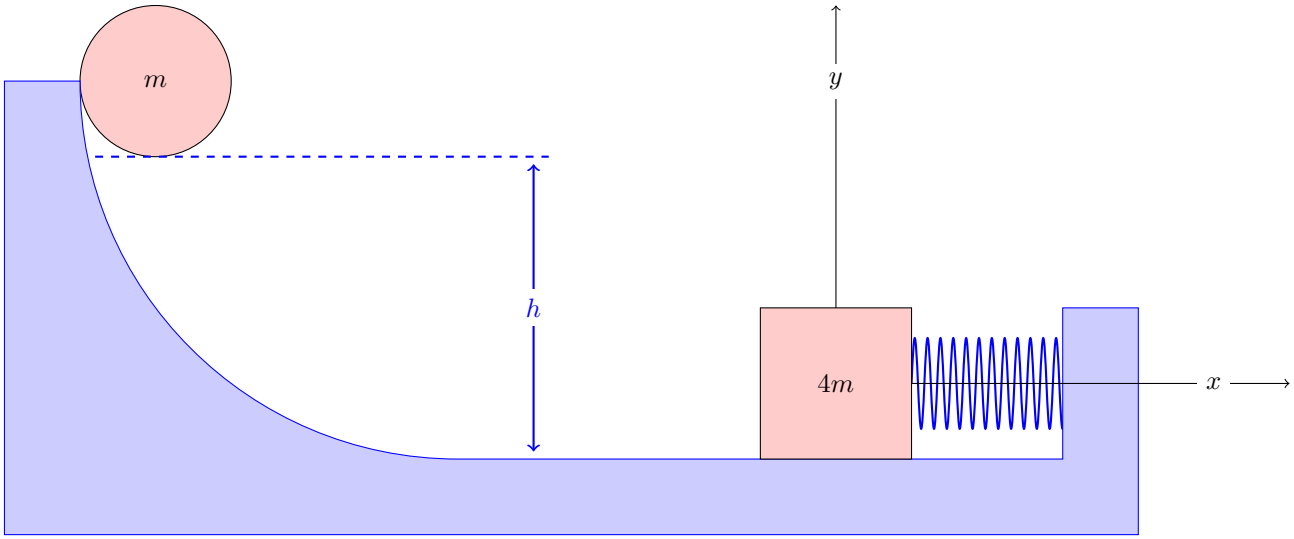
KINE11-EDPH11	
Janvier 2022	*Introduction à la mécanique*
IEPR 1011 -Rose-	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

1 Un cylindre qui roule et percute un bloc...

Attention ! Il faut répondre exclusivement sur l'unique feuille de réponse fournie.
Ce questionnaire peut servir de brouillon, mais ne sera jamais lu par le correcteur !



Un cylindre plein de masse $m = 2$ kg de rayon $R = 10$ cm est lâché d'une hauteur $h = 2$ m.
Il roule sans glissement sur une rampe circulaire. A l'instant $t = 0$, il percute un bloc de masse $4m = 8$ kg

Le choc est brutal et inélastique.
Après le choc, le cylindre écrabouillé et déformé reste collé au bloc !

Derrière le bloc, se trouve un ressort qui est initialement dans sa configuration d'équilibre.
Sous l'effet du choc, le bloc va comprimer le ressort : cela va créer un mouvement harmonique.
Après le choc, tous les frottements entre le bloc (avec le cylindre :-) et le sol sont supposés négligeables.
La constante de raideur de ressort est $k = 100$ N/m. Dans les calculs, on utilisera $g = 10$ m/s^2.

1. Quel est le moment d'inertie I du cylindre ?

   Il faut utiliser l'expression du moment d'inertie d'un cylindre plein et écrire simplement.

$$\boxed{I = \frac{mR^2}{2} = 0.01 \text{ kg m}^2}$$

   Noter au passage que cette formule était fournie dans le formulaire annexé au questionnaire.
   En outre, noter que cette question a déjà été posée un nombre incalculable de fois...
   Il était donc vraiment impardonnable de ne pas obtenir cette valeur.
   Oui : il faut la valeur numérique exacte pour valider votre réponse.
   La conversion de 10 cm *en* 0.1 m *a souvent été oublié par beaucoup d'étudiants.*
   Non, non : 10 cm *n'est pas un centième de mètre mais un dixième de mètre !*
   Calculer $0.1^2 = 0.01$ *a aussi posé des difficultés à pas mal d'étudiants : si, si sérieusement !*

2. Quelle est l'énergie cinétique du cylindre juste avant de percuter le bloc ?

   L'énergie cinétique acquise par le cylindre correspond à l'énergie potentielle de gravité perdue lors de la descente du cylindre !

$$\underbrace{\frac{mv^2}{2}+\frac{I\omega^2}{2}}_{K} = mgh = 40 \text{ J}$$

   On peut déjà observer ici que l'énergie cinétique se compose d'une partie liée à la translation de la roue et une partie à la rotation de la roue : ce qui sera essentiel pour résoudre la question suivante !

3. Quelle est la vitesse du bloc (et du cylindre qui reste collé :-) juste après le choc ?

   Tout d'abord, il faut obtenir la vitesse v_* du cylindre avant le choc à partir de l'énergie cinétique qu'on vient d'obtenir. Comme la roue roule sans glisser, on peut écrire $v_* = \omega_* R$ et donc exprimer l'énergie cinétique juste avant le choc comme :

$$\begin{aligned} K &= \frac{mv_*^2}{2}+\frac{I\omega_*^2}{2} \\ &\downarrow \\ K &= \frac{mv_*^2}{2}+\frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\frac{v_*^2}{R^2} \\ K &= \frac{3mv_*^2}{4} \end{aligned}$$

   La vitesse du cylindre juste avant le choc est donc : $v_* = \sqrt{\frac{4gh}{3}} = \sqrt{\frac{80}{3}} = 5.16 \text{ m/s}$

   Ensuite, on utilise la conservation de la quantité de mouvement pour obtenir la vitesse v_{**} du bloc et du cylindre après le choc. Attention : comme le choc est inélastique, on n'a pas de conservation de l'énergie : beaucoup d'étudiants écrivent avec un aplomb déconcertant que l'énergie est conservée car le choc est inélastique : ouuuupsss !

$$\begin{aligned} 5mv_{**} &= mv_* \\ &\downarrow \\ v_{**} &= \frac{v_*}{5} \end{aligned}$$

   Et on déduit la valeur numérique demandée : $v_{**} = \sqrt{\frac{80}{75}} = 1.03 \text{ m/s}$

   Beaucoup d'étudiants oublient l'énergie cinétique de rotation !
   Toutefois, les correcteurs ont été honteusement indulgents à cet égard si c'était l'unique erreur !

4. Donner l'expression $x(t)$ de la position du centre de masse du bloc après le choc.

   Il suffit juste d'écrire le mouvement oscillant d'un bloc sur un sol horizontal !
   C'est un résultat qui a été vu explicitement au cours.
   Ici, il suffit d'écrire un mouvement harmonique !

$$\begin{aligned} x(t) &= A\sin(\omega t) \\ v(t) &= A\omega\cos(\omega t) \;=\; v_{**}\cos(\omega t) \end{aligned}$$

Le choix du sinus permet d'avoir immédiatement les conditions initiales : $x(0) = 0$ et $v(0) = v_{**}$.

Finalement, pour obtenir ω, il faut satisfaire l'équation du mouvement suivante :

$$\begin{aligned} 5m\; x''(t) &= -k\; x(t) \\ &\downarrow \quad \textit{En substituant } x(t) \textit{ par } A\sin(\omega t) \textit{ et } x''(t) \textit{ par } -A\omega^2\sin(\omega t) \\ -5m\; A\omega^2\sin(\omega t) &= -k\; A\sin(\omega t) \\ &\downarrow \\ \omega^2 &= \frac{k}{5m} \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{5m}} \;=\; \sqrt{10} \;=\; 3.16 \end{aligned}$$

L'expression demandée est : $\boxed{x(t) \;=\; \dfrac{v_{**}}{\omega}\sin(\omega t) \;=\; 0.33\;\sin(3.16\;t)}$

Peu d'étudiants écrivent une expression avec un cosinus ou sinus et la plupart s'acharnent à vouloir écrire un MRUA. Eh oui, pour une fois, l'examen n'était pas un problème avec une accélération constante et une question que l'enseignant pensait vraiment très simple a été perçue comme très difficile par beaucoup d'étudiants. C'est bien de faire tous les examens des annales, mais il faut aussi étudier ce qui a été présenté au cours, même si cela n'avait encore jamais été posé dens les années précédentes !

Concrètement, juste écrire un cosinus ou un sinus permettait de valider la question : si, si !
Il était aussi également possible de valider cette question, même sans avoir obtenu la vitesse v_{**} !

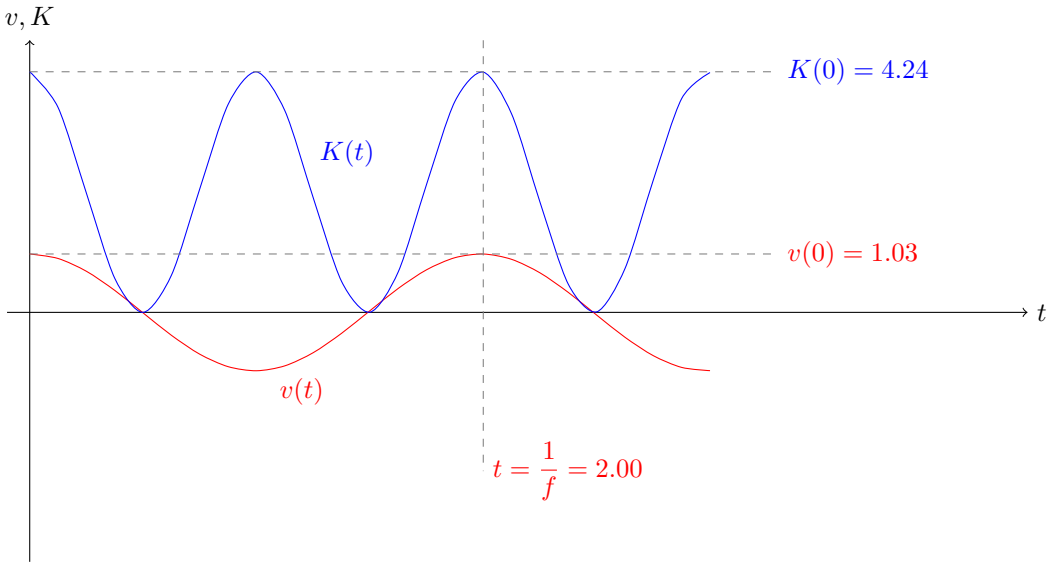
5. Calculer la fréquence d'oscillation du mouvement harmonique du bloc.

   Il faut juste se rappeler que $\omega = 2\pi f$ et donc la fréquence est donnée par :

$$\boxed{f \;=\; \frac{\omega}{2\pi} \;=\; \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{5m}} \;=\; \frac{\sqrt{10}}{2\pi} \;=\; 0.50\ \mathrm{s}^{-1}}$$

6. Dessiner la composante de vitesse $v_x(t)$ et l'énergie cinétique $K(t)$ du bloc en fonction de $t > 0$.
Les expressions de la composante horizontale de vitesse et de l'énergie cinétique sont :

$$\begin{aligned} v(t) &= v_{**}\sin(\omega t) &&= 1.03\ \sin(3.16\ t) \\ K(t) &= \frac{4m}{2}\left(v_{**}\sin(\omega t)\right)^2 &&= 4.24\ \left(\sin(3.16\ t)\right)^2 \end{aligned}$$



Il suffit donc d'esquisser les deux courbes !
Attention, une énergie est toujours positive !
Par contre, la composante de vitesse est bien un simple sinus à tracer : so easy :-)

A nouveau, un nombre incalculable d'étudiants recyclent les graphes d'autres examens choisis de manière plus ou moins aléatoire : ce n'est pas la meilleure manière de réussir un examen !

L'examen que l'enseignant pensait simple n'a pas été aussi bien réussi que prévu malgré une indulgence et une bienveillance réellement gigantesques du correcteur :-)
Certains professeurs particuliers ou coaches individuels estimaient même cela infaisable à la lecture de l'énoncé : là, je suis franchement en désaccord, c'est une question avec très peu d'algèbre qu'on pouvait résoudre quasiment immédiatement !

2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Ne pas répondre ou cocher une réponse erronée ne fait rien perdre.
Par contre, il faut répondre correctement à six questions pour réussir cette partie.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !
Gommer pour les corrections !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

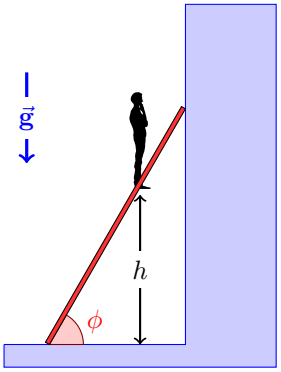
Q1

Un caillou est jeté vers le haut depuis une hauteur initiale $h = 8$ m, une vitesse initiale v_0 et un angle $\theta = 36.9^o$ par rapport à la verticale.
La norme de l'accélération de la gravité sera prise comme $g = 10$ m/s^2.
On néglige la résistance de l'air.
La trajectoire du caillou atteint son point le plus élevé après 2 secondes.
A quelle hauteur h_* au dessus de l'eau se trouve le caillou à cet instant ?

A	$h_* = 16.4$ m	**A** ☐
B	$h_* = 20.0$ m	**B** ☐
C	$h_* = 22.4$ m	**C** ☐
D	$h_* = 28.0$ m	**D** ■
E	$h_* = 40.0$ m	**E** ☐

Q2

Un ouvrier se trouve sur une échelle d'épaisseur négligeable de masse m et de longueur L appuyée sur un mur avec un angle $\phi = 60^o$.
Entre le mur et l'échelle, il n'y a aucun frottement.
Le coefficient de frottement statique entre le sol et l'échelle est μ_s.



Quelle est hauteur maximale h que peut atteindre un ouvrier de masse M avant que l'échelle ne commence à glisser ?

A $h = L\,\dfrac{\mu_s(m+M)6 - m}{12M}$ **A** ☐

B $h = L\,\dfrac{\mu_s(m+M)6 - m\sqrt{3}}{4M}$ **B** ■

C $h = L\,\dfrac{\mu_s(m+M)6 + m\sqrt{3}}{2M}$ **C** ☐

D $h = L\,\dfrac{\mu_s(m+M)6}{4M}$ **D** ☐

E $h = L\,\dfrac{\mu_s(m+M)\sqrt{3}}{2M}$ **E** ☐

Q3

Un objet initialement immobile explose en deux parties.
Un morceau a deux fois la masse de l'autre.
Le plus gros morceau a une énergie cinétique égale à K_* juste après l'explosion.
Quelle est l'énergie cinétique des deux morceaux K juste après l'explosion ?

A $K = \frac{3}{2}\,K_*$ **A** ☐

B $K = \frac{4}{2}\,K_*$ **B** ☐

C $K = \frac{5}{2}\,K_*$ **C** ☐

D $K = \frac{6}{2}\,K_*$ **D** ■

E $K = \frac{7}{2}\,K_*$ **E** ☐

Q4

Un homme est assis les bras croisés sur un tabouret tournant sans frottement. Que se passe-t-il lorsqu'il étend les bras ?

A	Il tourne moins vite et le moment cinétique reste constant.	**A** ■
B	Il tourne moins vite et le moment cinétique diminue.	**B** □
C	Il tourne moins vite et le moment cinétique augmente.	**C** □
D	Il tourne à la même vitesse et le moment cinétique augmente.	**D** □
E	Il tourne à la même vitesse et le moment cinétique diminue.	**E** □

Q5

Un phénomène se reproduit identiquement à lui-même toutes les 8 secondes. Quelle est sa fréquence f ?

A	$f = 0.125$ s^{-1}	**A** ■
B	$f = 0.125$ s	**B** □
C	$f = 8\pi$ Hertz	**C** □
D	$f = 8$ Hertz	**D** □
E	$f = 8$ s	**E** □

Q6

Quelles sont les unités d'une puissance ?

A	$kg\ m^2\ /\ s^4$	**A** □
B	$N\ m\ /\ s^2$	**B** □
C	$kg^2\ m^2\ /\ s^2$	**C** □
D	$J\ s$	**D** □
E	$J\ /\ s$	**E** ■

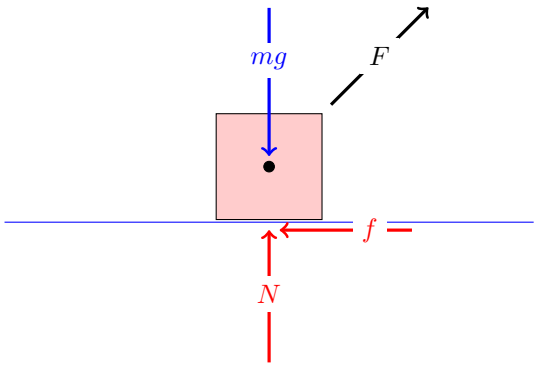
Q7

Deux boules de masses de 2 kg et 3 kg glissent sur un plan horizontal sans frottement avec des vitesses respectives de 4 m/s et 2 m/s. Après une collision inélastique, les boules restent collées et se déplacent à une vitesse de 2 m/s. Quel angle formaient les deux vitesses des boules avant la collision ?

A	Les deux boules se déplacaient dans la même direction.	**A** □
B	Les deux boules se déplaçaient dans des directions opposées.	**B** □
C	La situation décrite est impossible : il n'y a aucun angle possible !	**C** □
D	Il n'est pas possible de déterminer cet angle avec les données fournies.	**D** □
E	Les deux directions sont perpendiculaires.	**E** ■

Q8

Un ouvrier tente de déplacer un bloc de masse m en appliquant une force F, mais le bloc reste immobile. Le schéma ci-dessous représente correctement les directions de toutes les forces qui agissent sur le bloc, mais pas nécessairement les normes de ces forces.



Quelle est l'unique paire de relations correctes pour les normes des 4 forces ?

A	$F = f$ et $N = mg$	**A** ☐
B	$F = f$ et $N > mg$	**B** ☐
C	$F > f$ et $N < mg$	**C** ■
D	$F > f$ et $N = mg$	**D** ☐
E	$F > f$ et $N > mg$	**E** ☐

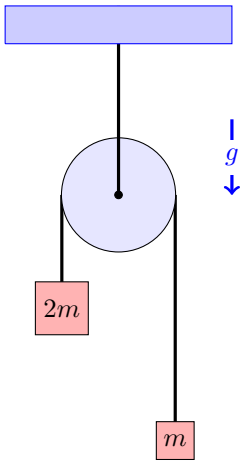
Q9

Usain Bolt est le détenteur du record du monde du 100 mètres avec 9 s 58. Supposons qu'il a entamé sa course avec une accélération constante pendant les deux premières secondes et a ensuite poursuivi avec une vitesse constante. Quelle est la valeur de cette accélération a ?

A	$a = \frac{2500}{329}$ m/s^2	**A** ☐
B	$a = \frac{2500}{379}$ m/s^2	**B** ☐
C	$a = \frac{2500}{429}$ m/s^2	**C** ■
D	$a = \frac{2500}{479}$ m/s^2	**D** ☐
E	$a = \frac{2500}{529}$ m/s^2	**E** ☐

Q10

Deux blocs de masses m et $2m$ sont suspendus de part et d'autre d'une poulie qui est un cylindre plein de rayon R et de masse M.



Quelle est la norme a de l'accélération des deux blocs ?

A	$a = \dfrac{mg}{(3m+M)}$	**A** ☐
B	$a = \dfrac{(m+M)g}{(3m+M)}$	**B** ☐
C	$a = \dfrac{3mg}{(3m+M)}$	**C** ☐
D	$a = \dfrac{Mg}{(6m+M)}$	**D** ☐
E	$a = \dfrac{2mg}{(6m+M)}$	**E** ■

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\ \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\ \frac{d}{dt}\left(I\ \omega\right) &= \sum M_i \end{aligned}$$

Formulaire

Lorsque les forces sont constantes,

$$\begin{aligned} \Delta\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t \\ \Delta\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Mouvement d'un projectile

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$\begin{aligned}\Delta\overbrace{\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2\right)}^{K} &= \sum\overbrace{\vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W}\\ &= \sum\underbrace{\vec{\mathbf{F}_{nc}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} - \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r}\Big)\end{aligned}$$

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_xF_y - r_yF_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_xF_y - r_yF_x = F\ r_\perp = F_\perp\ r = Fr\sin(\theta)$$

Ensemble de particules : un corps !

$$\begin{aligned} m &= \sum m_i \\ m\ \vec{\mathbf{x}}(t) &= \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t)\Big) \\ m\ \vec{\mathbf{v}}(t) &= \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t)\Big)\end{aligned}$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\ r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\ k^2 = \sum m_i\ r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\ h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution	I	$=$	$m\ R^2$
Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution	I	$=$	$m\ \frac{R^2}{2}$
Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central	I	$=$	$m\ \frac{L^2}{12}$