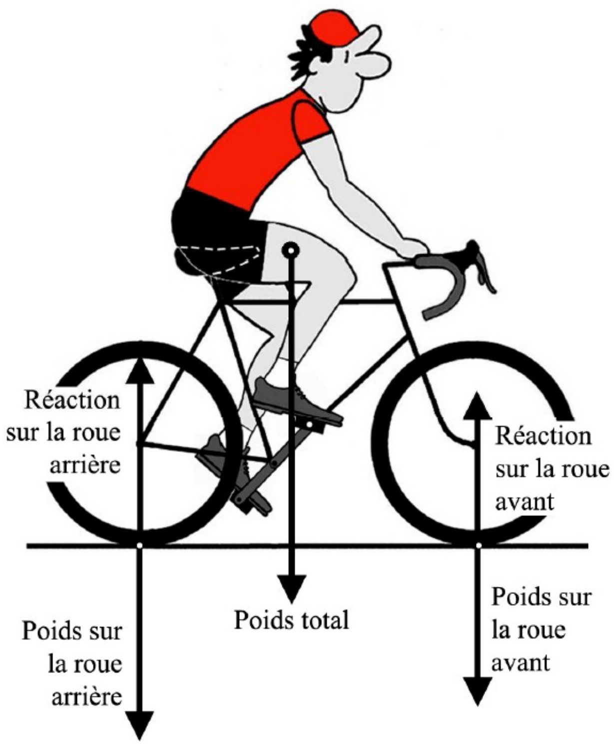
Idéalement, on choisit le pignon pour que l'effort par coup de pédale et la fréquence de pédalage restent constante pendant le trajet.

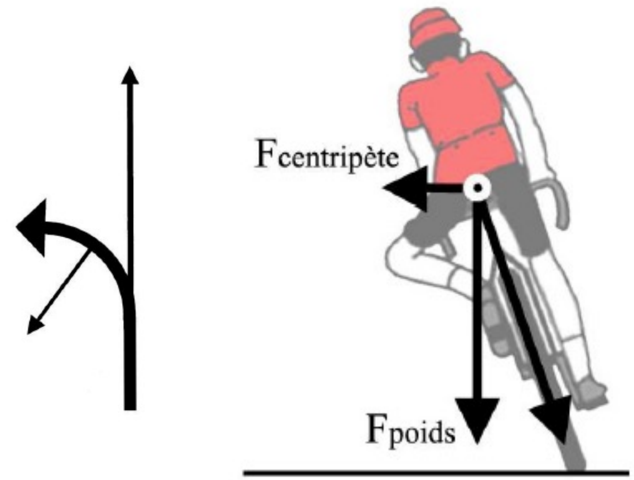
Evidemment, cela dépend de la puissance musculaire du cycliste !
On sélectionnera une plus grande vitesse (un petit pignon !) si c'est trop facile…
Et inversement, on rétrogradera si la montée devient trop dure…

$$v \;=\; \omega_e \frac{r \ r_e}{r_p} \;=\; 6.28 \times \frac{0.350 \times 0.100}{0.050} \;=\; 4.41 \ \mathrm{m/s} \;=\; 15.9 \ \mathrm{km/h}$$

$$v \;=\; \omega_e \frac{r \ r_e}{r_p} \;=\; 6.28 \times \frac{0.350 \times 0.100}{0.025} \;=\; 8.82 \ \mathrm{m/s} \;=\; 31.8 \ \mathrm{km/h}$$

Comment le cycliste peut-il se diriger avec efficacité ?

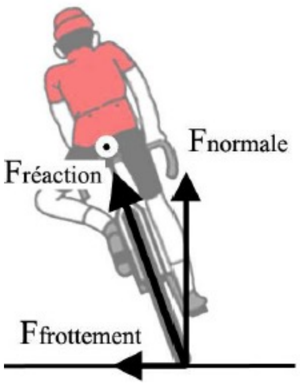




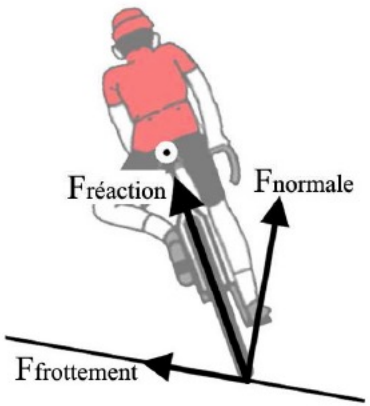
Pour prendre un virage, il faut produire une force centripète pour obtenir une accélération centripète.

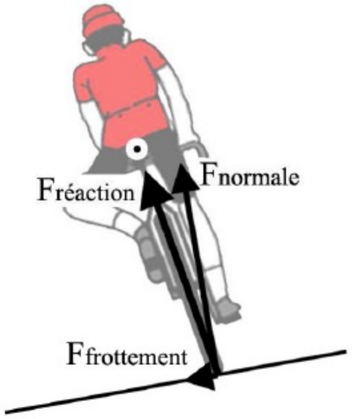
En vélo, on obtient cela en portant le centre de gravité du côté vers lequel on veut aller, en se penchant donc vers l'intérieur du virage.

Grâce au frottement, on peut tourner en s’inclinant !



Si la route est en dévers,
le frottement est augmenté.
Le risque de dérapage grandit !





La force de frottement diminue
si le virage est relevé.
De tels virages sont
plus faciles à négocier.

- **Le frottement joue un rôle essentiel dans le roulement sans glissement d'une roue.**
- **L'imperfection du contact avec le sol est modélisé par le frottement de roulement**
- **Il y a roulement sans glissement lorsque la norme de la vitesse du centre est égale à celle de la vitesse de rotation tangentielle.**

Condition de roulement sans glissement

$$\begin{aligned} v &= \omega r \\ a &= \alpha r \end{aligned}$$