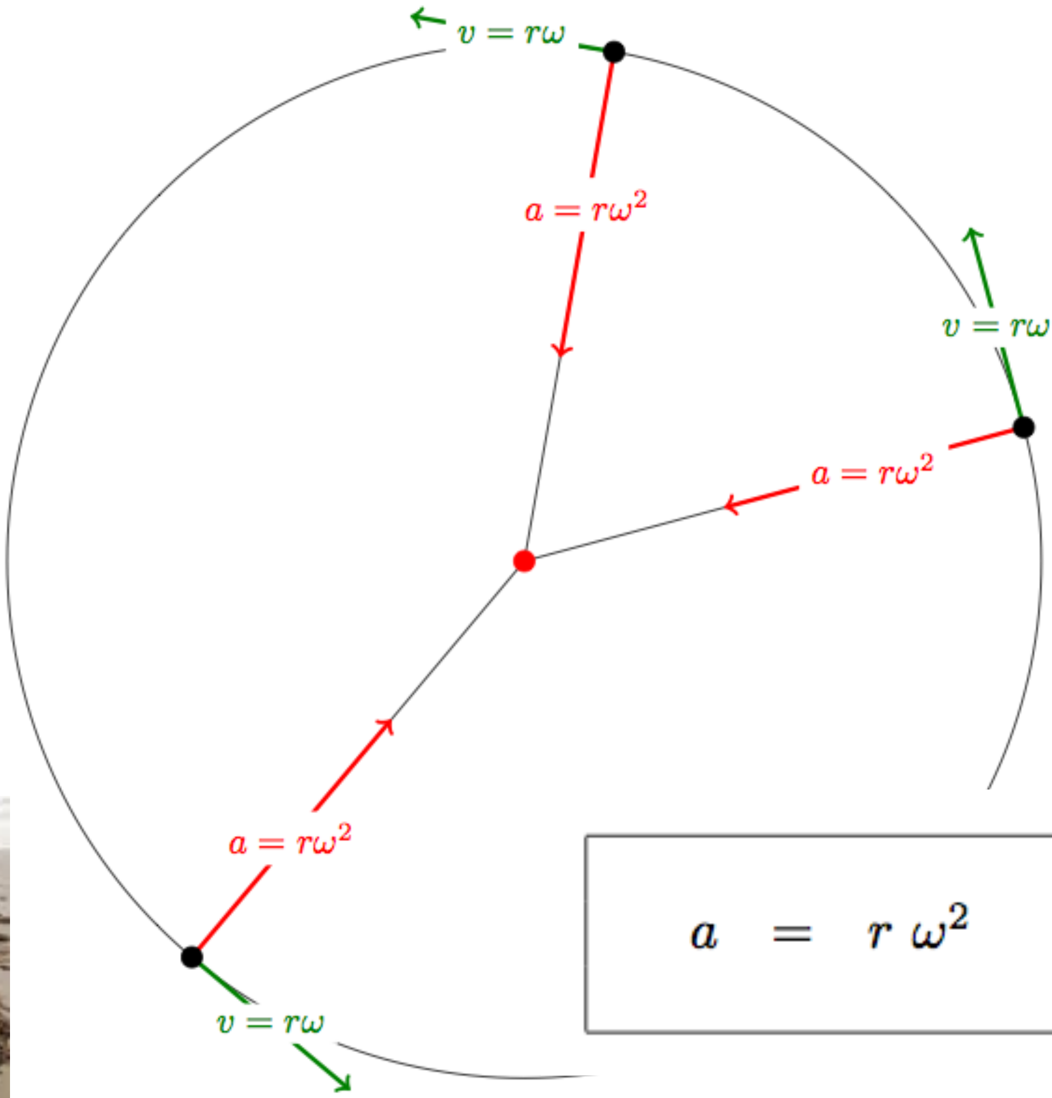
Mouvement circulaire uniforme

$$v = r\,\omega$$

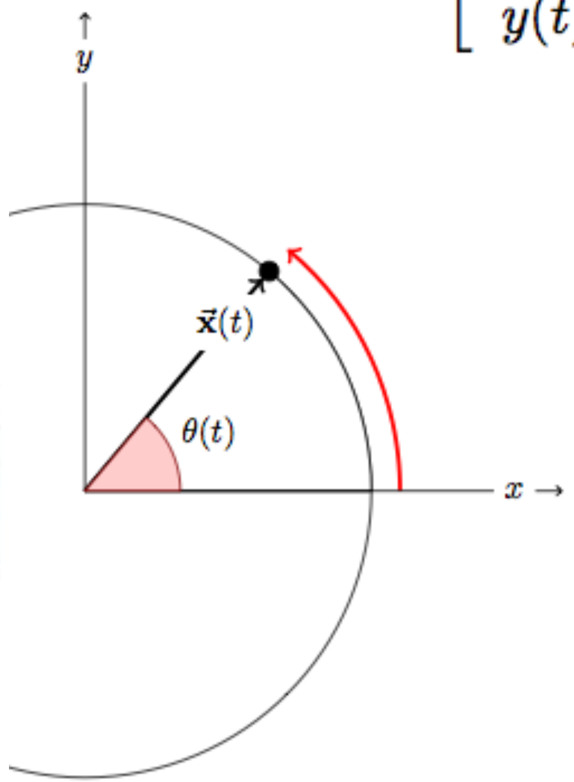


$$a = r\,\omega^2$$

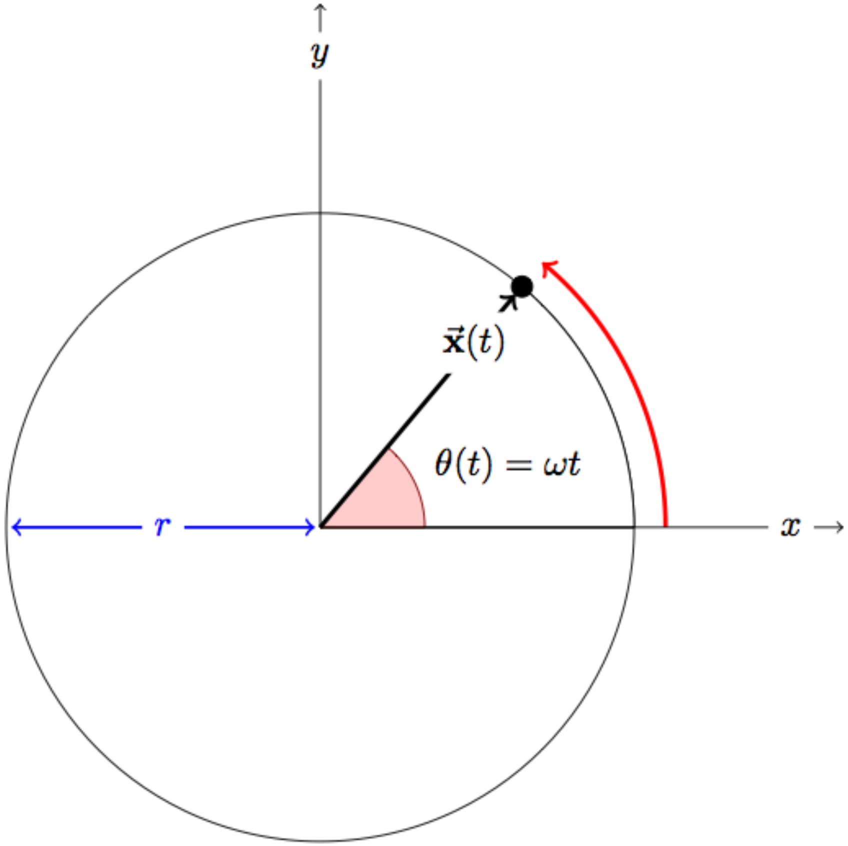
Vitesse angulaire constante : ω
Vitesse tangentielle
Accélération centripète

Le mouvement circulaire est harmonique

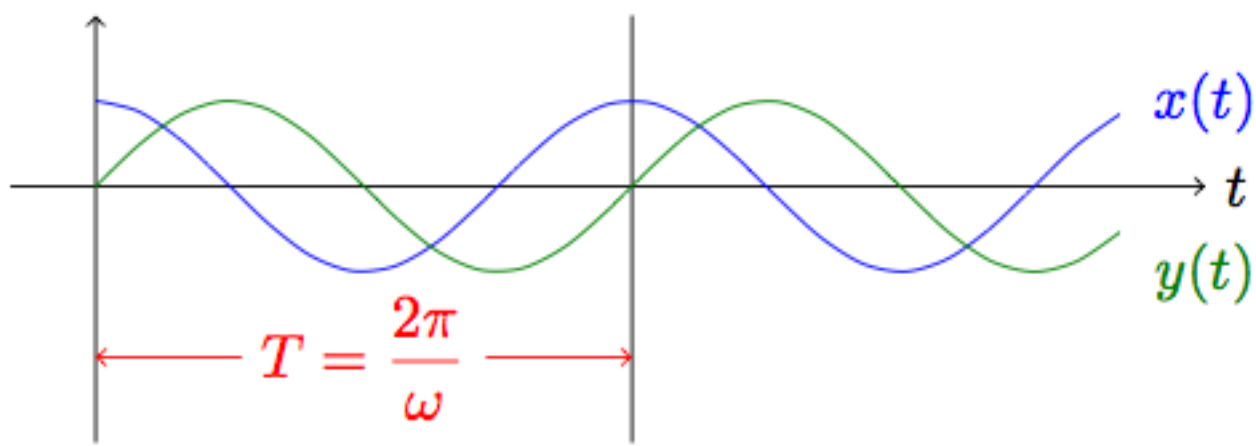
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta(t)) \\ r\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

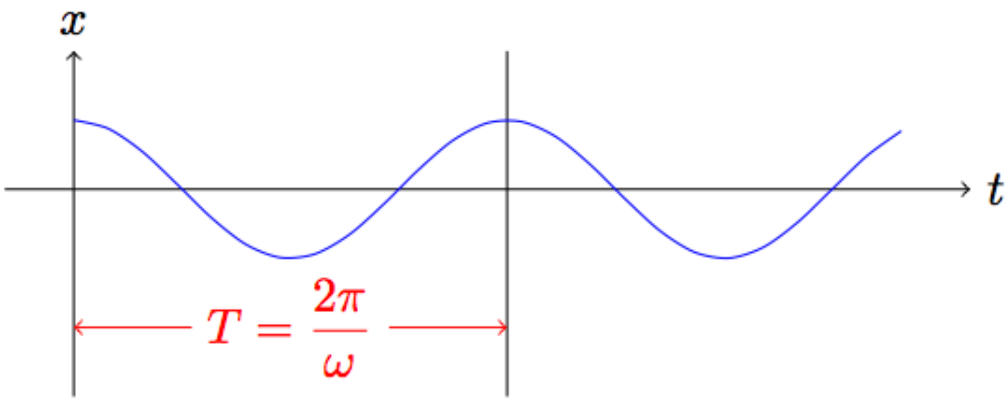


Le retour du cos et du sin



$$
\begin{aligned}
x(t) &= r \cos\left(\omega\, t\right) \\
y(t) &= r \sin\left(\omega\, t\right)
\end{aligned}
$$





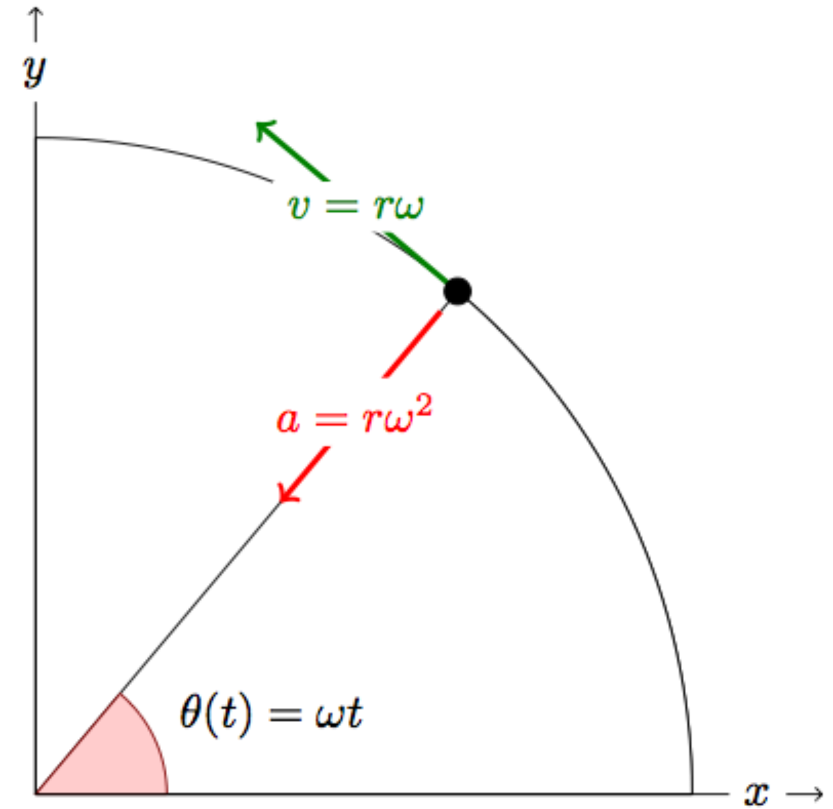
$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi}}$$

$$\boxed{v = r\,\omega}$$

Période : T
Fréquence : f
Vitessse angulaire : ω

Accélération centripète



$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = r\omega \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = r\omega^2 \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

Vitesse tangentielle

Aspirateur
600 tours/minute
R = 10 cm

$$f = 10 \text{ Hertz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 0.1 \text{ s}$$

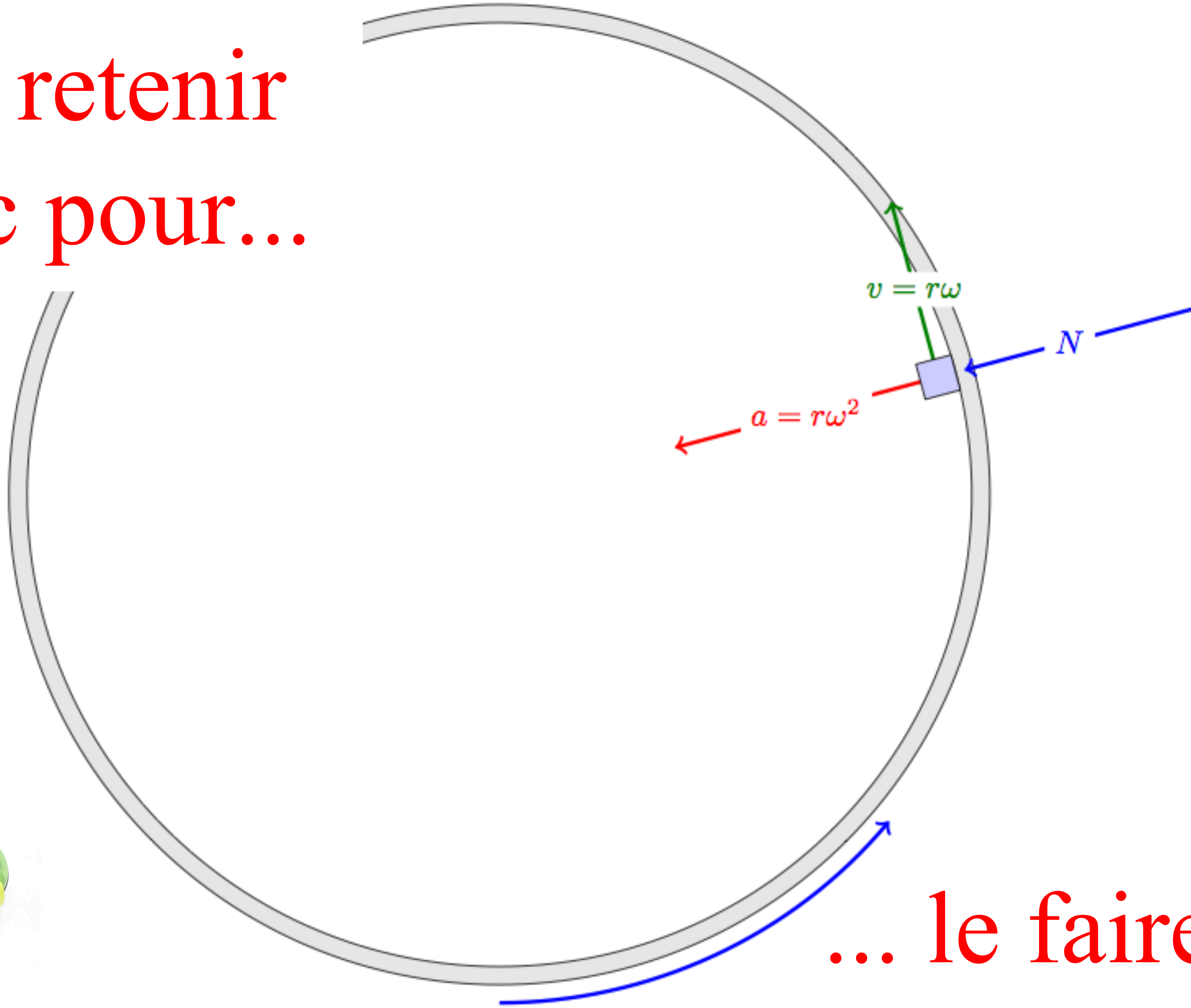
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 62.8 \text{ rad/s}$$

$$v = r\,\omega = 6.28 \text{ m/s}$$

$$a = r\,\omega^2 = 394.4 \text{ m/s}^2$$

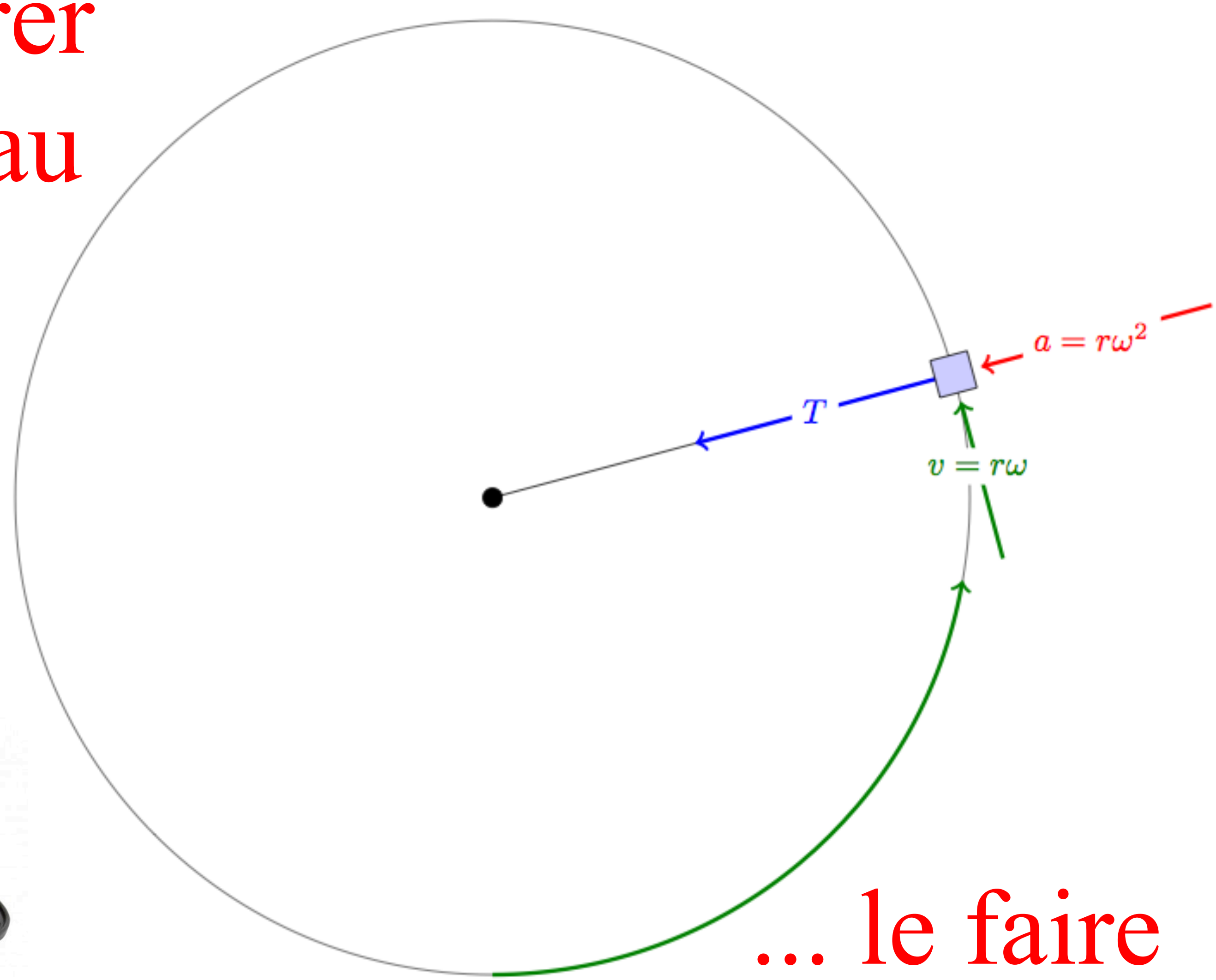
C'est quarante fois
la valeur de l'accélération de la gravité !
C'est une valeur très élevée !

Il faut retenir le bloc pour...



... le faire tourner !

Il faut tirer sur le seau pour...



... le faire tourner !

Machine à laver
3600 tours/minute
R = 15 cm

$$f = 60 \text{ Hertz}$$

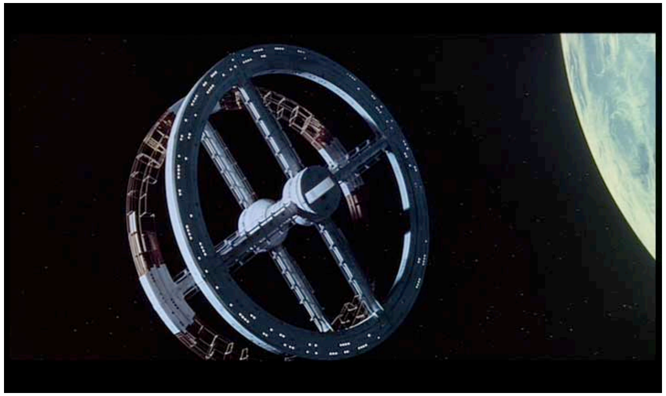
$$T = \frac{1}{f} = 0.017 \text{ s}$$

$$\omega = 2\pi f = 377 \text{ rad/s}$$

$$v = r\,\omega = 56.5 \text{ m/s}$$

$$a = r\,\omega^2 = 21318 \text{ m/s}^2$$

C'est deux mille fois
la valeur de l'accélération de la gravité !
C'est une valeur vraiment très très élevée !

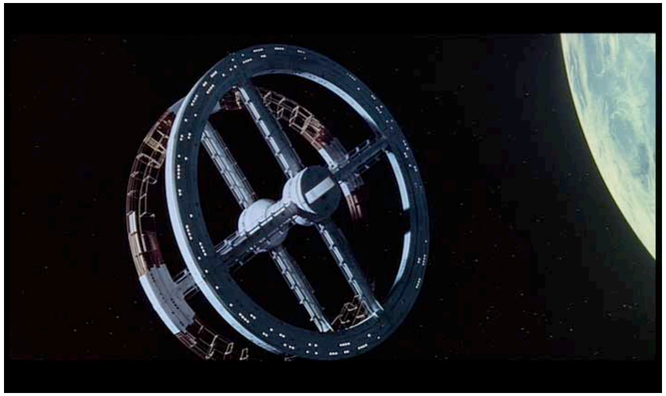


Station spatiale
3 tours/minute
R = 100 m

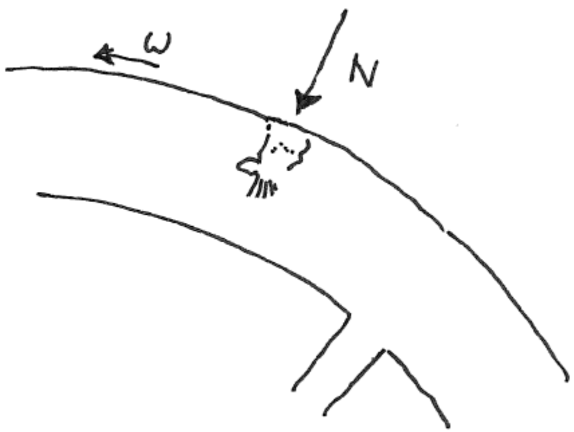
$$\omega^2 = 0.1\ (\mathrm{rad/s})^2$$

$$\begin{aligned}
a = r\,\omega^2 &= 10\ \mathrm{m/s^2} \\
\omega &= 0.3\ \mathrm{rad/s} \\
v = r\,\omega &= 30\ \mathrm{m/s} \\
f = \frac{\omega}{2\pi} &= 0.05\ \mathrm{Hertz} \\
T = \frac{1}{f} &= 20\ \mathrm{s}
\end{aligned}$$

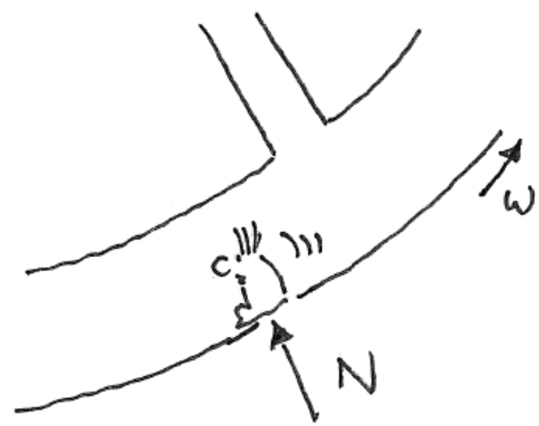
On fait tourner la station spatiale
pour obtenir une gravité artificielle !



Station spatiale
3 tours/minute
R = 100 m



On fait tourner la station spatiale pour obtenir une gravité artificielle !



Le MRUA :-)

$$\begin{aligned} y''(t) &= a \\ y'(t) &= \overbrace{v_0 + a\, t}^{v(t)} \\ y(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{a\, t^2}{2} \end{aligned}$$

Des millions de gens ont vu tomber une pomme,
Newton est le seul qui se soit demandé pourquoi...
(Bernard Baruch)

Le MCUA :-)

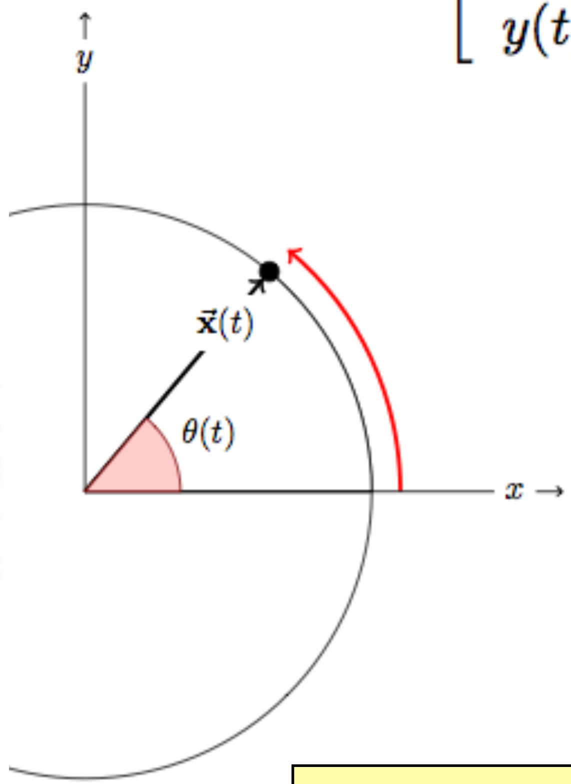
$$\begin{aligned}
\theta''(t) &= \alpha \\
\theta'(t) &= \overbrace{\omega_0 + \alpha\, t}^{\omega(t)} \\
\theta(t) &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha\, t^2}{2}
\end{aligned}$$

Maintenant, faisons strictement et exactement la même chose avec un mouvement circulaire !

Définissons le MCUA !

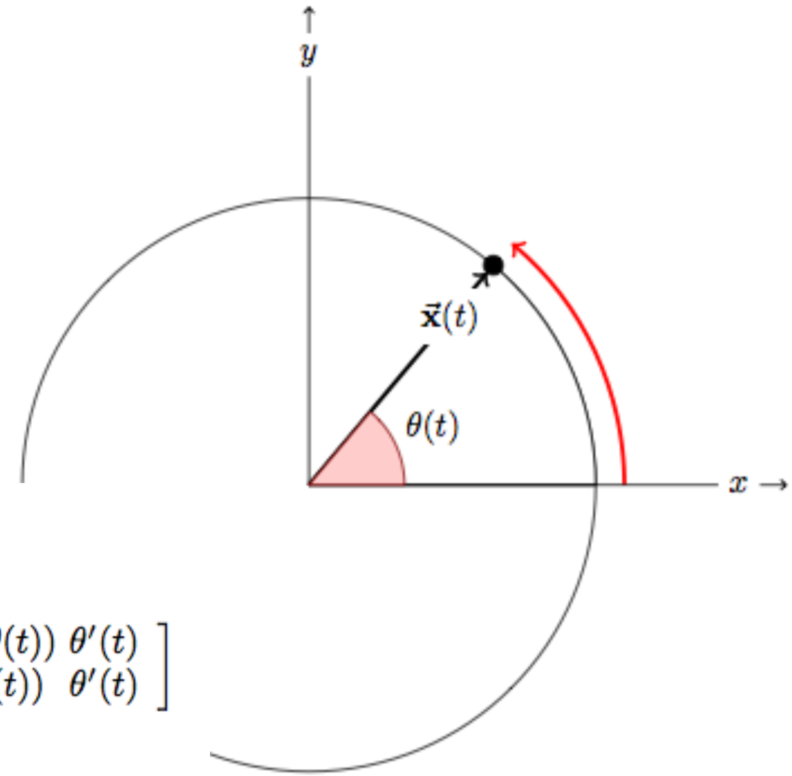
Le MCUA :-)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta(t)) \\ r\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$



Mouvement circulaire non-uniforme...
Vitesse angulaire non-constante
Accélération angulaire constante

Calculons la vitesse et l'accélération !



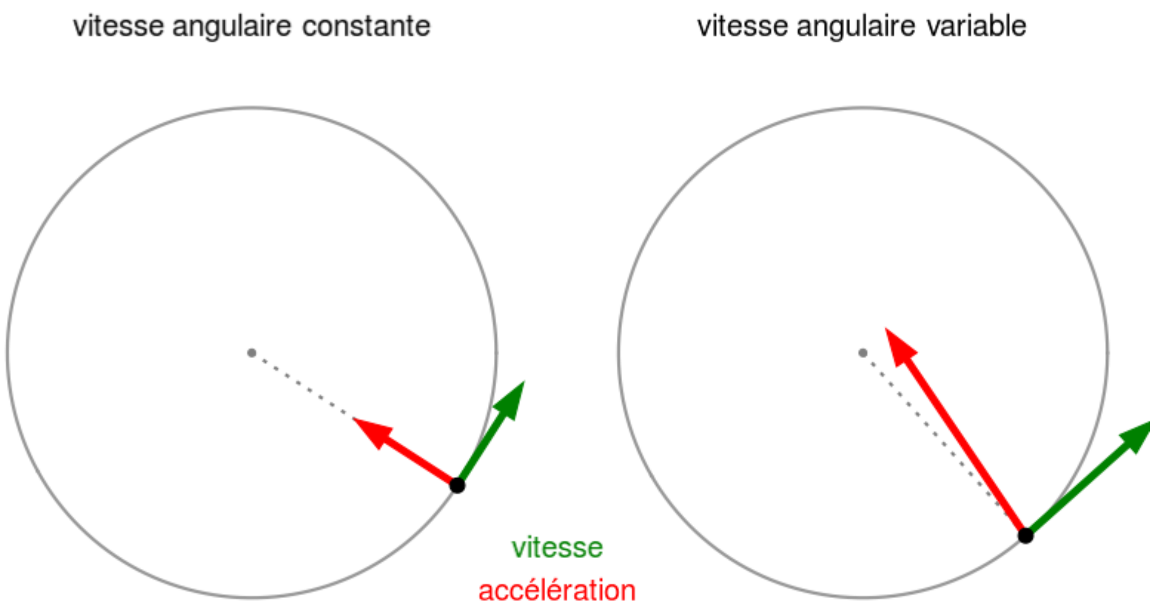
$$\vec{\mathbf{v}}(t) = r\,\omega(t)\begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = r\omega'(t)\begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega(t)\begin{bmatrix} -\cos(\theta(t))\ \theta'(t) \\ -\sin(\theta(t))\ \theta'(t) \end{bmatrix}$$

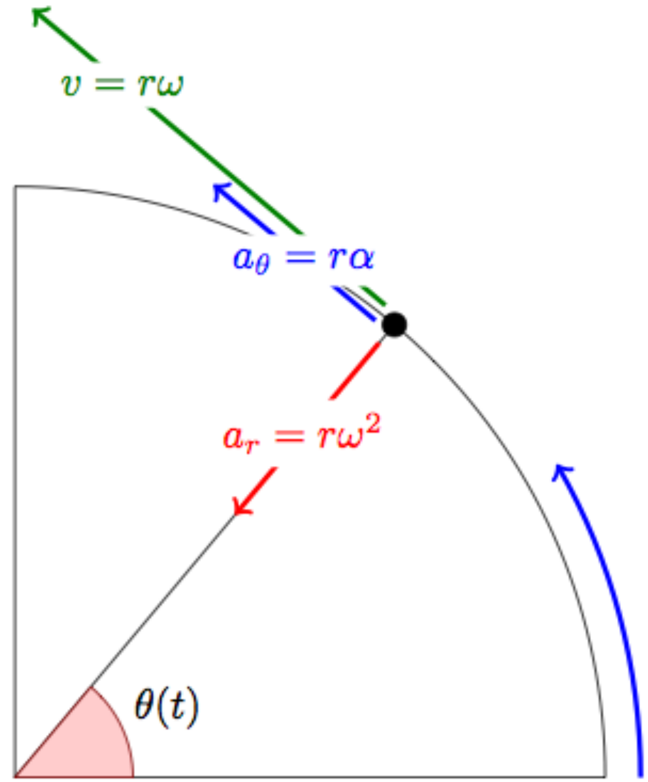
$$= r\alpha\begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega^2(t)\begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

La vitesse est toujours bien tangente au mouvement !
Mais son module est désormais variable
car la vitesse angulaire n'est pas constante !

Une vitesse angulaire variable crée une accélération tangentielle !



L'accélération centripète provient de la variation de direction de la vitesse.
L'accélération tangentielle provient de la variation du module de la vitesse.



$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = r\omega(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = r\alpha \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega^2(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

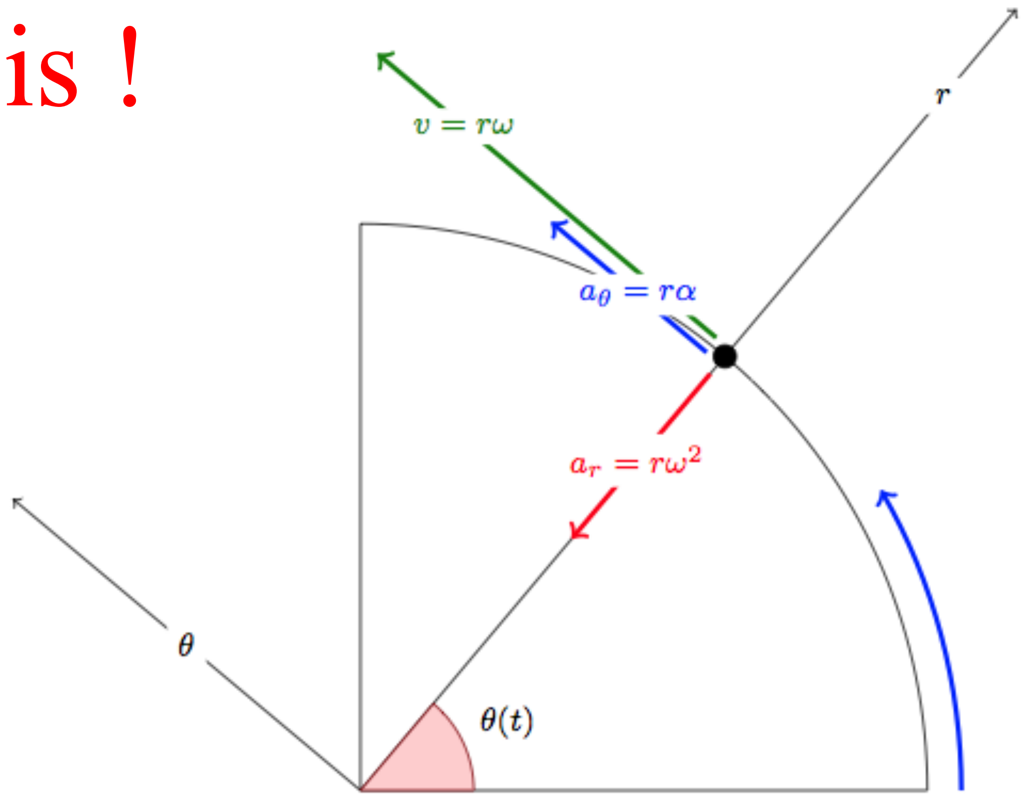
Accélération tangentielle

Accélération centripète

Avec des axes bien choisis !

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix}$$

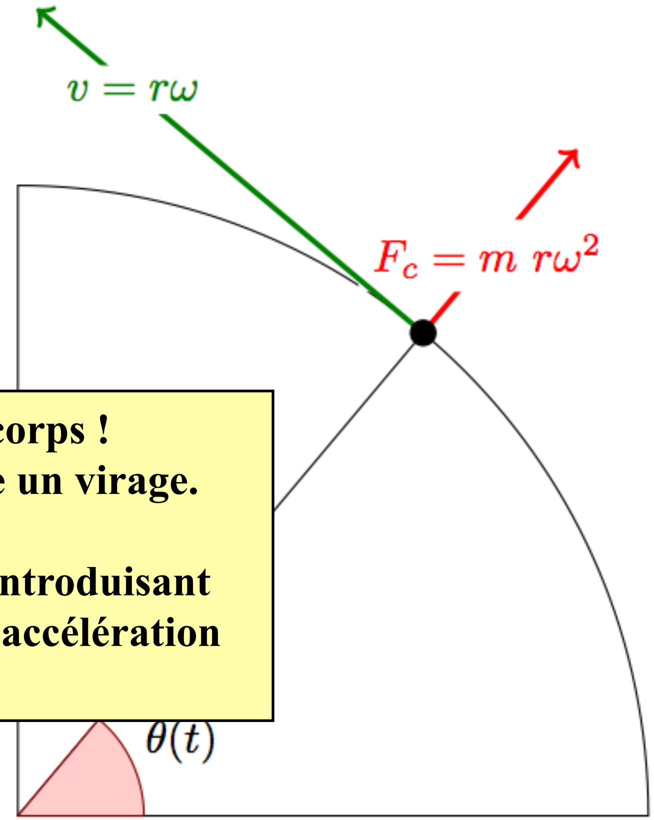
$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}$$



Vitesse : $v = r\omega$ [m/s]

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$ [m/s^2]

Vitesse angulaire ω [radians/s] et accélération angulaire α [radians/s^2]



On effectue tous les calculs dans un repère mobile lié au corps !
Par exemple, on attache le repère à la voiture qui effectue un virage.

Ensuite, on tient compte du fait que le repère tourne, en introduisant une pseudo-force centrifuge qui aura le même effet que l'accélération centripète qu'on obtient dans un repère fixe !

Remplacer
l'accélération centripète
par la pseudo-force centrifuge !

Dynamique du mouvement circulaire

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$\downarrow$$

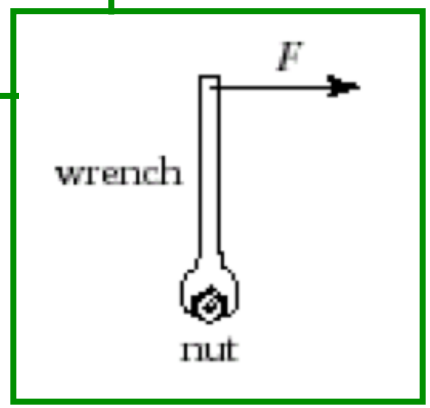
$$m\begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \end{bmatrix}$$

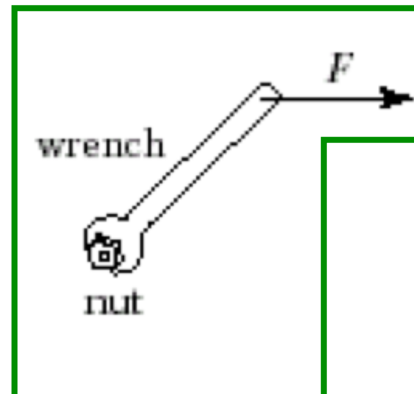
Comment faire tourner le train ?

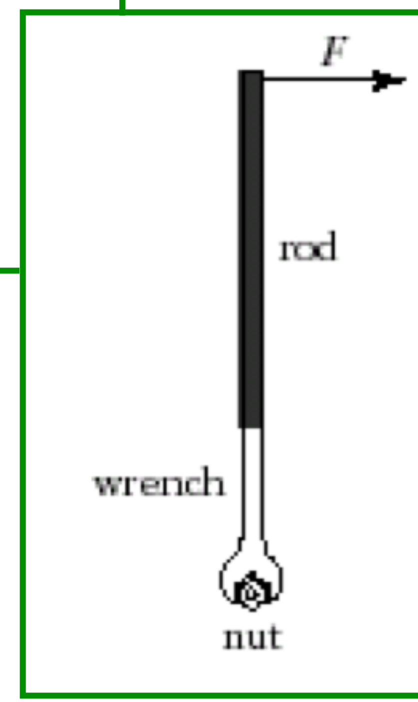
$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$m\begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \end{bmatrix}$$

Dans un mouvement circulaire, seules les forces qui ont un moment non nul par rapport au centre de rotation vont augmenter la vitesse de rotation !



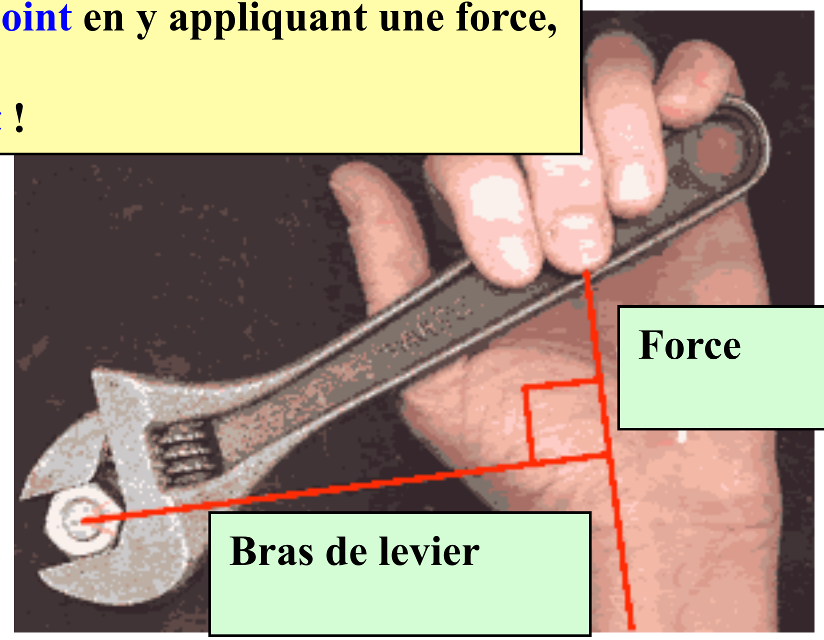




C’est koi
le bon mouvement,
Monsieur le plombier :-)

Ce qui fait tourner la clé, c'est le moment !

**Supposons que l'on fixe une barre en un point et
que l'on souhaite la faire tourner autour de ce point en y appliquant une force,
l'accélération angulaire sera proportionnel
au moment de cette force par rapport à ce point !**



$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \boxed{\text{Forces} \quad \sum \vec{\mathbf{F}}}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right)\,dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\,dt$$

En supposant que les forces sont constantes.

$$\left[m\,\vec{\mathbf{v}}\right]_b - \left[m\,\vec{\mathbf{v}}\right]_a = \sum \vec{\mathbf{F}}\,(t_b - t_a)$$

$$\Delta\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}\,\Delta t \quad \text{Impulsions}}$$

Bilan
de la quantité
de mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right)\cdot\vec{\mathbf{v}} = \boxed{\text{Puissance des forces} \quad \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right)\,dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\,dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}\,dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{x}}$$

En supposant que les forces sont constantes.

$$\left[\tfrac{1}{2}m\,v^2\right]_b - \left[\tfrac{1}{2}m\,v^2\right]_a = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\left(\vec{\mathbf{x}}_b - \vec{\mathbf{x}}_a\right)$$

$$\Delta\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right) = \boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}} \quad \text{Travail des forces}}$$

Bilan d’énergie cinétique

Moments des forces

$$\vec{\mathbf{r}} \times \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \boxed{\sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right)\,dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}\,dt$$

En supposant que les moments sont constants.

$$\left[m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right]_b - \left[m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right]_a = \sum(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}})\,(t_b - t_a)$$

$$\Delta\left(m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right) = \boxed{\sum(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}})\,\Delta t}$$

Impulsions angulaires

Bilan de moment cinétique

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\,m\,\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{r}}\times m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}$$

- **Dans un mouvement circulaire, l'accélération a toujours une composante centripète. Les variations de la vitesse angulaire génère une composante tangentielle.**

- **Seules les forces dont le moment n'est pas nul par rapport au centre de rotation permettent de modifier la vitesse angulaire d'un mouvement circulaire.**

- **Les forces modifient la quantité de mouvement**
  Les moments modifient le moment cinétique

Vitesse maximale sans risque de dérapage ?

Automobile de 1000 kg
Angle de 30 degré par rapport à l'horizontale
Rayon du virage : 100 m
Coefficient de frottement statique de 0.1