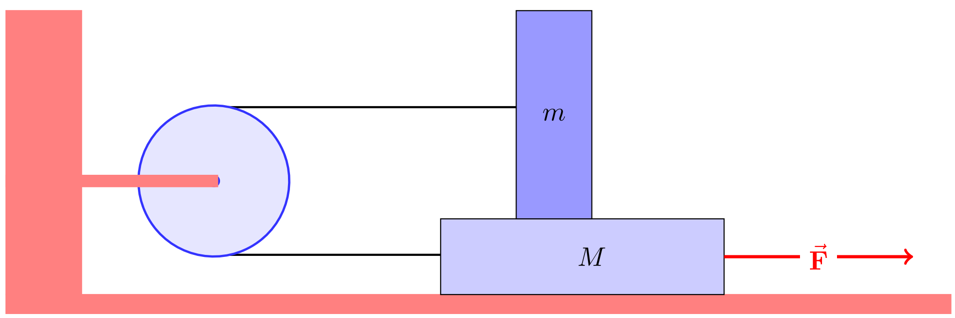
KINE11-EDPH11	
Janvier 2016	*Introduction à la mécanique*
IEPR 1011 -Bleu-	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

1 Deux blocs superposés...

Attention ! Il faut répondre exclusivement sur l'unique feuille de réponse fournie.
Ce questionnaire peut servir de brouillon, mais ne sera jamais lu par le correcteur !

Un bloc de masse $m = 2$ kg est placé sur un autre bloc de masse $M = 4$ kg.
Les deux blocs sont reliés entre eux par une corde via une poulie.
On doit tenir compte du frottement entre les deux blocs ainsi qu'entre le sol et le bloc inférieur avec un coefficient de frottement cinétique $\mu_c = 0.2$ unique pour tous les cas.
On doit également tenir compte de l'inertie de la poulie qui est supposée être un cylindre creux de rayon $R = 10$ cm et de moment d'inertie $I = 50$ kg cm^2.

Initialement, le système est immobile et tel que représenté sur le schéma ci-dessous. A l'instant $t = 0$, on tire sur le bloc inférieur avec une force constante F afin que les deux blocs se déplacent (en sens opposé!) avec une accélération de même module $a = 2\ m/s^2$. Dans les calculs, on utilisera $g = 10$ m/s^2.



1. Quelle est la masse m_p de la poulie ?

   Le moment d'inertie d'un cylindre creux est donné par $I = m_p R^2$.
   On en déduit immédiatement :

$$\boxed{m_p = \frac{I}{R^2} = \frac{50 \text{ kg cm}^2}{10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}} = 0.5 \text{ kg}}$$

   La plupart des étudiants obtiennent cette valeur.
   Obtenir une masse de 50000 kg *devrait quand-même vous sembler suspect....*
   Eeeeh biin non pour certains étudiants !
   Attention, il faut bien distinguer la masse de la poulie et les autres masses :-)

2. Quelle est l'accélération angulaire α de la poulie ?

   On sait que $a = \alpha R$.
   On en déduit immédiatement :

$$\boxed{\alpha = \frac{a}{R} = \frac{2 \text{ m/s}^2}{0.1 \text{ m}} = 20 \text{ rad/s}^2}$$

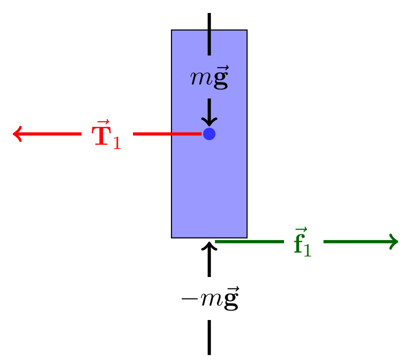
   Beaucoup d'étudiants obtiennent cette valeur.
   L'unique difficulté consistait à exprimer correctement des centimètres en mètres !
   Attention, il ne faut pas multiplier par un quelconque facteur π : erreur trop fréquente !
   Attention, il faut bien relier l'accélération horizontale de la corde et l'accélération angulaire de la poulie : il ne s'agit donc pas de calculer la contribution centripète de l'accélération d'un point matériel de la poulie.... autre erreur commise par pas mal d'étudiants !

3. Sur trois schémas distincts, dessiner l'ensemble des forces sur la poulie, le bloc supérieur et le bloc inférieur. Y indiquer clairement le nom et la notation habituelle pour chacune des forces.

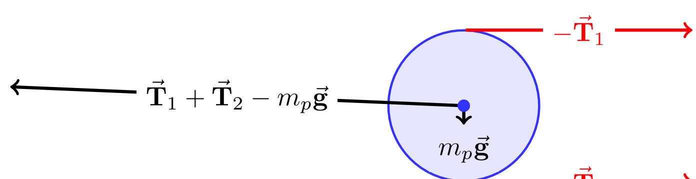
   C'est la partie essentielle de la question : bien dessiner les forces sur les trois corps permet directement de comprendre comment résoudre le problème. Il faut s'approprier la situation physique.
   Ici, nous allons directement résoudre le problème même si ce n'était pas demandé, mais c'est plus simple pour détailler la correction.

   - *Tout d'abord, considérons le bloc du dessus.*
     Le bilan de quantité de mouvement horizontal permet donc de déduire immédiatement T_1 !

$$\boxed{\begin{aligned} ma &= T_1 - \mu_c mg \\ &\downarrow \\ T_1 &= ma + \mu_c mg = 8 \text{ Newton} \end{aligned}}$$



   - *Il faut ensuite considérer la poulie.*



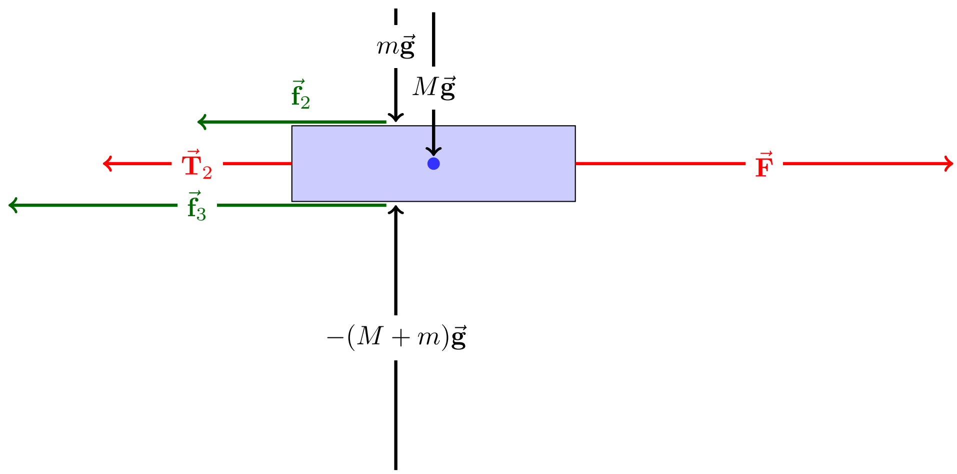
   Le bilan du moment cinétique s'écrit :

$$\boxed{\begin{aligned} I\alpha &= T_2 R - T_1 R \\ m_p R^2 \, \frac{a}{R} &= T_2 R - T_1 R \\ &\downarrow \\ T_2 - T_1 &= m_p a = 1 \text{ Newton} \end{aligned}}$$

On observe bien que si l'inertie de la poulie est négligeable que les deux tensions seront identiques. Il est aussi logique que la tension en dessous soit légèrement supérieure puisqu'elle fait avancer le bloc de dessus et elle fait tourner la poulie.
On déduit que $T_2 = 9$ Newton.

La réaction à l'attache de la poulie doit s'opposer à la force de gravité de la poulie mais surtout contre-balancer les deux tensions des cordes : c'est donc une force qui est principalement horizontale et non verticale, contrairement à ce que beaucoup d'étudiants dessinent !

- *Finalement, on considère le bloc inférieur !*



Le bilan de quantité de mouvement horizontal permet donc de déduire immédiatement F *!*

$$
\boxed{
\begin{aligned}
Ma &= F - T_2 - f_2 - f_3 \\
Ma &= F - T_2 - \mu_c mg - \mu_c(M+m)g \\
&\downarrow \\
F &= T_2 + Ma + \mu_c(2m+M)g \;=\; 33 \text{ Newton}
\end{aligned}
}
$$

Attention, il faut évidemment tenir compte du bloc supérieur qui repose sur le bloc inférieur. Il y a donc deux forces de frottement proportionnelles respectivement au poids du bloc supérieur et des deux blocs sur le sol !

Une erreur fréquente est l'oubli de l'effet du bloc supérieur sur le bloc inférieur : beaucoup d'étudiants oublient aussi la force de frottement entre les deux blocs pour le bloc inférieur, alors qu'ils en ont tenu compte pour le bloc supérieur ! Eh oui, le frottement entre les deux blocs aura une double contribution pour la force F*. L'exercice était compliqué et la correction a été faite en conséquence : même une compréhension partielle du problème permettait de réussir.*

4. Quelle est différence entre le module de la tension dans la corde au dessus et en dessous ?

Il suffisait de considérer la rotation de la poulie :

$$
\boxed{
\begin{aligned}
m_p R^2 \frac{a}{R} &= T_2 R - T_1 R \\
&\downarrow \\
T_2 - T_1 &= m_p a \;=\; 1 \text{ Newton}
\end{aligned}
}
$$

Une erreur assez surprenante pour le correcteur consistait à utiliser une inertie et un rayon en centimètres dans la première expression et d'en déduire naïvement une différence de 100 Newton.... *En effet si on écrit tout en centimètres, il faut aussi en tenir compte dans les unités de la force :*

$$100 \text{ kg cm/s}^2 = 1 \text{ kg m/s}^2 = 1 \text{ Newton}$$

Désolé : j'avais pas imaginé que cela poserait tant de difficultés à pas mal d'étudiants : cette erreur a donc été vraiment très largement pardonnée lors de la correction pour cet examen !

5. Calculer la force F pour obtenir une accélération $a = 2\ m/s^2$.
   Justifier avec précision votre démarche.

Globalement la force F s'écrit :
$$\boxed{F \quad = \quad \underbrace{(M + m + m_p)a}_{13 \text{ Newton}} \;+\; \underbrace{\mu_c (M + 3m) g}_{20 \text{ Newton}} \quad = \quad 33 \text{ Newton}}$$

Globalement, la force F sert à mettre les trois corps en mouvement et à vaincre toutes les forces de frottement : ce résultat peut être obtenu immédiatement avec un peu de bon sens et d'intuition : ce que font avec un certain brio quelques étudiants astucieux.

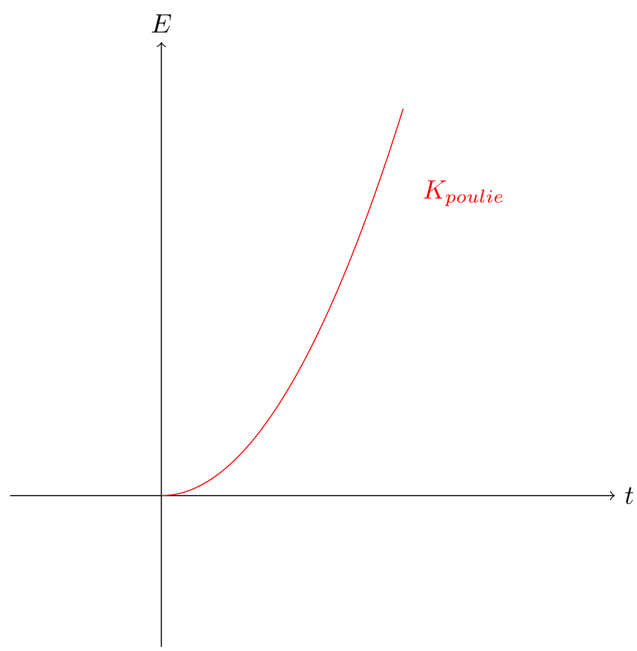
6. Quelle sera la fraction du travail de la force F dissipée en chaleur en raison des frottements ?

Il suffit de regarder la portion qui correspond aux forces de frottement : $\boxed{\dfrac{20}{33} \quad = \quad 61\%}$

7. Dessiner l'évolution de l'énergie cinétique de la poulie en fonction du temps.

L'évolution de l'énergie cinétique de la poulie en fonction du temps est donnée par :

$$K_{poulie}(t) \quad = \quad \frac{I\omega^2(t)}{2} \quad = \quad I\alpha^2 \frac{t^2}{2}$$



Tracer une droite est incorrect !
Tracer une parabole dans le mouvais sens est incorrect !
Il vaut mieux s'abstenir d'écrire que l'énergie globale est conservée car elle augmente....
Il vaut mieux s'abstenir de dessiner une énergie potentielle qui se réduit car elle est constante...
Beaucoup d'étudiants ajoutent ainsi bêtement des choses fausses (non demandées) qui irritent bêtement le correcteur : c'est vraiment une très mauvaise idée.

8. Que vaudrait la force F si on néglige l'inertie de la poulie ?

   Cela revient à retirer la masse de la poulie du calcul de la force ou d'en déduire l'écart des tensions dans la corde. On observe alors $T_1 = T_2$:-)

   Dans ce cas, la force F s'écrit :
$$\boxed{F \quad = \quad \underbrace{(M+m)a}_{\text{12 Newton}} + \underbrace{\mu_c(M+3m)g}_{\text{20 Newton}} = \text{32 Newton}}$$

Répondez à chaque sous-question et uniquement à ce qui est demandé.
Soyez précis dans les graphes.
Chaque sous-question peut être résolue de manière symbolique, si les résultats précédents font défaut !
Détaillez vos calculs afin de clairement montrer votre démarche.
Pensez à encadrer les résultats principaux pour les mettre en évidence.

2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Une réponse correcte rapporte 4 points, une réponse erronée en fait perdre 1 point.
Ne rien cocher ne fait rien gagner et ne fait rien perdre.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !
Gommer pour les corrections !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

Q1

Un automobiliste prend un virage plat de rayon de R avec une vitesse de module constant. Le niveau de l'eau dans un verre vertical de rayon r s'élève de d par rapport à l'horizontale d'un côté et s'abaisse identiquement de l'autre côté.
Quel est la vitesse de l'automobile ?

A $v = \sqrt{\dfrac{Rdg}{r}}$

B $v = \sqrt{\dfrac{Rrg}{d}}$

C $v = \left(\dfrac{Rrg}{d}\right)^2$

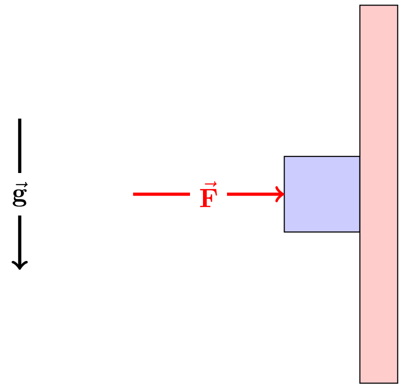
D $v = \sqrt{\dfrac{r^3}{R^3}\ \dfrac{g}{d}}$

E $v = \dfrac{r}{R}\ \sqrt{\dfrac{g}{d}}$

A ■
B □
C □
D □
E □

Q2

On applique une force horizontale $F = 12$ N sur un bloc contre un mur vertical. La masse du bloc est 0.5 kg et le coefficient de frottement statique est $\mu_s = 0.6$. Que peut-on déduire ?



Une seule affirmation est correcte !

A	Le bloc glisse le long du mur sous l'action de la gravité.	**A**	☐
B	La force de frottement et la force de gravité sont des forces conservatives.	**B**	☐
C	La force de frottement est supérieure à la force de gravité.	**C**	☐
D	La force de frottement est inférieure à la force de gravité.	**D**	☐
E	La force de frottement est exactement égale à la force de gravité.	**E**	■

Q3

Pour modéliser la descente d'un parachutiste, on tient compte de la force de gravité et de la force de trainée dans l'équation du mouvement :

$$m\frac{dv}{dt}(t) = -mg \ - \gamma \ v(t)$$

En imposant que $v(0) = 0$, l'évolution de la vitesse du parachutiste en fonction du temps s'exprime comme :

A	$v(t) = \frac{\gamma}{mg}\left(1 - \exp\left(-\frac{mt}{\gamma}\right)\right)$	**A**	☐
B	$v(t) = \frac{\gamma}{mg}\left(\exp\left(-\frac{\gamma t}{m}\right) - 1\right)$	**B**	☐
C	$v(t) = \frac{\gamma}{mg}\left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma t}{m}\right)\right)$	**C**	☐
D	$v(t) = \frac{mg}{\gamma}\left(\exp\left(-\frac{\gamma t}{m}\right) - 1\right)$	**D**	■
E	$v(t) = \frac{mg}{\gamma}\left(\cos\left(-\frac{\gamma t}{m}\right) - 1\right)$	**E**	☐

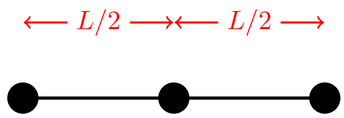
Q4	Le travail nécessaire pour arrêter un objet en mouvement est égal à : **A** à sa vitesse. **B** à son énergie cinétique. **C** à la masse de l'objet multiplié par son accélération. **D** à la masse de l'objet mulitplié par sa vitesse au carré. **E** au carré de de sa vitesse.	**A** ☐ **B** ■ **C** ☐ **D** ☐ **E** ☐

Q5	Une particule tourne avec une vitesse angulaire constante le long d'un cercle. Les vecteurs vitesse et l'accélération instantanées sont notées $\vec{\mathbf{v}}(t)$ et $\vec{\mathbf{a}}(t)$ respectivement. Une seule affirmation est correcte ! **A** Les deux vecteurs sont tangents à la trajectoire. **B** Les deux vecteurs sont perpendiculaires à la trajectoire. **C** Les deux vecteurs sont perpendiculaires entre eux. **D** Les deux vecteurs sont opposés entre eux. **E** Le vecteur accélération est nul car la vitesse est constante.	**A** ☐ **B** ☐ **C** ■ **D** ☐ **E** ☐

Q6	Quelles sont les unités d'une puissance ? **A** $N\ m\ /\ s^2$ **B** $kg\ m^2\ /\ s^2$ **C** $kg^2\ m^2\ /\ s^2$ **D** $J\ /s$ **E** $J\ m\ s^2$	**A** ☐ **B** ☐ **C** ☐ **D** ■ **E** ☐

L'inertie d'une bille tournant autour de son centre est $I_s = \dfrac{2mR^2}{5}$.

Trois billes de rayon R et de masse m sont attachées à une barre de longueur L comme indiqué ci-dessous. La masse et le moment d'inertie de la barre sont négligeables. On calcule le moment d'inertie I de cet ensemble *par rapport à une extrémité de la barre.*



Q7 Quelle est l'unique expression exacte pour I ?

A	$I = m\,\dfrac{6R^2}{5}$	**A**	□
B	$I = m\left(\dfrac{6R^2}{5} + \dfrac{L^2}{2}\right)$	**B**	□
C	$I = m\left(\dfrac{6R^2}{5} + \dfrac{5L^2}{4}\right)$	**C**	■
D	$I = 3m\left(\dfrac{2R^2}{5} + \dfrac{L^2}{2}\right)$	**D**	□
E	$I = 3m\left(\dfrac{2R^2}{5} + L^2\right)$	**E**	□

Un naufragé de masse m est récupéré par hélitreuillage. Le naufragé est soulevé d'une hauteur h avec une accélération verticale constante. La norme de cette accélération vaut le dixième de la norme g de l'accélération de la gravité.
Quelle est la vitesse du naufragé lorsqu'il arrive dans l'hélicoptère ?

Q8

A	$v = \sqrt{\dfrac{gh}{5}}$	**A**	■
B	$v = \sqrt{\dfrac{mgh}{5}}$	**B**	□
C	$v = \sqrt{\dfrac{gh}{2}}$	**C**	□
D	$v = \sqrt{\dfrac{11gh}{5}}$	**D**	□
E	$v = \sqrt{\dfrac{11gh}{10}}$	**E**	□

Q9

Considérons une roue de rayon R avec une masse m et un moment d'inertie I par rapport au centre de masse. Si la vitesse du centre de masse et la vitesse angulaire de rotation sont v et ω respectivement, l'énergie cinétique de cette roue qui roule sans glisser est donnée par :

A $K = \left(m + IR^2\right)\frac{v^2}{2}$ — **A** ☐

B $K = \left(mR^2 + I\right)\frac{\omega^2}{2}$ — **B** ■

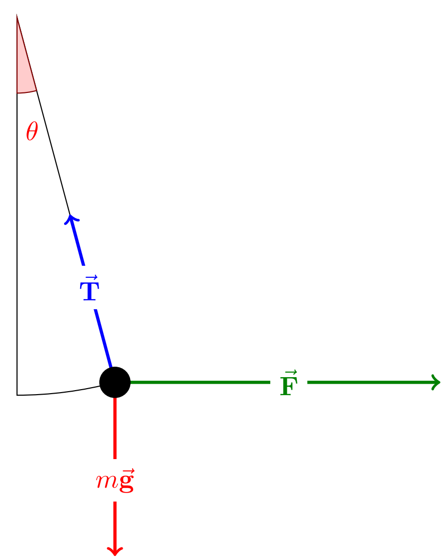
C $K = \frac{I\omega^2}{2}$ — **C** ☐

D $K = \frac{mv^2}{2}$ — **D** ☐

E $K = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2}$ — **E** ☐

Q10

La masse d'un pendule est maintenue immobile à un angle θ par une force horizontale $F = 2$. La force de gravité vaut $mg = 1$.



Quelle est la tension T du fil auquel est relié la masse du pendule ?
Toutes les forces sont exprimées en Newton.

A $T = 1$ — **A** ☐

B $T = 2\cos(\theta) + \sin(\theta)$ — **B** ☐

C $T = 2\cos(\theta)$ — **C** ☐

D $T = \sin(\theta)$ — **D** ☐

E $T = \sqrt{5}$ — **E** ■

Q10

Un automobiliste prend un virage plat de rayon de R avec une vitesse de module constant. Le niveau de l'eau dans un verre vertical de rayon r s'élève de d par rapport à l'horizontale d'un côté et s'abaisse identiquement de l'autre côté. Quel est la vitesse de l'automobile ?

A $v = \sqrt{\frac{Rdg}{r}}$

B $v = \sqrt{\frac{Rrg}{d}}$

C $v = \left(\frac{Rrg}{d}\right)^2$

D $v = \sqrt{\frac{r^3}{R^3}\ \frac{g}{d}}$

E $v = \frac{r}{R}\ \sqrt{\frac{g}{d}}$

A ■ **B** □ **C** □ **D** □ **E** □

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\ \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\ \frac{d}{dt}\left(I\ \omega\right) &= \sum M_i \end{aligned}$$

Formulaire

Lorsque les forces sont constantes,

$$\begin{aligned} \Delta\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t \\ \Delta\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Mouvement d'un projectile

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$\Delta\overbrace{\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2\right)}^{K} = \sum\overbrace{\vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W}$$

$$= \sum\underbrace{\vec{\mathbf{F}_{nc}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} - \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r}\Big)$$

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_xF_y - r_yF_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_xF_y - r_yF_x = F\ r_\perp = F_\perp\ r = Fr\sin(\theta)$$

Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$

$$m\ \vec{\mathbf{x}}(t) = \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t)\Big)$$

$$m\ \vec{\mathbf{v}}(t) = \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t)\Big)$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\ r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\ k^2 = \sum m_i\ r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\ h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ \dfrac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m\ \dfrac{L^2}{12}$