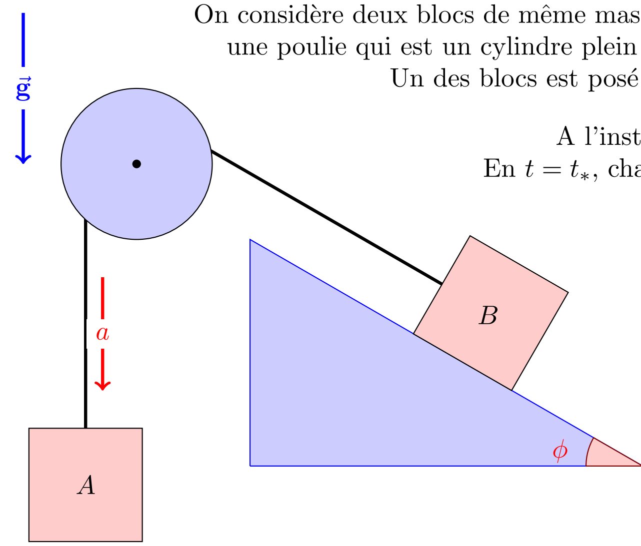
KINE11-EDPH11	
Janvier 2019	*Introduction à la mécanique*
IEPR 1011 -Rose-	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

1 Un bloc qui fait avancer un autre bloc ...



On considère deux blocs de même masse $m = 2$ kg reliés par une corde qui passe par une poulie qui est un cylindre plein de rayon $R = 0.25$ m et de masse $M = 10$ kg. Un des blocs est posé sur un support incliné avec un angle $\phi = 30^o$.

A l'instant $t = 0$, les blocs se mettent en mouvement. En $t = t_*$, chaque bloc a parcouru une distance $d = 0.25$ m.

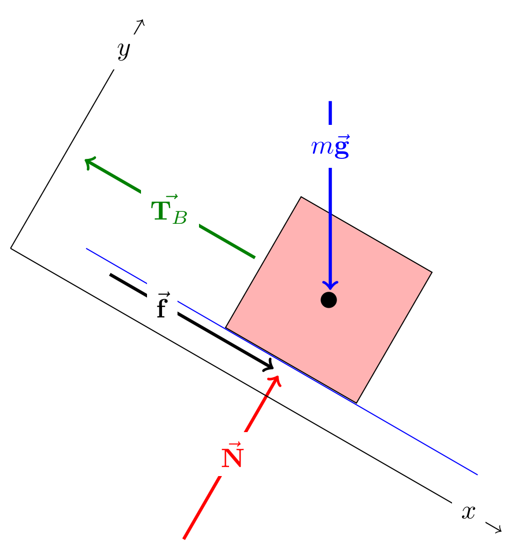
Dans les calculs, on utilisera $g = 10$ m/s^2. Le coefficient de frottement dynamique entre le bloc et le support est $\mu_c = 0.1$.

1. Citer et dessiner l'ensemble de toutes les forces sur le bloc B pour $t > 0$.
   Y indiquer clairement le nom et la notation habituelle pour chacune des forces.

   Il faut juste considérer la gravité, la force de traction de la corde, la force normale de réaction du sol sur la roue et le frottement. Il est admis de considérer une seule force de réaction globalisant la composante normale et le frottement et d'effectuer la suite de l'exercice en utilisant les deux composantes de la réaction globale du sol sur le bloc.
   Toutes les forces sont constantes car il s'agit d'un simple MRUA : si, si !

Il faut donc citer :

- *Force de gravité :* $m\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} mg\sin(\phi) \\ -mg\cos(\phi) \end{bmatrix}$
- *Force de réaction normale du sol :* $\vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0 \\ mg\cos(\phi) \end{bmatrix}$
- *Force de frottement :* $\vec{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu mg\cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix}$
- *Force de traction :* $\vec{\mathbf{T}}_B = \begin{bmatrix} -T_B \\ 0 \end{bmatrix}$



2. Calculer le moment d'inertie de la poulie.

   Il faut utiliser l'expression du moment d'inertie d'un cylindre plein et on conclut donc.

$$\boxed{I = \frac{MR^2}{2} = 0.3125 \text{ kg m}^2}$$

   Noter au passage que cette formule était directement fournie dans le formulaire annexé au questionnaire. En outre, noter que cette question a déjà été posée un nombre incalculable de fois et que la solution vous était fournie... Il était donc vraiment impardonnable de ne pas obtenir cette valeur. Il faut la valeur numérique exacte pour valider votre réponse.

3. Que devrait être le coefficient de frottement statique μ_s minimal nécessaire pour que les deux blocs ne bougent pas ?

   A l'équilibre, la tension dans la corde est identique partout et sera notée $T = T_A = T_B$. Il y a trois inconnues T, N et f dans ce problème : il faudra donc considérer trois équations pour obtenir la solution. Plus concrètement, on considèrera l'équilibre des forces pour les deux blocs.

   En écrivant les relations d'équilibre adéquate pour le premier ou le second bloc, on obtient

$$\begin{array}{rcl} 0 &=& N - mg\ \cos(\phi) \\ &\downarrow& \\ N &=& mg\cos(\phi) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} 0 &=& T - mg \\ &\downarrow& \\ T &=& mg \end{array}$$

   Ensuite, on écrit l'équilibre du second bloc dans l'axe des x :

$$\begin{array}{rcl} T &=& mg\sin(\phi) + \mu_s N \\ mg &=& mg\sin(\phi) + \mu_s mg\cos(\phi) \\ &\downarrow& \\ \mu_s &=& \dfrac{1-\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \end{array}$$

   Et on déduit la valeur numérique demandée : $\boxed{\mu_s = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577}$

4. Obtenir l'accélération a des deux blocs pour $t > 0$.

   En mouvement, la tension T_A dans la corde entre la poulie et le premier bloc et la tension T_B entre la poulie et le second bloc ne sont plus identiques ! Il faut donc écrire les équations qui lient la même accélération a pour chaque corps. Tout d'abord, on écrit l'équation du mouvement pour le bloc qui chute retenu par la corde. Ensuite, on écrit l'équation de la rotation de la poulie entrainée par T_A et freinée par T_B. Finalement, on écrit l'équation du mouvement tangentiel du bloc tiré par T_B et freiné par la composante de la gravité et le frottement.

$$ma = mg - T_A \quad\longrightarrow\quad T_A = mg - ma$$

$$I\alpha = RT_A - RT_B$$
$$\frac{MR^2}{2}\frac{a}{R} = RT_A - RT_B \quad\longrightarrow\quad \frac{M}{2}a = T_A - T_B$$

$$ma = T_B - mg\sin(\phi) - \mu_c mg\cos(\phi) \quad\longrightarrow\quad T_B = ma + mg\sin(\phi) + \mu_c mg\cos(\phi)$$

En éliminant les deux forces T_A et T_B, on peut obtenir l'expression de l'accélération. Pour déplacer les deux blocs et faire tourner la poulie, la force motrice est la force de gravité qui agit sur le premier bloc, tandis que deux forces s'opposent au mouvement : le frottement et la composante tangentielle de la force de gravité qui agissent sur le second bloc.

$$\begin{aligned}\left(m + m + \frac{M}{2}\right)a &= mg - mg\sin(\phi) - \mu_c mg\cos(\phi)\\ \Big(4m + M\Big)a &= 2mg\Big(1 - \sin(\phi) - \mu_c\cos(\phi)\Big)\end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned}a &= \frac{2mg}{4m+M}\Big(1 - \sin(\phi) - \mu_c\cos(\phi)\Big)\\ a &= \frac{40}{18}\,\frac{10-\sqrt{3}}{20}\end{aligned}$$

Et on déduit la valeur numérique demandée : $\boxed{a = \frac{10-\sqrt{3}}{9} = 0.92 \text{ m/s}^2}$

5. Calculer la vitesse de rotation de la poulie à l'instant t_* ?

On obtient facilement t_* en sachant $d = a\frac{t_*^2}{2}$ et on écrit ensuite :

$$\begin{aligned} v(t_*) &= a\ t_* \\ v(t_*) &= a\sqrt{\frac{2d}{a}} \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} v(t_*) &= \sqrt{2da} \\ R\ \omega(t_*) &= \sqrt{2da} \end{aligned}$$

Et on déduit la valeur numérique demandée : $\boxed{\omega(t_*) = \frac{\sqrt{2da}}{R} = 2.71\ \mathrm{s}^{-1}}$

6. Quel est l'amplitude de la force qui s'applique au support de la poulie ?

Comme la poulie tourne mais ne bouge pas, il suffit d'écrire la somme des forces pour en déduire la force F qui s'applique sur le support de la poulie :

$$0 = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -T_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\phi)\ T_B \\ -\sin(\phi)\ T_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\phi)\ T_B \\ Mg + T_A + \sin(\phi)\ T_B \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

En sachant que $Mg = 100$ kg m/s^2

En calculant que $T_A = mg - ma = 20 - 1.84 = 18.12$ kg m/s^2

En notant que $T_B = ma + mg\sin(\phi) + \mu_c mg\cos(\phi) = 1.84 + 10 + 1.73 = 13.57$ kg m/s^2

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11.75 \\ 124.91 \end{bmatrix} \text{kg m/s}^2$$

Et on déduit la valeur numérique demandée : $\boxed{F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 125.46\ \text{kg m/s}^2}$

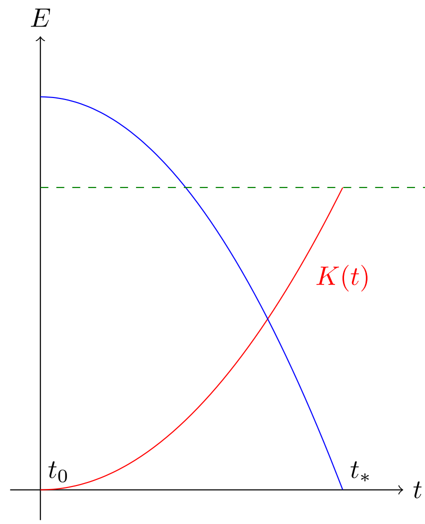
Ce calcul était un peu plus long et n'a eu qu'un impact à titre de bonus sur l'évaluation finale : il était donc possible d'obtenir une note de 10/10 à la question ouverte en ne répondant rien à cette sous-question :-)

7. Dessiner l'énergie cinétique et potentielle de système composé des deux blocs et de la poulie en fonction du temps $t \in [0, t_*]$.
   Par convention, l'énergie potentielle finale du système sera considérée comme nulle.

   L'évolution temporelle de l'énergie cinétique est donnée par une parabole :

$$K(t) \;=\; \frac{1}{2}\left(2m + \frac{M}{2}\right) a^2 t^2 \;=\; c\, t^2$$

   L'énergie mécanique n'est pas conservée, la parabole de l'énergie potentielle doit donc démarrer à une valeur supérieure à $K(t_*)$ si elle est nulle en $t = t_*$. En effet, une partie de cette énergie potentielle sera dissipée par le travail de la force de frottement.



   Ce graphe était vraiment assez simple à obtenir et il est donc assez impardonnable de ne pas obtenir l'allure correcte des deux paraboles. Ce graphe n'est à nouveau pas bien compliqué à obtenir avec un tout petit peu de bon sens physique !

2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Une réponse correcte rapporte 4 points, une réponse erronée en fait perdre 1 point.
Ne rien cocher ne fait rien gagner et ne fait rien perdre.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !
Gommer pour les corrections !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

Q1

Les composantes en mètres de la position d'un point matériel s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 + 10t + 2 \\ -t^3 + 54t \end{bmatrix}$$

Quelle est la norme v de sa vitesse au temps $t = 5$ secondes ?

A $v = 29.0$ m/s
B $v = 20.1$ m/s
C $v = 13.2$ m/s
D $v = 12.2$ m/s
E $v = 10.2$ m/s

A ■
B □
C □
D □
E □

Q2

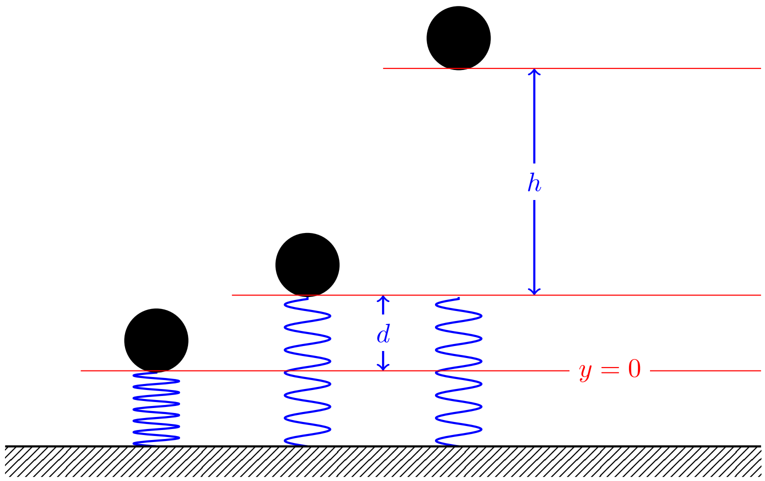
Un bloc de masse $m = 5$ kg glisse sur une pente formant un angle $\phi = 30^o$ avec l'horizontale. Tous les frottements sont négligeables.
L'accélération de la gravité est donnée par $g = 10$ m/s^2.
Quelle est la norme de l'accélération a du bloc ?

A $a = 4.33$ m/s^2
B $a = 5.00$ m/s^2
C $a = 7.08$ m/s^2
D $a = 8.66$ m/s^2
E $a = 10.00$ m/s^2

A □
B ■
C □
D □
E □

Q3

Une bille de masse m se trouve sur un ressort avec une constante de raideur k.
Le ressort est comprimé d'une distance d par rapport à son état au repos.
A l'instant $t = 0$, on relâche le ressort qui va propulser la bille.
Lorsque la bille se désolidarise du ressort, le ressort a sa longueur au repos.
La bille s'élève ensuite d'une hauteur h avant de retomber.



Quelle sera la vitesse de la bille lorsqu'elle se désolidarise du ressort ?

A	$v = \sqrt{2gh}$	**A**	■
B	$v = \sqrt{\dfrac{2gh}{m}}$	**B**	□
C	$v = mgh$	**C**	□
D	$v = \sqrt{\dfrac{gh}{2m}}$	**D**	□
E	$v = \sqrt{\dfrac{kd^2}{m}}$	**E**	□

Q4

Quelles sont les unités d'une puissance ?

A	$kg\ m^2\ /\ s^3$	**A**	■
B	$N\ m\ /\ s^2$	**B**	□
C	$kg^2\ m^2\ /\ s^2$	**C**	□
D	$J\ s$	**D**	□
E	$J\ m\ s^2$	**E**	□

Q5

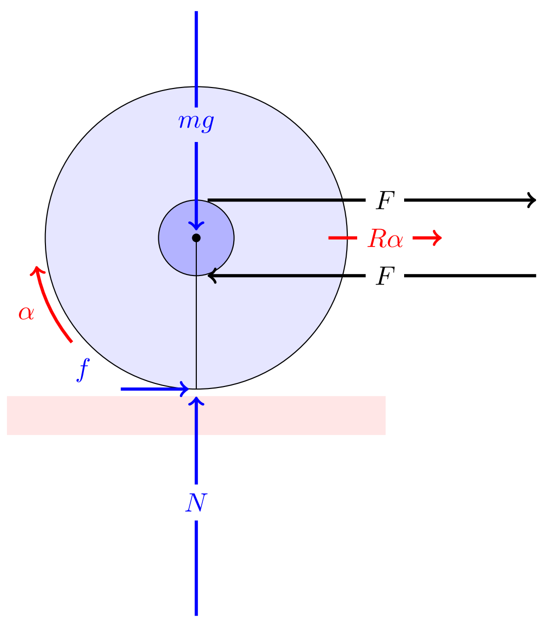
A l'instant $t = 0$, le chauffeur d'un camion roulant à 32 m/s aperçoit soudain un caribou immobile à 70 m devant lui. Pour éviter le caribou, le chauffeur freine à fond sans donner de coup de volant et le caribou reste pétrifié face à son destin. On suppose que le temps de réflexe du chauffeur est de 0.5 s et la décélération due au freinage sera d'une valeur constante de $a = 8$ m/s^2.

Estimer la distance totale d parcourue par le camion entre l'instant $t = 0$ et l'arrêt complet du véhicule.

A $d = 16.0$ m : le caribou est sauf ! **A** ☐
B $d = 24.0$ m : le caribou est sauf ! **B** ☐
C $d = 71.3$ m : le caribou est légèrement blessé ! **C** ☐
D $d = 80.0$ m : le caribou est dans le paradis des animaux. **D** ■
E $d = 97.5$ m : le caribou est dans le paradis des animaux. **E** ☐

Q6

Considérons une roue de vélo de rayon R entrainée par le mouvement de la chaine avec un pignon de rayon r. Par convention, une valeur positive des accélérations et forces représentées correspond à la donnée telle qu'elle est représentée sur le dessin.



Avec la convention choisie, l'équilibre de rotation s'écrit :

A $I\alpha = 2rF + Rf$ **A** ☐
B $I\alpha = rF - Rf$ **B** ☐
C $I\alpha = rF + 2Rf$ **C** ☐
D $I\alpha = 2rF - Rf$ **D** ■
E $I\alpha = 2RF - rf$ **E** ☐

Q7

Une particule de masse m se déplace sur une trajectoire circulaire de rayon R. Elle possède une accélération angulaire α produite par une force F appliquée tangentiellement à la trajectoire.

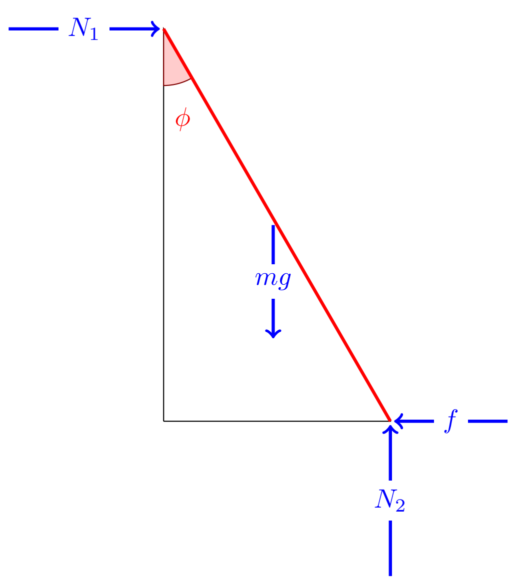
Quelle serait l'accélération angulaire α^* d'une particule de masse $3m$ sur une trajectoire de rayon $2R$ soumise à la même force tangentielle F ?

A $\alpha^* = \alpha/12$
B $\alpha^* = \alpha/6$
C $\alpha^* = 2\alpha/3$
D $\alpha^* = 3\alpha/4$
E $\alpha^* = \alpha$

A ☐
B ■
C ☐
D ☐
E ☐

Q8

On considère une échelle de longueur L et de masse m posée contre un mur avec un angle ϕ. Toutes les forces présentes sont indiquées sur la figure : il y a uniquement du frottement sur le sol, mais pas contre le mur. Le coefficient de frottement statique est noté μ_s.



Quelle est l'unique relation qui exprime l'équilibre
des moments des quatre forces
par rapport au sommet de l'échelle ?

A $-mL\cos(\phi) + mL\sin(\phi) + mL - \mu_s 2mL\cos(\phi) = 0$

B $-mg\cos(\phi) + mg\sin(\phi) - \mu_s mg = 0$

C $-gL\sin(\phi) + 2gL\cos(\phi) - \mu_s 2gL\cos(\phi) = 0$

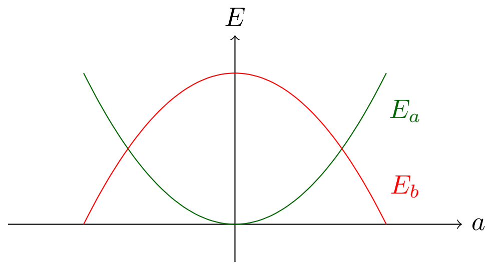
D $mgL\sin(\phi) + \mu_s 2mgL\cos(\phi) = 0$

E $\sin(\phi) = \mu_s 2\cos(\phi)$

A ☐
B ☐
C ☐
D ☐
E ■

Q9

On représente l'évolution de l'énergie cinétique et potentielle
de l'oscillation d'une masse m attachée à un ressort de raideur k.
L'allongement du ressort par rapport à sa longueur au repos est notée x.
Le temps est noté t. Malencontreusement, on a égaré la légende de la figure.



Quelle est l'unique légende correcte ?

A $E_a = \dfrac{mv^2}{2}$ et $E_b = \dfrac{kx^2}{2}$ avec $a = t$

B $E_a = \dfrac{kx^2}{2}$ et $E_b = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{kx^2}{2}$ avec $a = t$

C $E_a = \dfrac{kx^2}{2}$ et $E_b = \dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{kx^2}{2}$ avec $a = t$

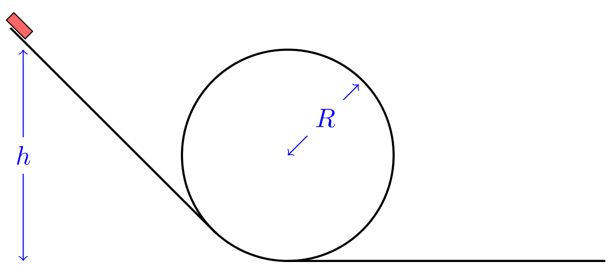
D $E_a = \dfrac{mv^2}{2}$ et $E_b = \dfrac{kx^2}{2}$ avec $a = x$

E $E_a = \dfrac{kx^2}{2}$ et $E_b = \dfrac{mv^2}{2}$ avec $a = x$

A ☐
B ☐
C ☐
D ☐
E ■

Q10

Dans un parc d'attraction, un wagonnet de masse m dévale une pente d'une hauteur h et effectue ensuite un looping dans cercle de rayon R. Tous les frottements sont supposés négligeables.



Quelle doit être la hauteur minimale h
afin que le wagon ne chute pas dans le looping ?

A $h > 7R/2$
B $h > 6R/2$
C $h > 5R/2$
D $h > 4R/2$
E $h > 3R/2$

A ☐
B ☐
C ■
D ☐
E ☐

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\ \frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\ \frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) &= \sum M_i \end{aligned}$$

Formulaire

Lorsque les forces sont constantes,

$$\begin{aligned} \Delta\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t \\ \Delta\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Mouvement d'un projectile

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$\Delta \overbrace{\left(\tfrac{1}{2} m\ v^2\right)}^{K} = \sum \overbrace{\vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W}$$

$$= \sum \underbrace{\vec{\mathbf{F}_{nc}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} - \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r}\Big)$$

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_x F_y - r_y F_x = F\ r_\perp = F_\perp\ r = F r \sin(\theta)$$

Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$

$$m\ \vec{\mathbf{x}}(t) = \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t)\Big)$$

$$m\ \vec{\mathbf{v}}(t) = \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t)\Big)$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\ r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\ k^2 = \sum m_i\ r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\ h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ \dfrac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m\ \dfrac{L^2}{12}$