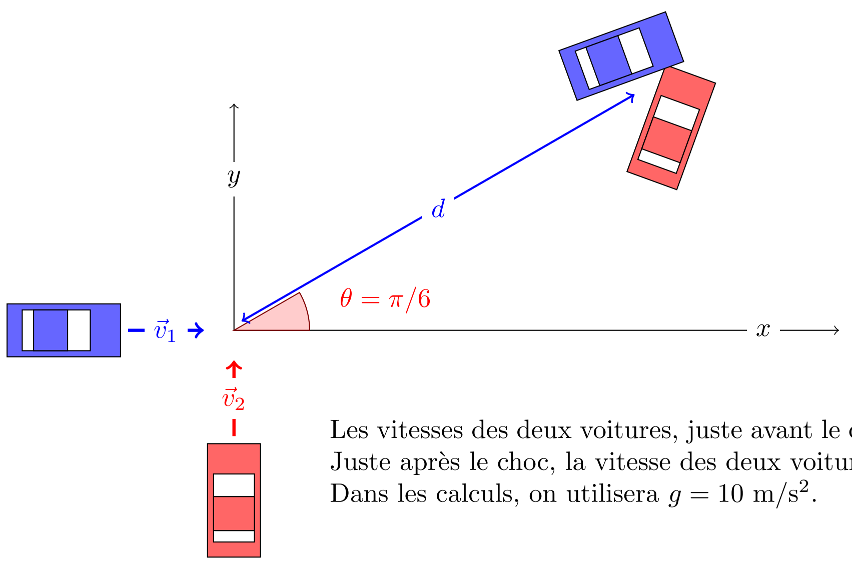
KINE11-EDPH11	
Janvier 2018	*Introduction à la mécanique*
IEPR 1011 -Bleu-	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

1 Un malheureux accident...

A l'instant $t_0 = 0$, le conducteur d'une Twingo de masse $m_1 = 1000$ kg observe une puissante BMW d'une masse $m_2 = 1500$ kg à sa droite et freine pour éviter la collision. Le conducteur de la BMW sûr de son bon droit ne freine pas. A l'instant $t_1 = 30$ s, la collision se produit et les deux voitures restent accrochées après celle-ci. A l'instant t_2, l'ensemble de deux épaves s'immobilisent à une certaine distance du point d'impact. Les traces de dérapage des deux véhicules accidentés sont rectllignes et d'une longueur $d = 6$ m orientées avec un angle $\theta = \pi/6$ par rapport à la trajectoire de la Twingo.



Les vitesses des deux voitures, juste avant le choc, seront notées $\vec{\mathbf{v}}_1$ et $\vec{\mathbf{v}}_2$. Juste après le choc, la vitesse des deux voitures est notée $\vec{\mathbf{v}}$. Dans les calculs, on utilisera $g = 10$ m/s^2.

1. En considérant un coefficient de frottement cinétique $\mu_c = 0.6$, calculer le vecteur vitesse $\vec{\mathbf{v}}$.

   La conservation de l'énergie permet d'écrire que :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (m_1 + m_2)\dfrac{v^2}{2} & = & \mu_c(m_1 + m_2)gd \\ & \downarrow & \\ v & = & \sqrt{2\mu_c g d} \end{array}}$$

On conclut donc : $\boxed{v \;=\; \sqrt{72} \;=\; 8.5 \text{ m/s}}$

Toute l'énergie cinétique qu'ont les deux voitures est entièrement dissipée dans le travail de la force de frottement : la force de frottement est exercée dans l'axe du mouvement, il ne faut donc pas mettre un quelconque cosinus ou sinus dans le calcul du travail : ce que font malencontreusement pas mal d'étudiants :-(

2. A quel instant t_2, les deux voitures accidentées s'immobilisent ?

   Comme la norme de la décélération vaut $a = \mu_c g$, on peut écrire $v = a\ t$ avec t le temps requis pour que les deux voitures s'immobilisent après le choc :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \sqrt{2\mu_c g d} & = & \mu_c g\ t \\ & \downarrow & \\ t & = & \sqrt{\dfrac{2d}{\mu_c g}} \end{array}}$$

Attention, le mouvement des deux épaves est un MRUA : la vitesse n'est pas constante.
Obtenir le temps de déplacement t en divisant le déplacement par la vitesse est donc faux.
Et pourtant, un nombre incalculable d'étudiants font cela !
En effet, la vitesse moyenne vaut la moitié de v.
La relation correcte est entre d et v s'écrit en réalité sous la forme suivante.

$$t = \frac{2d}{v}$$

On conclut donc : $\boxed{t_2 \ = \ 30 + t \ = \ 30 + \sqrt{2} \ = \ 31.4 \text{ s}}$

3. Calculer $\vec{\mathbf{v}}_1$ et $\vec{\mathbf{v}}_2$ les vitesses des deux voitures juste avant le choc ?
   Est-ce que les deux voitures respectaient à ce moment la limitation de vitesse de 50 km/h?

   La collision est manifestement inélastique : il y a donc conservation de la quantité de mouvement, mais pas conservation de l'énergie cinétique. La conservation de la quantité de mouvement est une relation vectorielle qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (m_1+m_2)\ \vec{\mathbf{v}} & = & m_1\ \vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\ \vec{\mathbf{v}}_2 \\ (m_1+m_2)\begin{bmatrix} v\cos(\pi/6) \\ v\sin(\pi/6) \end{bmatrix} & = & m_1 \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ & \downarrow & \\ v_1 & = & \left(\dfrac{m_1+m_2}{m_1}\right) v\cos(\pi/6) \\ v_2 & = & \left(\dfrac{m_1+m_2}{m_2}\right) v\sin(\pi/6) \end{array}}$$

On conclut donc :
$$\boxed{\begin{array}{lllllll} v_1 & = & \frac{5}{2}\,\sqrt{72}\,\frac{\sqrt{3}}{2} & = & \frac{15}{2}\,\sqrt{6} & = & 18.37 \text{ m/s} \\ v_2 & = & \frac{5}{3}\,\sqrt{72}\,\frac{1}{2} & = & 5\,\sqrt{2} & = & 7.07 \text{ m/s} \end{array}}$$

On observe donc que la Twingo a une vitesse de 66Km/h *et que la BMW roule a une vitesse de* 25Km/h. *Il est assez amusant d'observer que pas mal d'étudiants sans effectuer aucun calcul sont évidemment certains que c'est la puissante berline allemande qui roule trop vite : attention, c'est presque un délit de facies, un tel raisonnement :-)*

Le correcteur a été très désagréablement déçu par l'incapacité d'un nombre incalculable d'étudiants d'obtenir le cosinus et le sinus de $\theta = \pi/6$. Ces étudiants négligent le fait que la plupart des calculatrices considèrent que l'angle est donné en degrés. D'autres étudiants veulent absolument utiliser la conservation de l'énergie cinétique : ce qui est totalement inapproprié ici.

4. Quelle est le travail de la force de freinage appliquée à la Twingo si sa vitesse à l'instant $t_0 = 0$ était de 100 km/h ?

   Comme le frottement au sol est négligeable, la perte d'énergie cinétique entre les instants t_0 et t_1 vaut le travail W_f de la force de freinage. On peut donc écrire :

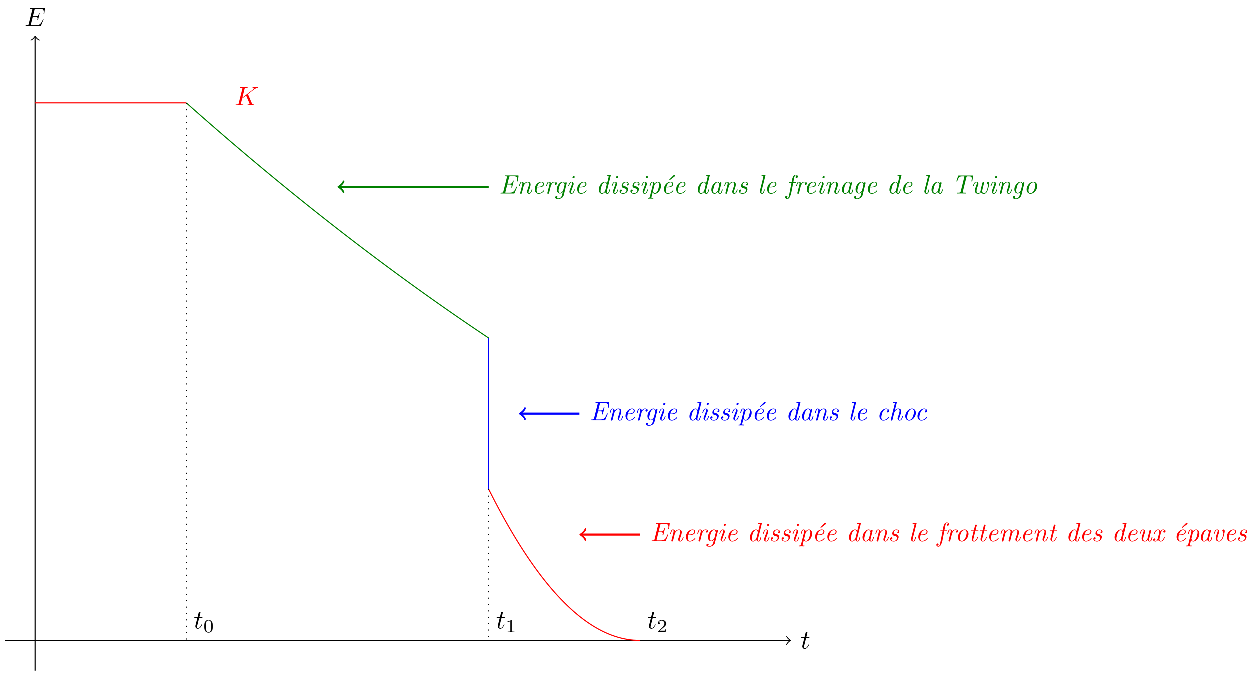
$$\boxed{\begin{array}{lll} \frac{m_1}{2}\left(\big(v_1(t_0)\big)^2 - \big(v_1(t_1)\big)^2\right) & = & W_f \\ & \downarrow & \\ \frac{1000}{2}\left((\frac{100}{3.6})^2 - (18.37)^2\right) & = & W_f \end{array}}$$

On conclut donc : $\boxed{W_f \;=\; 217000 \text{ Joule}}$

Notons qu'il n'est pas possible de déterminer la force de freinage qui n'est pas d'office constante et qui pourrait donc varier sur l'intervalle considéré...
Au passage, il n'est pas précisé dans l'énoncé que cette force est constante.
Attention : il est essentiel d'écrire les vitesses dans les unités adéquates et donc diviser 100 *par* 3.6 *pour passer de km.h à m/s. Pas mal d'étudiants oublient cela :-)*

5. Dessiner l'énergie cinétique des deux voitures en fonction du temps $t_0 \leq t \leq t_2$.
   Il faut donc tenir compte du choc et du freinage de la Twingo.

   L'évolution de l'énergie cinétique des deux voitures diminuent d'abord en raison du freinage de la Twingo, ensuite chute en raison du caractère inélastique de la collision et finalement l'énergie cinétique des deux épaves est dissipée en travail de frottement.... Les courbes sont des paraboles, même tracer une droite a été admis par le correcteur : il faut bien indiquer les 3 parties du graphes. L'énergie potentielle est évidemment constante, c'est donc bien la raison pour laquelle il n'a pas été demandé de la tracer.



   Il est possible de tracer des graphes distincts pour les deux voitures : on observera ainsi que la Twingo donne de l'énergie cinétique à la BMW lors du choc puisque la vitesse des deux épaves est plus élevée que celle de la BMW avant le choc.... mais globalement, l'énergie cinétique après le choc est inférieure à la somme des énergies cinétiques des deux voitures avant le choc.

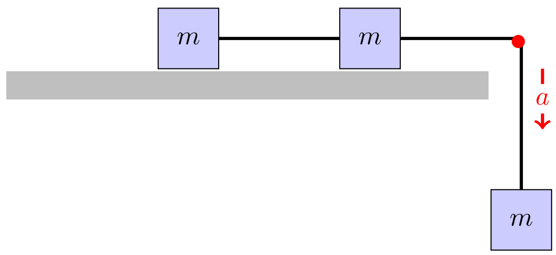
   Le graphe n'est pas bien compliqué à obtenir avec un tout petit peu de bon sens physique !
   Eviter de bêtement recopier le graphe de l'examen de l'année précédente : c'est très rarement la bonne solution :-(

2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Une réponse correcte rapporte 4 points, une réponse erronée en fait perdre 1 point.
Ne rien cocher ne fait rien gagner et ne fait rien perdre.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !
Gommer pour les corrections !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

Q1

Les trois blocs ont le même masse m.



Le coefficient de frottement cinétique μ_c entre le sol et les blocs est identique.
La norme de l'accélération de chacun des 3 blocs est donnée par :

A $a = \mu_c \dfrac{g(1+2\mu_c)}{3}$ — **A** ☐

B $a = \dfrac{g\mu_c}{3}$ — **B** ☐

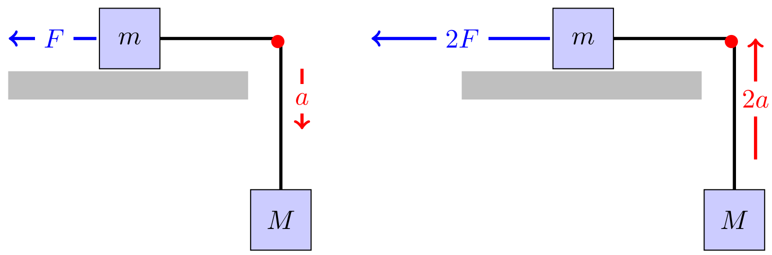
C $a = \dfrac{g(1-\mu_c)}{2}$ — **C** ☐

D $a = \mu_c \dfrac{g(1-2\mu_c)}{3}$ — **D** ☐

E $a = \dfrac{g(1-2\mu_c)}{3}$ — **E** ■

Q2

Deux blocs de masse m et M sont reliés par une corde. D'abord, le bloc de masse m subit une force horizontale F et le second second bloc descend avec une accélération a. Dans une seconde expérience, on applique une force $2F$ et le second bloc monte avec une accélération $2a$.



On peut déduire le rapport des masses des deux blocs à partir de a et F.
Le déplacement sur la surface horizontale se fait sans aucun frottement.
La norme de l'accélération de la gravité est $g = 10\ m/s^2$.
Quelle est le rapport des deux masses ?

A $\frac{m}{M} = \frac{g-4a}{4a}$

B $\frac{m}{M} = \frac{g}{a}$

C $\frac{m}{M} = \frac{g-a}{4a}$

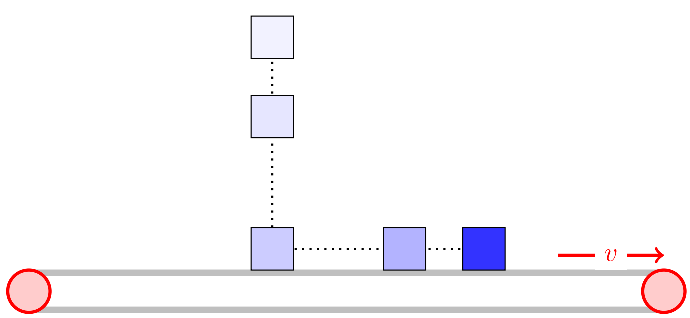
D $\frac{m}{M} = \left(\frac{4a}{4a-g}\right)\ F$

E $\frac{m}{M} = \left(\frac{g-4a}{4a}\right)\ F$

A ■
B □
C □
D □
E □

Q3

Une caisse de masse m tombe verticalement sur un tapis roulant d'un convoyeur qui se déplace à une vitesse constante v. Sous l'effet du frottement, la caisse va acquérir progressivement la vitesse du tapis roulant après un laps de temps t. Le coefficient de frottement cinétique entre la caisse et le tapis est noté μ_c.



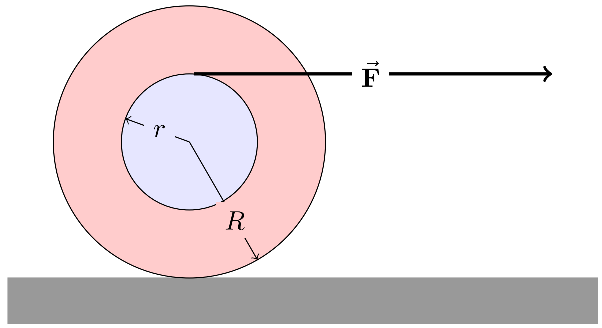
Lorsque la caisse a atteint la vitesse v, elle a parcouru une distance d, tandis que le tapis roulant a avancé d'une distance d^*.
Quelle est l'unique affirmation **inexacte** ?

A Le travail de la force de frottement exercé sur la caisse est positif.
B $d = v\ t$
C $2d\ \mu_c mg = mv^2$
D $2d = \mu_c g\ t^2$
E $2d = d^*$

A □
B ■
C □
D □
E □

Q4

Une bobine de masse M et de rayon R a un moment d'inertie I. On tire sur un fil avec une force F le long d'un axe de rayon r et la bobine se met à rouler sans glissement sur sol.



La norme de l'accélération du centre de masse est donnée par :

A $a = \dfrac{F}{M}$ — **A** ☐

B $a = F\dfrac{(rR + R^2)}{(I + MR^2)}$ — **B** ■

C $a = \dfrac{Fr}{3MR}$ — **C** ☐

D $a = F\dfrac{R^2}{(I + MrR)}$ — **D** ☐

E $a = F\dfrac{(I + MR^2)}{(rR + R^2)}$ — **E** ☐

Q5

Une balle est lancée avec une vitesse v_0 avec un angle θ par rapport à l'horizontale. En supposant que la résistance de l'air est négligeable, la vitesse v de la balle au sommet de sa trajectoire est donnée par :

A $v = v_0 \cos(\theta)$ — **A** ■
B $v = v_0 \sin(\theta)$ — **B** ☐
C $v = v_0 \tan(\theta)$ — **C** ☐
D $v = v_0$ — **D** ☐
E $v = 0$ — **E** ☐

Q6

Une balle est lancée et suit une trajectoire parabolique.
On considère le vecteur $\vec{\mathbf{F}}(t)$ de toutes les forces qui s'appliquent sur la balle.
Quelle est l'unique affirmation exacte ?

A Le vecteur $\vec{\mathbf{F}}(t)$ a la même direction que le vecteur vitesse. — **A** ☐
B Le vecteur $\vec{\mathbf{F}}(t)$ a une direction opposée à celle du vecteur vitesse. — **B** ☐
C Le vecteur $\vec{\mathbf{F}}(t)$ est toujours orienté perpendiculairement à la trajectoire. — **C** ☐
D Le vecteur $\vec{\mathbf{F}}(t)$ est nul. — **D** ☐
E Il n'y a aucune force de trainée dans le vecteur $\vec{\mathbf{F}}(t)$. — **E** ■

Q7

Quelles sont les unités d'un travail ?

A $N\ m^2$
B $kg\ m^2\ /\ s^3$
C $kg\ m^2\ /\ s$
D $W\ s$
E $J\ m\ s^2$

A ☐
B ☐
C ☐
D ■
E ☐

Q8

Un objet a une masse de 80 grammes.
Quelle est la force de gravité F qui s'applique sur cet objet si l'accélération de la gravité est $g = 10\ m/s^2$?

A $F = 0.08$ N
B $F = 0.8$ N
C $F = 8$ N
D $F = 80$ N
E $F = 800$ N

A ☐
B ■
C ☐
D ☐
E ☐

Q9

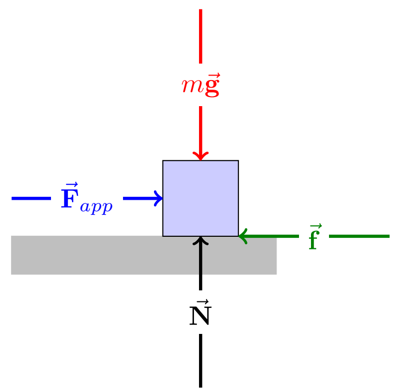
Un seau d'eau décrit un mouvement circulaire vertical de rayon 160 cm.
La norme de l'accélération de la gravité est $g = 10\ m/s^2$.
Quelle est la vitesse minimale v requise au point le plus élevé pour que l'eau ne tombe pas du seau lorsqu'il est à l'envers ?

A $v = 0\ m/s$
B $v = 1\ m/s$
C $v = 1.6\ m/s$
D $v = 4\ m/s$
E $v = 3.2\ m/s$

A ☐
B ☐
C ☐
D ■
E ☐

Q10

Un bloc de masse M est posé sur un sol horizontal.
Une force F_{app} est appliquée sur le bloc qui ne bouge pas.
La force due au frottement entre le bloc et le sol est notée f.
La force de gravité et la réaction normale du sol sont définies sur la figure.



Les coefficients de frottement statique et cinétique sont notés μ_s et μ_c .
Quelle est l'unique affirmation exacte ?

A $f = 0$
B $f = \mu_s N$
C $f = F_{app}$
D $f > F_{app}$
E Il faut utiliser le coefficient de frottement μ_s.

A ☐
B ☐
C ■
D ☐
E ☐

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) &= \sum M_i
\end{aligned}
$$

Formulaire

Lorsque les forces sont constantes,

$$
\begin{aligned}
\Delta\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t \\
\Delta\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}
\end{aligned}
$$

Mouvement d'un projectile

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$\Delta\overbrace{\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2\right)}^{K} \;=\; \sum \overbrace{\vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W}$$

$$= \sum \underbrace{\vec{\mathbf{F}}_{nc}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} \;-\; \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r}\Big)$$

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} \;=\; \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_xF_y - r_yF_x \end{bmatrix}$$

$$M \;=\; r_xF_y - r_yF_x \;=\; F\ r_\perp \;=\; F_\perp\ r \;=\; Fr\sin(\theta)$$

Ensemble de particules : un corps !

$$m \;=\; \sum m_i$$

$$m\ \vec{\mathbf{x}}(t) \;=\; \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t)\Big)$$

$$m\ \vec{\mathbf{v}}(t) \;=\; \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t)\Big)$$

Moment d'inertie

$$I \;=\; \sum m_i\ r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\ k^2 \;=\; \sum m_i\ r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_h \;=\; m\ h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution	$I \;=\; m\ R^2$
Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution	$I \;=\; m\ \frac{R^2}{2}$
Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central	$I \;=\; m\ \frac{L^2}{12}$