KINE11-EDPH11	
Janvier 2021	*Introduction à la mécanique*
IEPR 1011 -Rose-	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

1 Un bloc monte et l'autre descend...

Attention ! Il faut répondre exclusivement sur l'unique feuille de réponse fournie.
Ce questionnaire peut servir de brouillon, mais ne sera jamais lu par le correcteur !

Deux blocs de masses $m = 3$ kg et $2m = 6$ kg
sont suspendus de part et d'autre d'une poulie

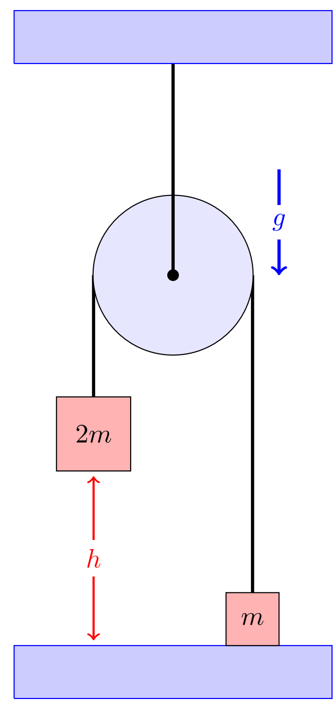
Pour tout instant $t < 0$, les blocs et la poulie sont maintenus immobiles.
Le bloc le plus lourd se trouve à une hauteur $h = 2.4$ m du sol.
Le bloc le plus léger repose sur le sol.

A l'instant $t = 0$, on libère la poulie qui va commencer à tourner.
Les deux blocs se mettent en mouvement.

En $t = t_*$, le bloc le plus lourd touche le sol et s'immobilise.

En $t = t_{**} > t_*$, le bloc le plus léger s'immobilise également.

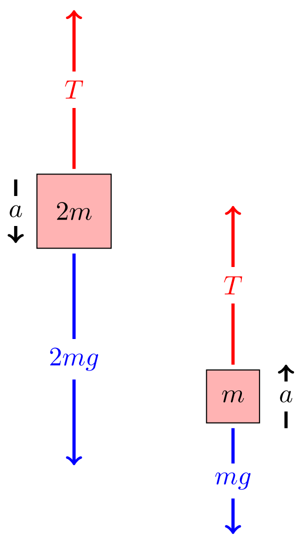
La masse et l'inertie de la poulie sont négligeables.
La masse de la corde est négligeable.
Dans les calculs, on utilisera $g = 10$ m/s^2.



1. Calculer la tension constante T dans la corde et
le module de l'accélération a des deux blocs
lorsque les deux blocs sont en mouvement ou lorsque $t \in [0, t_*]$.

Comme la poule est idéale, la tension dans la corde est identique partout.
On peut donc écrire que la force T exercée par la corde sur les deux blocs est identique et que le module de l'accélération a est également identique. Attention, les deux forces ne seront plus identiques lorsqu'on tiendra compte dans la suite de l'inertie de la poulie.

Pour obtenir les deux quantités demandées, il suffit donc d'écrire la loi de Newton pour chaque bloc et on obtiendra deux équations avec deux inconnues.



$$
\begin{aligned}
2ma &= 2mg - T \\
ma &= T - mg
\end{aligned}
$$

En additionnant les deux équations pour éliminer T

$$3ma = 2mg - mg$$

Et on déduit les deux valeurs numériques demandées :

$$
\boxed{
\begin{aligned}
a &= \frac{g}{3} = \frac{10}{3} = 3.33 \text{ m/s}^2 \\
T &= ma + mg = \frac{4mg}{3} = 40 \text{ N}
\end{aligned}
}
$$

2. Quelle est la vitesse du petit bloc en $t = t_*$?

Il s'agit d'un mouvement avec un accélération constante : le fameux MRUA !
Il suffit donc de calculer la vitesse atteinte après avoir parcouru une distance $h = 2.4$ m.
On calcule le temps t_* et on en déduit ensuite la vitesse v.

$$v = at_* \qquad\qquad h = \frac{at_*^2}{2}$$

En y substituant la valeur obtenue pour le temps : $\quad t_* = \sqrt{\dfrac{2h}{a}}$

$$v = a\sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{2ha}$$

Et on conclut :

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4 \text{ m/s}}$$

Il est aussi possible d'obtenir directement ce résultat en faisant en bilan d'énergie. L'approche est plus rapide, mais il faut être bien attentif à remarquer que le petit bloc a acquis de l'énergie potentielle, tandis que le gros bloc en perdait. Et évidemment, tenir compte que les deux blocs ont gagné de l'énergie cinétique. Noter qu'il est ainsi possible d'obtenir la vitesse sans avoir calculé l'accélération a : c'est une démarche brillante faite par quelques étudiants. Malencontreusement, beaucoup d'étudiants effectuent de manière incorrecte ce bilan d'énergie tandis que d'autres utilisent l'accélération de la gravité au lieu de a dans le raisonnement qui précède.

$$\frac{3mv^2}{2} + mgh = 2mgh$$

$$\downarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = 4 \text{ m/s}$$

Ensuite, il serait même possible de re-déduire l'accélération a à partir de cette vitesse v et de la hauteur h. Si, si, c'est bien possible : je vous laisse le soin de le retrouver.

3. Quelle la hauteur maximale $h_m > h$ qu'atteindra le bloc le plus léger ?

Lorsque le bloc le plus lourd s'immobilise sur le sol, l'autre bloc a atteint une vitesse $v = 4$ m/s et va donc continuer à s'élever comme une balle qu'on lance vers le haut avec cette vitesse initiale.
Il s'agit à nouveau d'un mouvement avec un accélération constante : toujours le fameux MRUA !
Il faut maintenant calculer la hauteur h_m lorsque la vitesse du bloc le plus léger s'annule : $v_m = 0$.
Pour effectuer ce calcul, il est très commode de considérer comme instant initial t_*.
On calcule ainsi le laps de temps t pendant lequel le petit bloc s'élève sans être tiré par la corde.
Ensuite, on en déduit ensuite la hauteur h_m.

$$h_m = h + vt - \frac{gt^2}{2} \qquad\qquad 0 = v - gt$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

En y substituant la valeur obtenue pour le temps : $t = \frac{v}{g}$

$$h_m = h + v\frac{v}{g} - \frac{gv^2}{2g^2} = h + \frac{v^2}{2g}$$

Et on conclut : $\boxed{h_m = 2.4 + \frac{16}{20} = 2.4 + 0.8 = 3.2 \text{ m}}$

A nouveau, on peut aussi effectuer un bilan énergétique pour directement trouver cette valeur !

$$mgh_m = mgh + \frac{mv^2}{2}$$

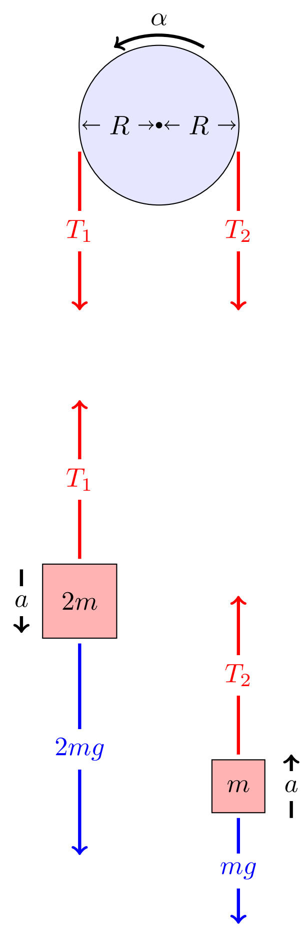
$$\downarrow$$

$$h_m = h + \frac{v^2}{2g} = 3.2 \text{ m}$$

4. Quelle serait l'accélération $\widehat{a}$ des deux blocs si nous tenions compte de l'inertie de la poulie qui est un cylindre plein de rayon $R = 0.25$ m et de masse $M = 2$ kg ?

Lorsqu'on tient compte de l'inertie de la poulie, les tensions dans la corde des deux côtés de la poulie ne seront plus identiques. Il faut maintenant toujours écrire les équations du mouvement pour chaque bloc mais y ajouter en plus l'équation de la dynamique de rotation pour la poulie.
On obtiendra ainsi trois équations pour les trois inconnues T_1, T_2 et $\widehat{a}$.
Pour alléger les notations, nous écrirons a au lieu de $\widehat{a}$ dans ce qui suit.

Pour la poulie, l'équation de la dynamique de rotation s'écrit :



$$I\alpha = RT_1 - RT_2$$

En sachant que $I = \dfrac{MR^2}{2}$ et $\alpha = \dfrac{a}{R}$

$$\frac{MR^2}{2}\frac{a}{R} = RT_1 - RT_2$$

En simplifiant l'expression, peut éliminer R :-)

$$\frac{M}{2}a = T_1 - T_2$$

Les trois équations liant T_1, T_2 et a s'écrivent finalement :

$$\begin{aligned} 2ma &= 2mg - T_1 \\ \frac{M}{2}a &= T_1 - T_2 \\ ma &= T_2 - mg \end{aligned}$$

En additionnant les trois équations pour éliminer T_1 et T_2 :-)

$$\left(2m + \frac{M}{2} + m\right) a = 2mg - mg$$

Et on déduit l'accélération demandée : $\boxed{\widehat{a} = \dfrac{2mg}{(6m+M)} = \dfrac{60}{20} = 3 \text{ m/s}^2}$

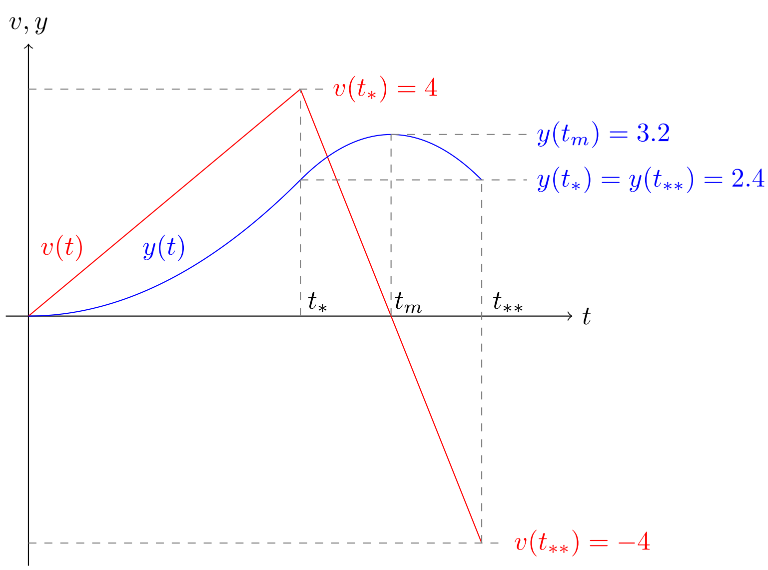
5. La valeur $\widehat{a}$ doit-elle être plus grande ou plus petite que a ?
Justifier brièvement votre réponse.

L'accélération $\widehat{a}$ doit être inférieure à a puisque le mouvement est obtenu par la différence entre la force de gravité qui s'exerce sur le gros bloc qui descend (la force motrice de ce système) et la force de gravité sur le bloc qui monte (la force résistive du système). Ici, la résultante des deux forces du système doit maintenant non seulement faire bouger les deux blocs mais également faire tourner la poulie, en sus ! Il est donc logique que l'accélération qui est causée par une même force résultante mais qui doit faire bouger davantage de corps soit plus modeste.

Sans faire aucun calcul, il suffit d'écrire donc : $\boxed{\widehat{a} \quad < \quad a}$

6. Dessiner la vitesse $v(t)$ et la position $y(t)$ du bloc le plus léger en fonction du temps pour $t \in [0, t_{**}]$.
Par convention, on suppose $y(0) = 0$, lorsque la base du bloc est sur le sol.
On suppose aussi que la vitesse $v(t)$ est positive si le bloc monte.
Y indiquer clairement ce qui se passe $t = t_*$ et en $t = t_{**}$.

Il faut juste tracer la vitesse et la position de deux MRUAs. La première partie correspond à la trajectoire d'une fusée qui s'élève sous l'effet d'une force de propulsion constante. La seconde partie correspond à la trajectoire parabolique d'une balle lancée avec une vitesse initiale donnée qui va s'élever et puis retomber sous l'effet de la gravité. Ou encore, la chute malencontreuse d'une fusée dont le moteur se serait arrêté de manière inopinée....



Il est très aisé d'obtenir que $t_* = 1.2$, $t_m = 1.6$ et $t_{**} = 2.0$ secondes, même si cela n'était pas demandé. La courbure des deux parties de la courbe $y(t)$ doit être correcte pour obtenir la totalité des points de la question. Ce graphe peut être assez facilement deviné avec un tout petit peu d'intuition physique, sans faire aucun calcul :-)

A titre de défi, essayez de tracer les courbes d'énergie cinétique et potentielle pour ce bloc : c'est un fifrelin plus compliqué mais pas vraiment difficile :-) Noter au passage que l'enseignant est définitivement trop gentil, car c'était son idée initiale et puis, il a estimé cela un fifrelin trop difficile pour une année pleine de virus si méchants...

L'enseignant a été monstrueusement déçu par le nombre incalculable d'étudiants qui tracent une courbe linéaire pour la vitesse et une courbe parabolique pour la vitesse ! Faut-il encore ici le répéter ! Dans un MRUA, l'accélération est constante, la vitesse est linéaire et la position parabolique ! Alors que l'enseignant pensait que tracer la cinématique d'un MRUA était une question plus simple qu'un habituel graphe énergétique, il est apparu que faire une question plus simple a étonné et désarçonné pas mal d'étudiants et d'étudiantes..... Les voies de la mécanique sont impénétrables comme d'habitude !

2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Ne pas répondre ou cocher une réponse erronée ne fait rien perdre.
Par contre, il faut répondre correctement à six questions pour réussir cette partie.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !
Gommer pour les corrections !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

Q1

En écartant les deux bras, une patineuse est en rotation autour d'un axe vertical passant par sa tête. La vitesse angulaire de rotation est constante.
Quelle est l'unique affirmation exacte ?

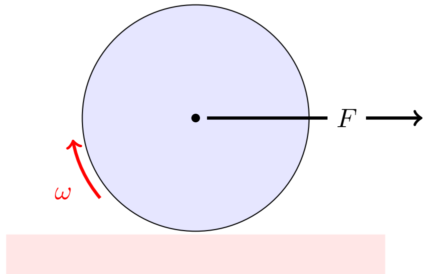
A	Les mains de la patineuse ne sont soumises à aucune accélération.	**A**	☐
B	Les mains de la patineuse sont soumises à une accélération dont la norme est constante.	**B**	■
C	Les mains de la patineuse sont soumises à une accélération constante.	**C**	☐
D	La vitesse des mains est identique à celle des parties du corps proches de l'axe car le mouvement est uniforme.	**D**	☐
E	Un mouvement circulaire ne peut jamais être uniforme.	**E**	☐

Q2

On observe une collision entre deux billes de masse identique.
Une des deux billes est initialement au repos.
L'autre bille a une vitesse initiale $\vec{\mathbf{v}}$ avant la collision.
Après la collision, les deux billes ont des vitesses finales non-nulles $\vec{\mathbf{v}}_1$ et $\vec{\mathbf{v}}_2$.
Quelle est l'unique affirmation exacte ?

A	La direction de $\vec{\mathbf{v}}$ sera la moyenne des directions de $\vec{\mathbf{v}}_1$ et $\vec{\mathbf{v}}_2$.	**A**	☐
B	La conservation de la quantité de mouvement implique que : $2\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2$.	**B**	☐
C	Les deux vitesses finales seront toujours perpendiculaires.	**C**	☐
D	Les deux vitesses finales seront perpendiculaires si le choc est inélastique.	**D**	☐
E	Les deux vitesses finales seront perpendiculaires si le choc est élastique.	**E**	■

Un cylindre plein de masse m et de rayon R subit en son centre une force de traction horizontale F et roule sans glisser sur le sol.



Q3 Quelle est la condition requise pour empêcher le glissement ?

A $\mu_s \geq \frac{F}{3mg}$

B $\mu_s + \mu_c \geq \frac{F}{3mg}$

C $\mu_c \geq \frac{3mg}{F}$

D $\mu_c \geq \frac{F + mg}{3mg}$

E $\mu_s - \mu_c \leq \frac{F}{mg}$

A ■
B □
C □
D □
E □

Q4 Quelles sont les unités d'un travail ?

A $N\ m^2$
B $J\ m\ s^2$
C $kg\ m^2\ /\ s^3$
D $kg\ m^2\ /\ s^2$
E $J\ s$

A □
B □
C □
D ■
E □

Q5

Une voiture effectue un virage circulaire de rayon R sur une route dont le côté extérieur est relevé d'un angle θ par rapport à l'horizontale. Les coefficients de frottement statique et dynamique entre les pneus de la voiture et le sol sont notés μ_s et μ_c. L'accélération de la gravité est notée g.

Quelle est la vitesse maximale v pour que la voiture ne dérape pas ?

A $v = \sqrt{Rg \dfrac{\sin(\theta) + \mu_c \cos(\theta)}{\cos(\theta)}}$

B $v = \sqrt{Rg \dfrac{\sin(\theta) + \mu_s \cos(\theta)}{\mu_c \sin(\theta)}}$

C $v = \sqrt{Rg \dfrac{\mu_s \sin(\theta)}{\sin(\theta) - \mu_s \cos(\theta)}}$

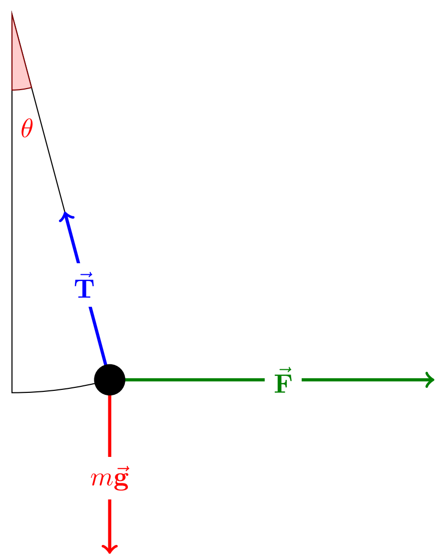
D $v = \sqrt{Rg \dfrac{\sin(\theta) + \mu_s \cos(\theta)}{\cos(\theta) - \mu_s \sin(\theta)}}$

E $v = \sqrt{Rg \dfrac{\sin(\theta) + \mu_c \cos(\theta)}{\cos(\theta) - \mu_c \sin(\theta)}}$

A ☐
B ☐
C ☐
D ■
E ☐

Q6

La masse d'un pendule est maintenue immobile à un angle θ par une force horizontale $F = 2$. La force de gravité vaut $mg = 1$.



Quelle est la tension T du fil auquel est reliée la masse du pendule ?
Toutes les forces sont exprimées en Newton.

A $T = 1$
B $T = 2\cos(\theta) + \sin(\theta)$
C $T = 2\cos(\theta)$
D $T = \sin(\theta)$
E $T = \sqrt{5}$

A ☐
B ☐
C ☐
D ☐
E ■

Q7

En partant du repos, un coureur de 70 kg parcourt une distance de six mètres en une seconde. En une approximation un peu rapide, on suppose que les jambes du coureur produisent une force horizontale constante F.

Que vaudrait cette force ?

A $F = 840$ N
B $F = 700$ N
C $F = 420$ N
D $F = 350$ N
E $F = 70$ N

A	■
B	□
C	□
D	□
E	□

Q8

Un joueur de base-ball lance une balle en accompagnant celle-ci avec sa main sur une distance $d = 2$ m. La balle a une masse $m = 0.15$ kg et a une vitesse $v = 25$ m/s lorsqu'elle quitte la main du joueur.

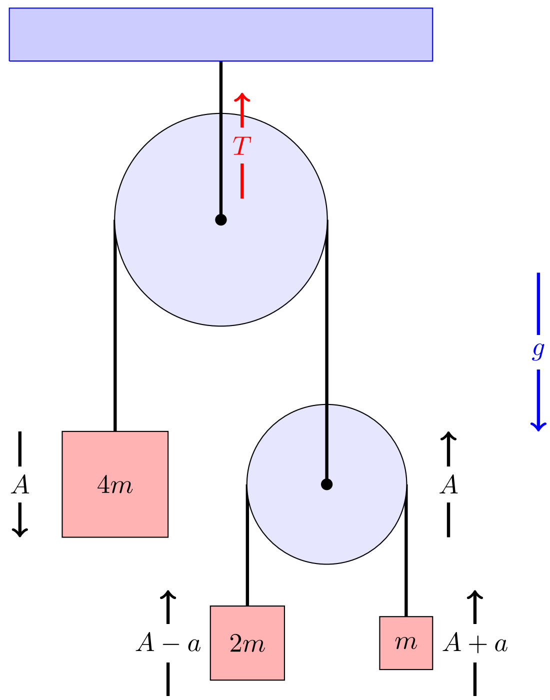
Quelle est la force F supposée constante exercée par la main du joueur ?

A $F = 46.9$ N
B $F = 23.4$ N
C $F = 25.0$ N
D $F = 11.7$ N
E $F = 10.0$ N

A	□
B	■
C	□
D	□
E	□

Q9

Trois masses sont suspendues à deux poulies supposées de masse et d'inertie négligeable. Il n'y a aucun frottement dans les poulies. On note A l'accélération de la plus grosse masse et a l'accélération de la plus petite masse par rapport à la poulie qui la retient. La plus grosse masse descend et la plus petite remonte.



Quelle est la force T qui retient la première poulie ?

A $T = \dfrac{64mg}{7}$ — **A** ☐

B $T = \dfrac{32mg}{5}$ — **B** ■

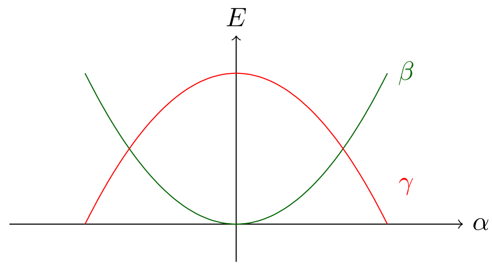
C $T = \dfrac{30mg}{5}$ — **C** ☐

D $T = \dfrac{21mg}{4}$ — **D** ☐

E $T = \dfrac{16mg}{5}$ — **E** ☐

Q10

On considère un système oscillant composé d'un bloc attaché à un ressort. On a dessiné un graphe pour décrire l'évolution de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique, mais un petit facétieux a modifé la légende de la figure. Le temps, l'allongement du ressort, l'énergie cinétique du système et l'énergie potentielle du ressort seront notés respectivement t, x, K et U_r.



Que représentent l'axe des abscisses et les courbes de ce graphe ?

A $\alpha = t$, $\beta = K - U_r$ et $\gamma = K + U_r$

B $\alpha = t$, $\beta = K + U_r$ et $\gamma = K - U_r$

C $\alpha = t$, $\beta = U_r$ et $\gamma = K$

D $\alpha = x$, $\beta = K$ et $\gamma = U_r$

E $\alpha = x$, $\beta = U_r$ et $\gamma = K$

A	☐
B	☐
C	☐
D	☐
E	■

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\ \frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\ \frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) &= \sum M_i\end{aligned}$$

Formulaire

Lorsque les forces sont constantes,

$$\begin{aligned}\Delta\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t \\ \Delta\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

Mouvement d'un projectile

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$\Delta \overbrace{\left(\frac{1}{2} m\ v^2\right)}^{K} \;=\; \sum \overbrace{\vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W}$$

$$= \sum \underbrace{\vec{\mathbf{F}}_{nc} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} \;-\; \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r}\Big)$$

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} \;=\; \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M \;=\; r_x F_y - r_y F_x \;=\; F\ r_\perp \;=\; F_\perp\ r \;=\; F r \sin(\theta)$$

Ensemble de particules : un corps !

$$m \;=\; \sum m_i$$

$$m\ \vec{\mathbf{x}}(t) \;=\; \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t)\Big)$$

$$m\ \vec{\mathbf{v}}(t) \;=\; \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t)\Big)$$

Moment d'inertie

$$I \;=\; \sum m_i\ r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\ k^2 \;=\; \sum m_i\ r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_h \;=\; m\ h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $\quad I \;=\; m\ R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $\quad I \;=\; m\ \dfrac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $\quad I \;=\; m\ \dfrac{L^2}{12}$