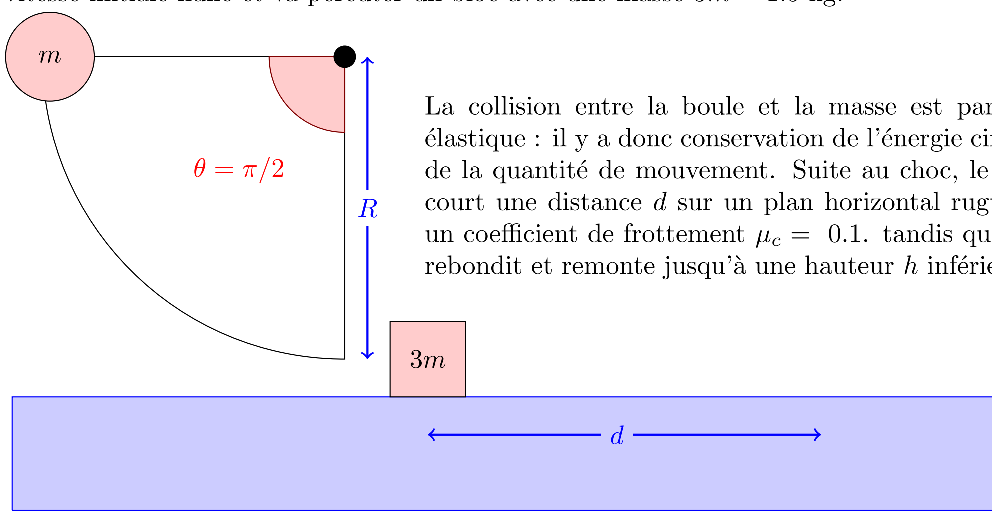
KINE11-EDPH11	
Janvier 2017	*Introduction à la mécanique*
IEPR 1011 -Rose-	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

1 Lâchons une boule pour faire bouger un bloc...

Une boule de masse $m = 500$ gr est retenue par une corde de longueur $R = 1.80$ m. La boule est écartée de sa position d'équilibre d'un angle $\theta = \pi/2$ en tendant la corde horizontalement. Elle est ensuite lâchée avec une vitesse initiale nulle et va percuter un bloc avec une masse $3m = 1.5$ kg.



La collision entre la boule et la masse est parfaitement élastique : il y a donc conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement. Suite au choc, le bloc parcourt une distance d sur un plan horizontal rugueux avec un coefficient de frottement $\mu_c = 0.1$. tandis que la boule rebondit et remonte jusqu'à une hauteur h inférieure à R.

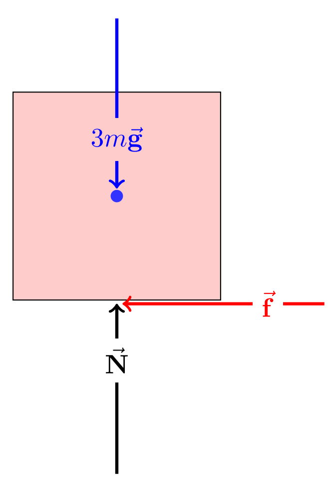
La vitesse de la boule sera notée $\vec{v}(t)$ et la vitesse du bloc sera notée $\vec{w}(t)$.
Dans les calculs, on utilisera $g = 10$ m/s^2.

1. Dessiner l'ensemble des forces sur le bloc pendant son déplacement sur le sol après la collision. Y indiquer clairement le nom et la notation habituelle pour chacune des forces. En déduire l'accélération du bloc pendant ce déplacement horizontal.

   Attention, il n'y a pas de force horizontale qui pousse le bloc. Une vitesse initiale est donnée au bloc par l'impulsion dû au choc, mais ensuite ce n'est que le frottement qui le ralentit.
   Inclure une force qui pousse est donc une erreur vraiment impardonnable !
   Cette question était parfaitement identique à un examen précédent.... : si, si !
   Toutes les forces sont constantes et donc il s'agit d'un simple MRUA : si, si !

   Il faut donc citer :

   - *Force de gravité :* $3m\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3mg \end{bmatrix}$
   - *Force normale du sol :* $\vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3mg \end{bmatrix}$
   - *Force de frottement :* $\vec{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} -\mu_c 3mg \\ 0 \end{bmatrix}$



En utilisant les axes définis sur la figure, on obtient immédiatement l'accélération demandée en écrivant la loi de Newton $a = -\mu_c g$ et on conclut donc.

$$\boxed{a \quad = \quad -1 \text{ m/s}^2}$$

Lors de la correction, les deux réponses $a = 1\ m/s^2$ et $a = -1\ m/s^2$ ont été admises. En effet, a peut représenter soit la norme du vecteur (qui est toujours positive), soit la composante horizontale (qui est négative :-) En toute rigueur, il faudrait utiliser la notation a_x pour la composante horizontale afin de la distinguer de la norme du vecteur, mais il est souvent coutume d'omettre cet indice lorsque le mouvement est unidimensionnel comme c'est le cas ici.

2. Calculer la norme de la vitesse de la boule v juste avant de percuter le bloc.

   La conservation de l'énergie permet d'écrire que :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} m\dfrac{v^2}{2} & = & mgR \\ & \downarrow & \\ v & = & \sqrt{2gR} \end{array}}$$

On conclut donc : $\boxed{v \quad = \quad \sqrt{36} \quad = \quad 6 \text{ m/s}}$

3. Calculer les normes de la vitesse v_* de la boule et de la vitesse w_* du bloc juste après la collision. Il peut être utile de noter que $(v^2 - v_*^2) = (v - v_*)(v + v_*)$ et $(v - v_*)^2 = (v - v_*)(v - v_*)$

   Comme le choc est élastique, on a la conservation de l'énergie cinétique et la conservation de la quantité de mouvement avant et après le choc. Cela s'exprime sous la forme des deux relations suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} m\ \dfrac{v^2}{2} & = & m\ \dfrac{v_*^2}{2} + 3m\ \dfrac{w_*^2}{2} \\ m\ v & = & m\ v_* + 3m\ w_* \end{array}}$$

Il y a donc bien deux équations avec deux inconnues v_* et w_* qui représentent -ici- les deux composantes horizontales des deux vecteurs vitesses et non les normes des vitesses !

Il reste la tâche de résoudre le système des deux équations non-linéaires : c'est l'unique partie compliquée de cette question. Pour obtenir la solution finale, il faut évidemment tirer profit de l'indication fournie dans l'énoncé évidemment.

$$\begin{array}{rcl} v^2 & = & v_*^2 + 3w_*^2 \\ & \downarrow & \\ v^2 - v_*^2 & = & 3w_*^2 \\ 3(v - v_*)(v + v_*) & = & (v - v_*)(v - v_*) \\ 3(v + v_*) & = & (v - v_*) \\ 4v_* & = & -2v \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} v & = & v_* + 3w_* \\ & \downarrow & \\ v - v_* & = & 3w_* \end{array}$$

Comme $v = 6$, *on conclut donc :* $\boxed{\begin{array}{rcl} v_* & = & -3 \text{ m/s} \\ w_* & = & 3 \text{ m/s} \end{array}}$

Après le choc, le bloc et la boule ont des vitesses de même norme mais de direction opposée !
Ce calcul algébrique est l'unique partie réellement compliquée de l'examen, mais si les deux équations de départ sont correctement écrites, la majorité des points de cette sous-question sont acquis !
Peu d'étudiants ont tenté de résoudre cette question et encore moins ont obtenu la réponse finale correcte.... mais c'était pourtant vraiment possible !

4. Jusqu'à quelle hauteur h la boule va-t-elle remonter après avoir percuté le bloc ?

   La conservation de l'énergie permet à nouveau d'écrire que :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} m\dfrac{v_*^2}{2} & = & mgh \\ & \downarrow & \\ h & = & \dfrac{v_*^2}{2g} \end{array}}$$

On conclut donc : $\boxed{h = \dfrac{9}{20} = 0,45 \text{ m}}$

   Noter qu'obtenir l'expression symbolique permettait d'obtenir l'entièreté des points de la sous-question, si on n'avait pas obtenu la valeur correcte de v_* *dans la question précédente !*

5. Quelle distance d le bloc va-t-il parcourir sur le sol après avoir été percuté par la boule ?

   La conservation de l'énergie permet encore d'écrire que :

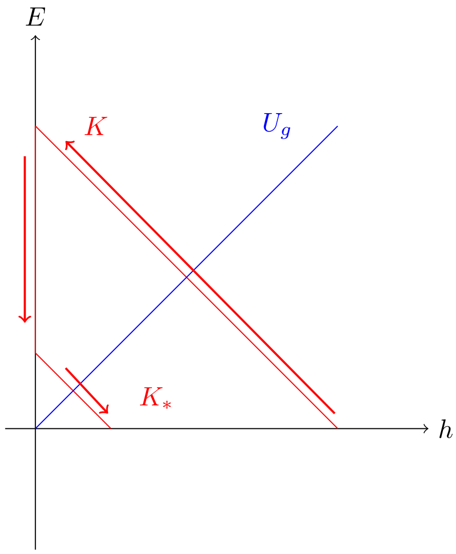
$$\boxed{\begin{array}{rcl} 3m\dfrac{w_*^2}{2} & = & 3m\mu_c g d \\ & \downarrow & \\ d & = & \dfrac{w_*^2}{2\mu_c g} \end{array}}$$

On conclut donc : $\boxed{d = \dfrac{9}{2} = 4,5 \text{ m}}$

   Il est aussi possible de calculer la distance en tenant compte que le déplacement est en MRUA !

6. Dessiner l'énergie cinétique et potentielle de la boule en fonction de la hauteur de la boule avant la collision. Comment faudrait-il modifier ce graphique après la collision avec le bloc ?
   On considère une énergie potentielle nulle lorsque la boule se trouve au niveau du sol.

L'évolution de l'énergie cinétique et potentielle de la boule en fonction de la hauteur est linéaire puisque $K = mg$, de même que l'énergie cinétique puisqu'on a conservation de l'énergie mécanique. Il faut donc pour une fois juste dessiner les deux droites qui se croisent :-)



Après le choc, la droite de l'énergie cinétique K_* garde la même pente, mais la valeur pour $h = 0$ devient $mv_*^2/2 = 9/4$, tandis que $mv_*^2/2 = 36/4$. Observer que l'évolution temporelle de la situation de la boule est assez particulière : on part du point le plus élevé vers une hauteur nulle où l'énergie cinétique est diminuée suite au choc, puis ensuite elle diminue lorsque la boule remonte.... Le graphe de l'énergie potentielle reste identique avant et après le choc. Cette question pouvait paraître un peu surprenante et pourtant la réponse est d'une simplicité déconcertante !

Tracer des paraboles est donc incorrect !
Finalement, le graphe était particulièrement simple et correspond au graphe classique des énergies en fonction de la distance parcourue pour un corps qui chute.... Alors qu'en général, plein d'étudiants me donnent les deux droites qui se croisent alors que je demande une autre graphe.... Ici, ils m'ont donné deux paraboles alors que je demandais deux droites.
Moralité : c'est bien de réviser les examens des années précédentes, mais pas de recopier sans comprendre les réponses d'une année pour la question d'une autre année.... Au jeu du plus idiot et débile, c'est à nouveau toujours l'enseignant qui gagne :-)

Répondez à chaque sous-question et uniquement à ce qui est demandé.
Soyez précis dans les graphes.
Détaillez vos calculs afin de clairement montrer votre démarche.
Pensez à encadrer les résultats principaux pour les mettre en évidence.
Le rayon de la boule et la taille du bloc sont évidemment négligeables par rapport à R et d.
Notez qu'il est possible de fournir une réponse aux questions 4,5 et 6 en fonction de v_* et de w_* même si on n'a pas obtenu les valeurs numériques de ces deux vitesses dans la sous-question 3 !

2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Une réponse correcte rapporte 4 points, une réponse erronée en fait perdre 1 point.
Ne rien cocher ne fait rien gagner et ne fait rien perdre.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !
Gommer pour les corrections !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

Q1

Une balle est projetée du sommet d'une falaise avec une vitesse initiale v_0 qui pointe vers le haut avec un angle θ par rapport à l'horizontale. La falaise a une hauteur h rapport au sol. La force de trainée est négligée.
Quelle est la vitesse v de la balle lorsqu'elle touche le sol ?

A $v = \sqrt{v_0^2 + gh}$ — **A** ☐

B $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ — **B** ■

C $v = \sqrt{v_0^2 \cos\theta + 2gh}$ — **C** ☐

D $v = v_0 \sin\theta + \sqrt{2gh}$ — **D** ☐

E $v = \sqrt{\left(v_0 \cos\theta\right)^2 + 2gh}$ — **E** ☐

Q2

Le mouvement d'une masse reliée à un ressort est décrit par l'équation :

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = -\frac{k}{m}\, x(t)$$

La fréquence angulaire d'oscillation du pendule est donc donnée par :

A $\omega = \sqrt{m/k}$ — **A** ☐
B $\omega = \sqrt{mk^2}$ — **B** ☐
C $\omega = \sqrt{k/m}$ — **C** ■
D $\omega = k/m$ — **D** ☐
E $\omega = m/k$ — **E** ☐

Q3

On tire un obus avec un angle d'inclinaison de 45^o. Quelle doit être la norme de sa vitesse initiale afin que l'obus puisse s'élever d'une hauteur 483.025 m ? On ne tient compte que de la force de gravité avec $g = 10\ m/s^2$.

A 139 m/s
B 140 m/s
C 2800 m/s
D 13.9 m/s
E 278 m/s

A ■
B □
C □
D □
E □

Q4

On considère un mouvement circulaire uniforme.
Quelle est l'unique affirmation correcte ?

A Le vecteur vitesse est constant.
B Le vecteur accélération est tangentiel.
C Le vecteur accélération est constant.
D Le vecteur accélération est centrifuge.
E Le vecteur accélération est centripète.

A □
B □
C □
D □
E ■

Q5

Un objet a une masse de 800 gr.
Quelle est la force de gravité F qui s'applique sur cet objet si l'accélération de la gravité est $g = 10\ m/s^2$?

A $F = 8000$ N
B $F = 800$ N
C $F = 80$ N
D $F = 8$ N.
E $F = 0.8$ N

A □
B □
C □
D ■
E □

Q6

Quelles sont les unités de l'inertie I d'un corps solide ?

A $kg\ m$
B $J\ s^2$
C $kg^2\ m^2$
D $N\ m^2\ s^2$
E Aucune de quatre réponses précédentes.

A □
B ■
C □
D □
E □

Q7

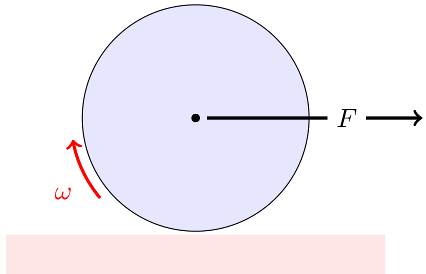
Sur terre, on a noté qu'un astronaute avait une masse de 60 kg. L'accélération de la gravité sur la Lune est 6 fois plus faible que sur la Terre.
Quelle est l'unique affirmation correcte ?

A La force de gravité sur la Lune est 6 fois plus importante que sur la Terre.
B L'astronaute a le même poids apparent sur la Lune que sur la Terre.
C La masse de l'astronaute sur la Lune est 6 fois plus faible que sur la Terre.
D Le poids apparent sur la Lune est 6 fois plus faible que sur la Terre.
E Il n'y a pas de force de gravité sur la Lune : on flotte dans l'espace.

A □
B □
C □
D ■
E □

Q8

Un cylindre plein de masse m et de rayon R subit en son centre une force de traction horizontale F et roule sans glisser sur le sol.



Quelle est la condition requise pour empêcher le glissement ?

A $\mu_s \geq \dfrac{F}{3mg}$

B $\mu_s + \mu_c \geq \dfrac{F}{3mg}$

C $\mu_c \geq \dfrac{3mg}{F}$

D $\mu_c \geq \dfrac{F+mg}{3mg}$

E $\mu_s - \mu_c \leq \dfrac{F}{mg}$

A ■
B □
C □
D □
E □

Q9

Vous êtes assis dans une voiture de chemin de fer dans le sens de la marche. Les fenêtres sont fermées et le train roule à vitesse constante sur une voie horizontale. Vous jetez une boule en l'air verticalement, puis votre main s'immobilise. Quelle affirmation est correcte ?

A La bille passera en avant de votre main.
B La bille passera en arrière de votre main.
C La bille retombera sur votre main.
D La bille sortira par la fenêtre.
E L'énergie cinétique de la bille restera constante.

A □
B □
C ■
D □
E □

Q10		
	La vitesse d'une masse m passe de v_0 à v_f sur une distance d. Quelle est la force de frottement f exercée sur la rondelle ?	
	A $f = m\,\dfrac{(v_0 - v_f)^2}{2d}$	**A** ☐
	B $f = m\,\dfrac{v_0^2 - v_f^2}{d}$	**B** ☐
	C $f = m\,\dfrac{v_0^2 - v_f^2 - 4v_0 v_f}{2d}$	**C** ☐
	D $f = m\,\dfrac{d}{v_0^2 - v_f^2}$	**D** ☐
	E $f = m\,\dfrac{(v_0 - v_f)(v_0 + v_f)}{2d}$	**E** ■

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

Formulaire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\ \frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\ \frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) &= \sum M_i \end{aligned}$$

Lorsque les forces sont constantes,

$$\begin{aligned} \Delta\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t \\ \Delta\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Mouvement d'un projectile

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$\Delta \overbrace{\left(\tfrac{1}{2} m\ v^2\right)}^{K} = \sum \overbrace{\vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W}$$

$$= \sum \underbrace{\vec{\mathbf{F}}_{nc} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} - \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r}\Big)$$

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_x F_y - r_y F_x = F\ r_\perp = F_\perp\ r = F r \sin(\theta)$$

Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$

$$m\ \vec{\mathbf{x}}(t) = \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t)\Big)$$

$$m\ \vec{\mathbf{v}}(t) = \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t)\Big)$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\ r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\ k^2 = \sum m_i\ r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\ h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ \frac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m\ \frac{L^2}{12}$