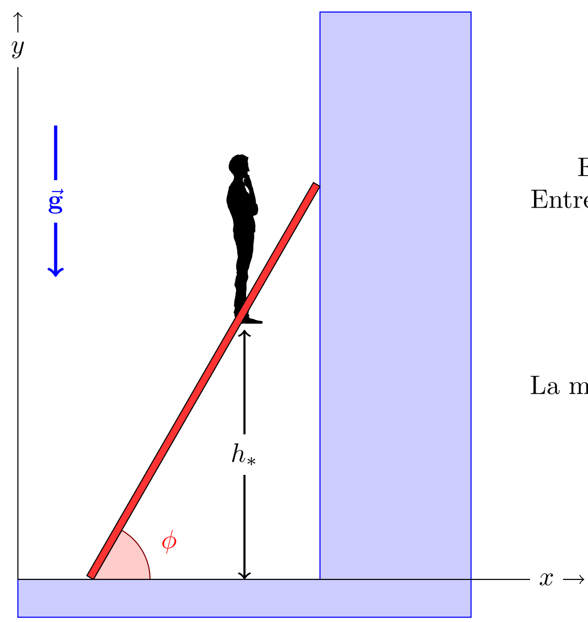
| | |
|---|---|
| **KINE11-EDPH11** | |
| **Janvier 2020** | *Introduction à la mécanique* |
| **IEPR 1011 -Bleu-** | *Vous pouvez conserver cet énoncé !* |

# 1 Grimper sur une échelle peut être périlleux...




Une échelle d'épaisseur négligeable de masse $m = 10$ kg et de longueur $L = 3$ m est appuyée sur un mur avec un angle $\phi = 60^o$.

Entre le mur et l'échelle, il n'y a aucun frottement. Entre le sol et l'échelle, il y a du frottement caractérisé par les coefficients $\mu_s = 0.5$ et $\mu_c = 0.1$.

Il s'agit de trouver la hauteur maximale $h_*$ que peut atteindre un ouvrier et sa sacoche avant que l'échelle ne commence à glisser. La masse de l'ouvrier et de sa sacoche est $M = 120$ kg.

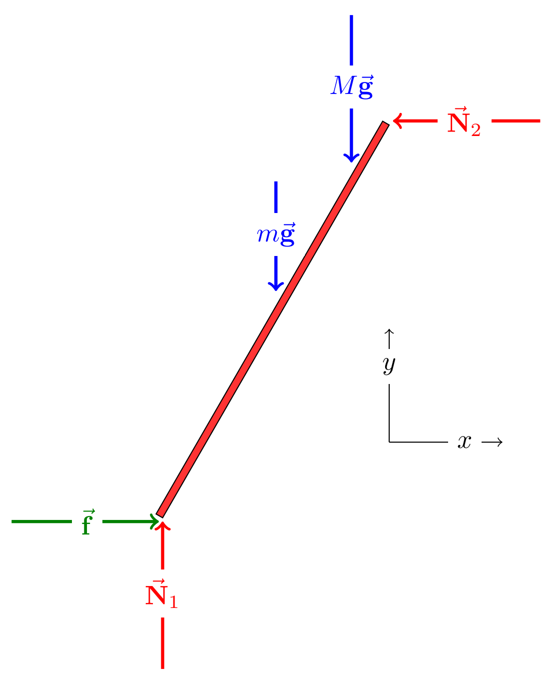
Dans les calculs, on utilisera $g = 10$ m/s$^2$.

1. Citer et dessiner l'ensemble de toutes les forces agissant sur l'échelle.
   Y indiquer clairement le nom et la notation habituelle pour chacune des forces.

   *Il faut citer les forces de gravité, les réactions au mur et sol. Il est admis de considérer une seule force de réaction au sol globalisant la composante normale et le frottement et d'effectuer la suite de l'exercice en utilisant les deux composantes de cette force globale.*
   *Toutes les forces sont constantes tant que l'échelle reste en équilibre.*

*Il faut donc citer :*

- *Poids de l'échelle :* $m\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$
- *Poids de l'ouvrier :* $M\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix}$
- *Force de réaction normale du sol :* $\vec{\mathbf{N}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ (m+M)g \end{bmatrix}$
- *Force de frottement au sol :* $\vec{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu(m+M)g \\ 0 \end{bmatrix}$
- *Force de réaction normale du mur :* $\vec{\mathbf{N}}_2 = \begin{bmatrix} -f \\ 0 \end{bmatrix}$



2. Calculer le moment d'inertie de l'échelle pour la rotation autour de son extrémité supérieure.

   *Il faut utiliser d'appliquer le théorème des axes parallèles et on conclut donc.*

$$\boxed{I \;=\; \frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{4} = \frac{mL^2}{3} \;=\; 30 \text{ kg m}^2}$$

   *Il faut évidemment appliquer le théorème des axes parallèles pour valider la question : Il était aussi vraiment impardonnable de ne pas obtenir la valeur numérique exacte pour valider votre réponse.*

3. Que devrait être le coefficient de frottement statique $\mu_*$ minimal nécessaire
   pour que l'échelle sans la présence de l'ouvrier ne glisse pas ?

   *Pour obtenir les forces, on écrit la somme des composantes des forces dans la direction $x$ et on calcule l'équilibre de rotation de l'échelle autour d'un point arbitraire. Il est assez judicieux de considérer la rotation autour du pied de l'échelle car cela simplifie les calculs, mais tout autre point était valable aussi. En prenant ensuite la force de frottement avec le coefficient statique minimal $f = \mu_* mg$, on obtient :*

$$\begin{aligned}
0 &= \mu_s mg - N_2 \\
0 &= N_2 L \sin(\phi) - mg\frac{L}{2}\cos(\phi)
\end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\mu_* mgL \underbrace{\sin(\phi)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = mg\frac{L}{2}\underbrace{\cos(\phi)}_{\frac{1}{2}}$$

*Et on déduit la valeur numérique demandée :* $\boxed{\mu_* \;=\; \frac{1}{2\sqrt{3}} \;=\; 0.29 \;<\; \mu_s}$

*On pourrait donc avoir un coefficient de frottement statique largement inférieur à $\mu_s = 0.5$.*
*Donc, l'échelle ne risque certainement pas de glisser en l'absence d'ouvrier !*

4. Quel est l'amplitude de la force de frottement
   lorsque l'ouvrier atteint la hauteur $h_*$ juste avant que l'échelle ne glisse ?

   *Il s'agit de la force de frottement obtenue avec $\mu_s$*
   *et avec une force normale correspondante égale à $(m + M)g$ !*

*On obtient donc :* $\boxed{f \;=\; \mu_s(m+M)g \;=\; 650 \text{ Newton}}$

5. Quelle est cette hauteur maximale $h_*$ que peut atteindre l'ouvrier avant que l'échelle ne glisse ?

*On procède exactement de la même manière mais il faut juste ajouter l'ouvrier et l'inconnue n'est plus $\mu_s$ mais la hauteur $h_*$. En écrivant la somme des moments de force au pied de l'échelle, on obtient maintenant :*

$$\begin{aligned} \mu_s(m+M)gL\sin(\phi) &= mg\frac{L}{2}\cos(\phi) + Mg\frac{h_*}{\sin(\phi)}\cos(\phi) \\ &\downarrow \\ L\,\frac{\mu_s(m+M)6 - m\sqrt{3}}{4M} &= h_* \end{aligned}$$

*Et on déduit :* $\boxed{h_* = \frac{390 - 10\sqrt{3}}{160} = 2.33 \text{ m}}$

6. Lorsque l'échelle se met à glisser, l'ouvrier lâche sa sacoche dans un réflexe soudain et immédiat. Quelle sera le temps de chute de sa sacoche ?

*C'était vraiment un petit cadeau de l'enseignant :-)*
*On écrit l'équation du MRUA :*

$$0 = y(t) = g\frac{t^2}{2} - h^*$$

*et on déduit :* $\boxed{t = \sqrt{\frac{2h_*}{g}} = 0.68 \text{ s}}$

7. Avoir réduit son poids en se débarrassant d'une lourde sacoche va-t-il permettre d'arrêter la glissade de l'échelle de l'ouvrier ? Justifier brièvement votre réponse !

*Lorsque l'échelle se met à glisser, il faut utiliser $\mu_c = 0.1 < \mu_* = 0.29 < \mu_s = 0.5$ ! On observe ainsi que la force de frottement ne serait même plus suffisante pour retenir seulement l'échelle, il n'y a donc vraiment aucune chance d'arrêter la glissade de l'échelle. En réalité, même si l'ouvrier sautait, l'échelle continuerait à glisser !*

*Il faut donc juste écrire :* $\boxed{\textit{Non, l'échelle va continuer à glisser car } \mu_c \ll \mu_s}$

8. Dessiner l'évolution de l'amplitude de la force de frottement
en fonction de la hauteur $h \in [0, h_*]$ de l'ouvrier.
Indiquer la valeur minimale et maximale de la force de frottement sur ce graphe.

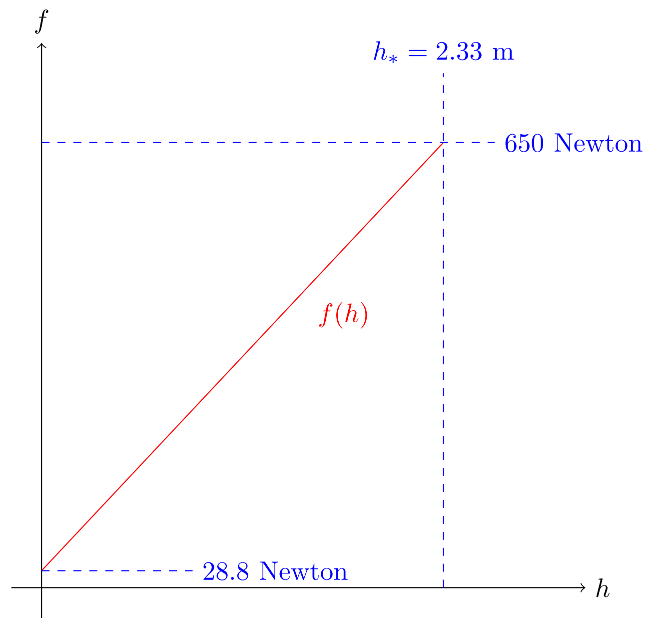
*On reprend l'équilibre de rotation et on exprime maintenant $f$ comme une fonction de $h$.*

$$f(h)\ L\sin(\phi) = mg\frac{L}{2}\cos(\phi) + Mg\frac{h}{\sin(\phi)}\cos(\phi)$$

$$\downarrow$$

$$f(h) = \underbrace{\frac{mg\cos(\phi)}{2\sin(\phi)}}_{28.8675} + h\ \underbrace{\frac{Mg\cos(\phi)}{L\sin^2(\phi)}}_{266.6667}$$

*On voit donc que le frottement grandit de manière purement linéaire entre pour $h \in [0, h_*]$.*
*Plus précisément, il passe d'une valeur de* 28,8 Newton *à une valeur de* 650 Newton.
*Il faut donc juste tracer une simple droite qui monte.*



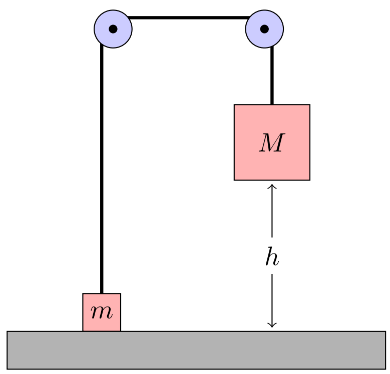

*Difficile de dire que cette courbe était compliquée à dessiner et c'est peut-être ce qui vous a un peu surpris in fine :-)*

## 2 Questions à choix multiples

*Attention !*
*Il y a toujours une et une seule bonne réponse !*
*Une réponse correcte rapporte 4 points, une réponse erronée fait perdre 1 point.*
*Ne rien cocher ne fait rien gagner et ne fait rien perdre.*
*Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)*
*Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !*
*Gommer pour les corrections !*
*N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !*

Q1

Deux blocs de masses $M > m$ sont reliés par un fil de masse négligeable qui glisse sur deux petites poulies sans frottement. Initialement, le premier bloc $M$ est maintenu à une hauteur $h$ au dessus du sol alors que le second bloc $m$ est posé sur le sol. On lâche ensuite le système et le premier bloc $M$ tombe, tandis que le second se soulève.




Quelle est la vitesse $v$ lorsque le bloc $M$ touche le sol ?

**A** $v = \sqrt{\dfrac{2(M-m)gh}{M+m}}$ — **A** ■

**B** $v = \sqrt{\dfrac{(M-m)gh}{m-M}}$ — **B** □

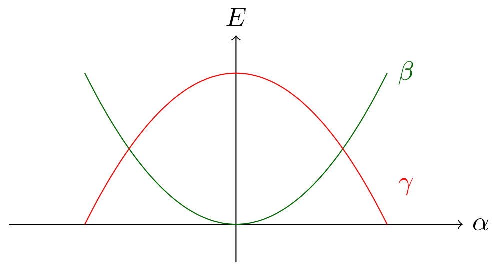
**C** $v = \sqrt{\dfrac{2(M-m)gh}{M}}$ — **C** □

**D** $v = gh\sqrt{\dfrac{4(M-m)}{(M+m)}}$ — **D** □

**E** $v = gh\sqrt{\dfrac{2(M-m)}{M+m}}$ — **E** □

Q2

On considère un système oscillant composé d'un bloc attaché à un ressort. On a dessiné un graphe pour décrire l'évolution de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique, mais un petit facétieux a modifé la légende de la figure. Le temps, l'allongement du ressort, l'énergie cinétique du système et l'énergie potentielle du ressort seront notés respectivement $t$, $x$, $K$ et $U_r$.




Que représentent l'axe des abscisses et les courbes de ce graphe ?

**A** $\alpha = t$, $\beta = K - U_r$ et $\gamma = K + U_r$ — **A** ☐
**B** $\alpha = t$, $\beta = K + U_r$ et $\gamma = K - U_r$ — **B** ☐
**C** $\alpha = t$, $\beta = U_r$ et $\gamma = K$ — **C** ☐
**D** $\alpha = x$, $\beta = K$ et $\gamma = U_r$ — **D** ☐
**E** $\alpha = x$, $\beta = U_r$ et $\gamma = K$ — **E** ■

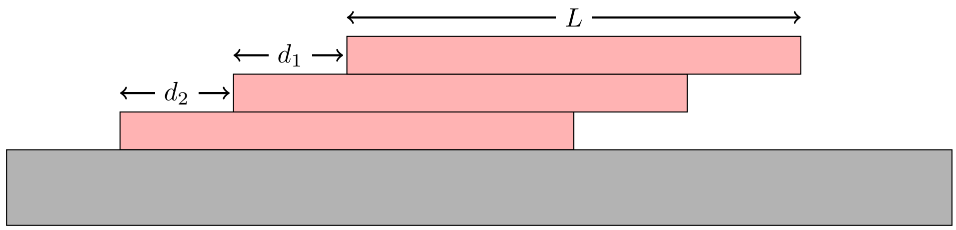
Q3

Une machine à laver effectue 1 800 tours par minute, lors de l'essorage du linge dans un tambour de rayon $R = 0.15\ m$.
Que vaut l'accélération centripète $a_c$ ressentie par le linge ?

**A** $a_c = 56\ 500$ m/s$^2$ — **A** ☐
**B** $a_c = 21\ 310$ m/s$^2$ — **B** ☐
**C** $a_c = 19\ 400$ m/s$^2$ — **C** ☐
**D** $a_c = 5\ 330$ m/s$^2$ — **D** ■
**E** $a_c = 3\ 550$ m/s$^2$ — **E** ☐

Q4

On empile trois briques homogènes identiques de longueur $L$.




Quelle sont les distances maximales $d_1$ et $d_2$ que l'on peut choisir afin que les briques ne basculent pas ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| **A** | $d_1 = \frac{L}{2}$ et $d_2 = \frac{L}{2}$ | **A** | ☐ |
| **B** | $d_1 = \frac{L}{2}$ et $d_2 = \frac{L}{4}$ | **B** | ■ |
| **C** | $d_1 = \frac{L}{3}$ et $d_2 = \frac{L}{3}$ | **C** | ☐ |
| **D** | $d_1 = \frac{L}{4}$ et $d_2 = \frac{L}{2}$ | **D** | ☐ |
| **E** | $d_1 = \frac{L}{4}$ et $d_2 = \frac{L}{4}$ | **E** | ☐ |

Q5

Une boule de billard se déplaçant à la vitesse de 2 m/s heurte une boule identique qui est immobile. Après la collision, l'une des boules se déplace à la vitesse de 1 m/s suivant un angle de $45^o$ par rapport à la direction initiale du mouvement.
Quelle est la direction et la norme $v$ du vecteur vitesse de l'autre boule ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| **A** | $v = 2$ et le vecteur forme un angle $0^o$ avec la direction initiale. | **A** | ☐ |
| **B** | $v = 1$ et le vecteur forme un angle $-45^o$ avec la direction initiale. | **B** | ☐ |
| **C** | $v = 1.47$ et le vecteur forme un angle $-60^o$ avec la direction initiale. | **C** | ☐ |
| **D** | $v = 1.47$ et le vecteur forme un angle $-45^o$ avec la direction initiale. | **D** | ☐ |
| **E** | $v = 1.47$ et le vecteur forme un angle $-29^o$ avec la direction initiale. | **E** | ■ |

Q6

Quelles sont les unités d'un travail ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| **A** | $N\ m^2$ | **A** | ☐ |
| **B** | $kg\ m^2\ /\ s^3$ | **B** | ☐ |
| **C** | $kg\ m^2\ /\ s^2$ | **C** | ■ |
| **D** | $J\ s$ | **D** | ☐ |
| **E** | $J\ m\ s^2$ | **E** | ☐ |

Q7

On considère un mouvement circulaire uniforme.
Quelle est l'unique affirmation correcte ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| **A** | Le vecteur vitesse est constant. | **A** | ☐ |
| **B** | Le vecteur accélération est tangentiel. | **B** | ☐ |
| **C** | Le vecteur accélération est constant. | **C** | ☐ |
| **D** | Le vecteur accélération est centrifuge. | **D** | ☐ |
| **E** | Le vecteur accélération est centripète. | **E** | ■ |

Q8

Un phénomène se reproduit identiquement à lui-même toutes les 4 secondes.
Quelle est sa fréquence $f$ ?

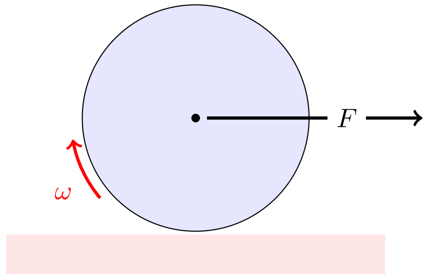
| | | | |
|---|---|---|---|
| **A** | $f = 0.25\ \mathrm{s}^{-1}$ | **A** | ■ |
| **B** | $f = 0.25$ s | **B** | ☐ |
| **C** | $f = 4\pi$ Hertz | **C** | ☐ |
| **D** | $f = 4$ Hertz | **D** | ☐ |
| **E** | $f = 4$ s | **E** | ☐ |

Q9

Une balle d'une masse de 10 grammes est tirée avec une carabine de 4kg.
La vitesse de la balle est de 800m/s.
Que vaut $v$, la norme de la vitesse de recul de la carabine, juste après le tir ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| **A** | $v = 0$ m/s | **A** | ☐ |
| **B** | $v = 0.5$ m/s | **B** | ☐ |
| **C** | $v = 1$ m/s | **C** | ☐ |
| **D** | $v = 2$ m/s | **D** | ■ |
| **E** | $v = 4$ m/s | **E** | ☐ |

Un cylindre plein de masse $m$ et de rayon $R$ subit en son centre une force de traction horizontale $F$ et roule sans glisser sur le sol.




Q10 Quelle est la condition requise pour empêcher le glissement ?

**A** $\mu_s + \mu_c \geq \dfrac{F}{3mg}$ — **A** ☐

**B** $\mu_s \geq \dfrac{3mg}{F}$ — **B** ☐

**C** $\mu_s \geq \dfrac{F}{3mg}$ — **C** ■

**D** $\mu_s \geq \dfrac{F + mg}{3mg}$ — **D** ☐

**E** $\mu_s - \mu_c \leq \dfrac{F}{mg}$ — **E** ☐

*N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.*

# Formulaire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\ \frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\ \frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) &= \sum M_i \end{aligned}$$

Lorsque les forces sont constantes,

$$\begin{aligned} \Delta\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t \\ \Delta\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

**Mouvement d'un projectile**

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

**Mouvement circulaire uniformément accéléré :** $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire $\omega$ et accélération angulaire $\alpha$

**Bilan d'énergie**

$$\Delta \overbrace{\left(\tfrac{1}{2} m\ v^2\right)}^{K} \;=\; \sum \overbrace{\vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta \vec{\mathbf{x}}}^{W}$$

$$= \sum \underbrace{\vec{\mathbf{F}}_{nc} \cdot \Delta \vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} \;-\; \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r}\Big)$$

**Moment d'une force dans le plan**

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} \;=\; \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M \;=\; r_x F_y - r_y F_x \;=\; F\ r_\perp \;=\; F_\perp\ r \;=\; F r \sin(\theta)$$

**Ensemble de particules : un corps !**

$$m \;=\; \sum m_i$$

$$m\ \vec{\mathbf{x}}(t) \;=\; \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t)\Big)$$

$$m\ \vec{\mathbf{v}}(t) \;=\; \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t)\Big)$$

**Moment d'inertie**

$$I \;=\; \sum m_i\ r_i^2$$

**Rayon de giration**

$$m\ k^2 \;=\; \sum m_i\ r_i^2$$

**Théorème des axes parallèles**

$$I_h \;=\; m\ h^2 + I$$

**Moments d'inertie de corps rigides homogènes**

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ \dfrac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m\ \dfrac{L^2}{12}$