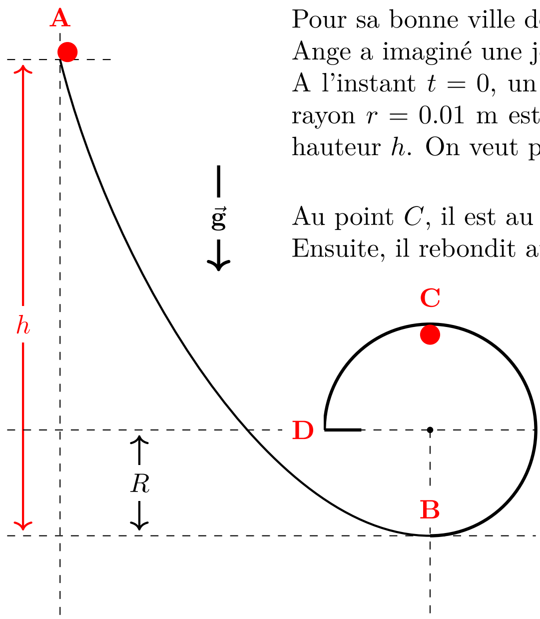
KINE11-EDPH11	
Janvier 2023	*Introduction à la mécanique*
IEPR 1011 -Rose-	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

1 Une nouvelle attraction pour le marché de Noël...



Pour sa bonne ville de Binches,
Ange a imaginé une jolie attraction pour le marché de Noël.
A l'instant $t = 0$, un petit cylindre creux de masse $m = 100$ kg et avec un rayon $r = 0.01$ m est lâché avec une vitesse nulle d'un point A situé à une hauteur h. On veut prédire l'évolution de sa vitesse $v(t)$.

Au point C, il est au sommet d'un looping de rayon $R = 10$ m.
Ensuite, il rebondit au point D et inverse sa trajectoire.

Le cylindre roule sans glissement sur la piste.
Sa trajectoire reste toujours dans le plan de la figure.

On utilisera $g = 10$ m/s^2
pour effectuer tous les calculs.

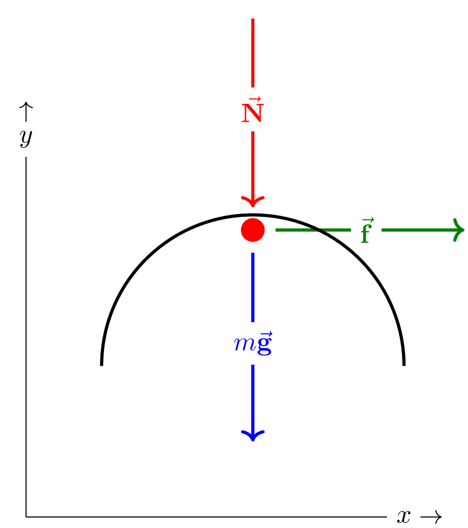
Le rayon r du cylindre sera supposé négligeable pour calculer la position du cylindre,
mais on en tiendra compte de l'énergie cinétique de rotation.

1. Citer et dessiner l'ensemble de toutes les forces sur le cylindre lorsqu'il se trouve au point C.

   Il faut citer la gravité, la force normale de réaction du sol sur le cylindre et le frottement !
   Eh oui, comme le cylindre roule, il y a une force de frottement qui ralentit la translation et fait tourner le cylindre... Il est évidemment essentiel de dessiner les forces correctement. Il n'y a pas de colle entre le sol et le cylindre : le sol ne peut donc pas exercer une force qui retient le cylindre !
   Dessiner une force de réaction qui s'oppose à la gravité est une erreur impardonnable et fait perdre la totalité des points pour cette question qui n'est pas aussi simple qu'habituellement:-)

Il faut donc uniquement dessiner et citer :

- *Force de gravité :* $m\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$
- *Force de réaction normale du sol :* $\vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -N \end{bmatrix}$
- *Force de frottement :* $\vec{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$



2. Obtenir l'expression de l'énergie cinétique totale[1] du cylindre en fonction de m et de $v(t)$.

L'énergie cinétique totale est définie par l'expression :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Iw^2$$

Comme le cylindre roule sans glissement : $r\omega = v$

Comme le cylindre est creux : $I = mr^2$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Il fallait donc juste omettre le facteur deux et écrire : $\boxed{K(t) = m\Big[v(t)\Big]^2}$

L'énergie cinétique du cylindre qui roule se compose donc à part égale de l'énergie cinétique de translation et de rotation : il y aura donc la moitié de l'énergie potentielle consacrée à la translation du cylindre et l'autre moitié sera utilisée pour le faire tourner !

3. Calculer la hauteur h qui a été choisie comme la valeur minimale requise pour éviter le chute du cylindre au point C.

Cela sera le cas si l'accélération centripète est exactement l'accélération de la gravité ! Et dans ce cas, la force normale est nulle en ce point !

$$m\frac{v^2}{R} = mg$$

$$v^2 = Rg$$

En vertu de la conservation de l'énergie, on peut écrire : $mv^2 + mg2R = mgh$

$$g(h - 2R) = Rg$$

On déduit donc : $\boxed{h = 3R = 30 \text{ m}}$

C'est quasiment un exemple fait au cours à part que nous avons maintenant un cylindre qui roule, à la place d'un petit chariot qui glissait !

4. Quelle sera alors[2] la vitesse du cylindre aux points B et C ?

A nouveau, on applique simplement la conservation de l'énergie ! On procède de manière identique entre A et B et puis entre A et C !

$$m\ v_B^2 = mgh \qquad\qquad mv_C^2 + mg2R = mgh$$

Comme $h = 3R$

$$v_B^2 = 3gR \qquad\qquad v_C^2 = gR$$

[1] Attention, il faut tenir compte de l'énergie cinétique de translation et de l'énergie cinétique de rotation du cylindre !

[2] Attention, on considère maintenant la valeur de h obtenue à la sous-question 3 !

Et la conclusion est immédiate : $\boxed{\begin{array}{lllll} v_B & = & \sqrt{3gR} & = & 17.3 \text{ m/s} \\ v_C & = & \sqrt{gR} & = & 10 \text{ m/s} \end{array}}$

5. Quelle sera alors[2] la force normale exercée par la piste sur le cylindre au point B ?

   Il suffit d'écrire que le produit de la masse et l'accélération centripète vaut la différence des deux forces verticales s'appliquant sur le cylindre, en appliquant la loi de Newton :

$$N - mg = m\frac{v^2}{R}$$

On utilise le résultat de la sous-question précédente : $mv^2 = mgh = mg3R$

$$\begin{aligned} N - mg &= 3mg \\ N &= 4mg \end{aligned}$$

On déduit donc : $\boxed{N = 4mg = 4000 \text{ Newton}}$

On observe au passage que le poids apparent ressenti correspond à $4g$ *!*

6. Comment doit se produire la collision en D pour que le cylindre revienne à sa position initiale A ?

   Il faut conserver l'énergie lors de la collision pour le cylindre puisse revenir au point de départ.

   Donc, il suffit simplement d'écrire : $\boxed{\textit{La collision doit être parfaitement élastique :-)}}$

7. Esquisser l'évolution de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique en fonction du temps lorsque le cylindre se déplace entre A et D. L'énergie potentielle sera nulle en B.
   Indiquer clairement les temps t_A, t_B, t_C et t_D sur vos dessins.

   La force de frottement présente lors d'un roulement sans glissement ne fournit aucun travail car la vitesse du point de contact est toujours nulle. En conséquence, nous avons une conservation parfaite de l'énergie mécanique qu'il est aisé d'obtenir

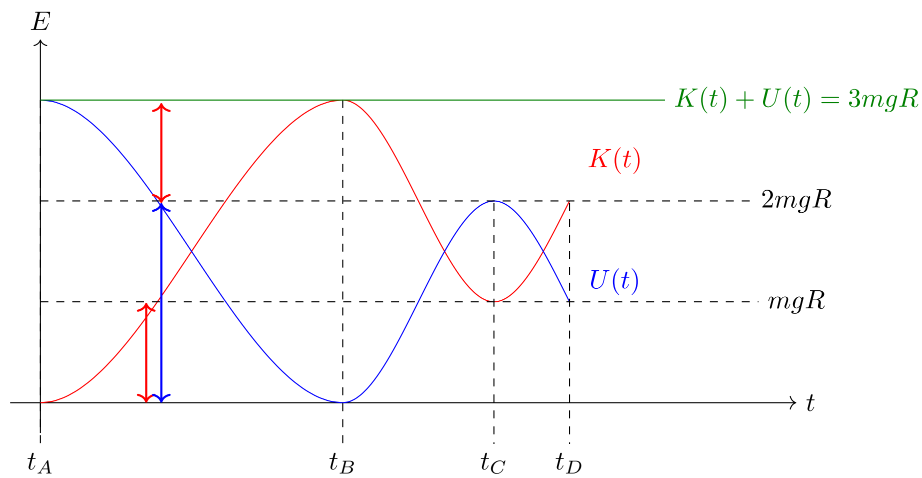
$$K(t) + U(t) = 3mgR$$

   puisque que l'énergie cinétique est nulle en A *avec une énergie potentielle égale à* $3mgR$.
   Pour dessiner, les courbes de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle en fonction du temps, il faut tirer profit des valeurs pour les quatre instants à considérer !

	$U(T)$	$K(t)$
t_A	$3mgR$	0
t_B	0	$3mgR$
t_C	$2mgR$	mgR
t_D	mgR	$2mgR$

Comme l'accélération tangentielle en A, B et C, la dérivée de l'énergie cinétique doit également s'annuler : cela peut aussi se déduire avec un peu d'intuition physique :-) Par contre, ce n'est pas le cas en D. Sur base de ces informations, il est alors possible d'esquisser le dessin qui suit.
L'énergie potentielle est donc transformée en énergie cinétique et vice-versa en fonction du temps.
Tracer des droites est une mauvaise idée !
Non, les courbes ne sont ni des droites, ni des paraboles, ni même des polynômes.
Elles dépendent de la forme de la rampe de départ qui n'est pas donnée.
Par contre, ce sont des courbes harmonieuses, sans points anguleux et sans discontinuités.
C'est donc bien une esquisse qu'il faut fournir !

Et non, il ne fallait pas faire le dessin de septembre 2019 !



Bien observer que la courbe rouge de l'énergie cinétique peut être vue comme la distance entre la ligne de l'énergie mécanique et la courbe bleue de l'énergie potentielle et inversément. L'écart entre les abscisses temporelles ne peut pas être déterminé : on peut seulement déduire que $t_D - t_C = (t_C - t_B)/2$ dans le looping, tel qu'indiqué sur le dessin.

A nouveau, ces deux courbes peuvent être facilement tracées avec un peu d'intuition physique et de bon sens sans effectuer aucun calcul ! Et pourtant, cela reste souvent une tâche insurmontable pour beaucoup d'étudiants.

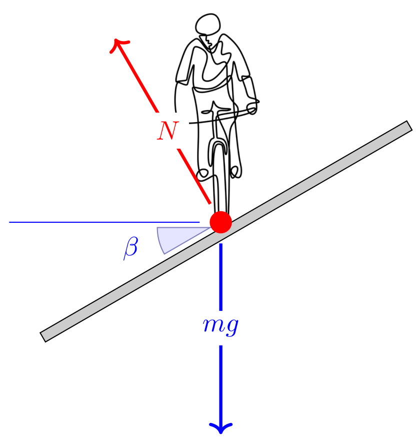
Attention ! Il faut répondre exclusivement sur l'unique feuille de réponse fournie.
Ce questionnaire peut servir de brouillon, mais ne sera jamais lu par le correcteur !
Répondez à chaque sous-question et uniquement à ce qui est demandé.
Faites des dessins distincts pour chaque sous-question.
Soyez précis dans les graphes.
Chaque sous-question peut être résolue de manière symbolique, si les résultats précédents font défaut !
Détaillez vos calculs afin de clairement montrer votre démarche.
Pensez à encadrer les résultats principaux pour les mettre en évidence.

2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Ne pas répondre ou cocher une réponse erronée ne fait rien perdre.
Par contre, il faut répondre correctement à six questions pour réussir cette partie.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !
Gommer pour les corrections !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

Q1

Une cycliste prend un virage à une vitesse de norme constante v.
Dans la courbe, la route est inclinée avec un angle β et le virage a un rayon R.
La cycliste et le vélo ont une masse globale m.



Quelle doit être la valeur du rayon de courbure R
pour qu'il n'y ait aucune force de frottement latérale dans le virage ?

A $R = \dfrac{v^2 \sin(\beta)}{g}$ — **A** ☐

B $R = \dfrac{v^2 \sin(\beta)}{g \cos(\beta)}$ — **B** ☐

C $R = \dfrac{v^2 \cos(\beta)}{g \sin(\beta)}$ — **C** ■

D $R = \dfrac{v^2}{g \sin(\beta)}$ — **D** ☐

E $R = \dfrac{v2 \cos(\beta)}{g \sin(\beta)} - \dfrac{v^2 \sin(\beta)}{g \cos(\beta)}$ — **E** ☐

Q2

A la vue d'un policier, un automobiliste a bondi violemment sur ses freins et s'est immobilisé avec une accélération constante.
Les traces sur la route montrent que les roues se sont bloquées et que la voiture a parcouru une distance de 23.3 mètres avant de s'immobiliser.
Le coefficient de frottement entre la route et les pneus est connu : $\mu_c = 0.75$.
La voiture et le chauffeur ont une masse totale $m = 2510$ kg.

Le policier n'a pas hésité à lui infliger une amende salée pour un excès de vitesse dans une zone avec une limitation de 50 km/h.
L'automobiliste crie son innoncence !
Quelle est l'affirmation la plus probable ?

A L'automobiliste est clairement victime d'une erreur du policier. Il a raison de protester ! — **A** ☐

B La vitesse initiale de la voiture était largement au delà de 100 km/h. C'est un vrai chauffard ! — **B** ☐

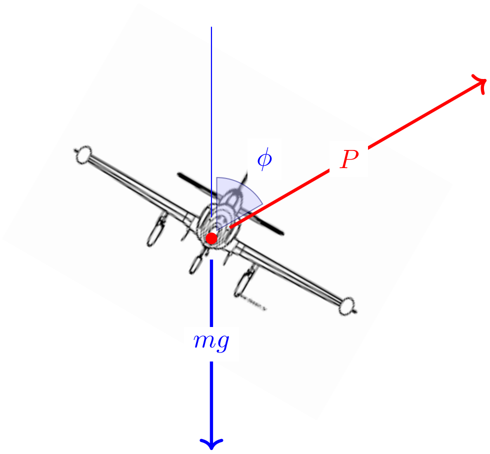
C La vitesse initiale de la voiture se situait entre 50 et 55 km/h. Le policier n'a vraiment eu aucune souplesse à l'égard de l'automobiliste. — **C** ☐

D Si la vitesse initiale de la voiture était de 50 km/h, elle serait immobilisée en environ 13 mètres. — **D** ■

E Si la vitesse initiale de la voiture était de 50 km/h, elle serait immobilisée en environ 17 mètres. — **E** ☐

Q3

Un avion de masse m effectue un virage avec une vitesse horizontale v de norme constante : la trajectoire de l'avion est sur un cercle horizontal de rayon R.
En pratique, le pilote incline l'avion d'un angle ϕ. La force de portance P exercée par l'air sur l'avion n'est dès lors plus verticale et en équilibre avec la force de gravité et cela engendre le mouvement de rotation.



Quel est le rayon R du virage que va effectuer l'avion ?

A $R = \dfrac{v^2 \cos\phi}{g \sin\phi}$ **A** ■

B $R = \dfrac{v^2}{g \sin\phi}$ **B** □

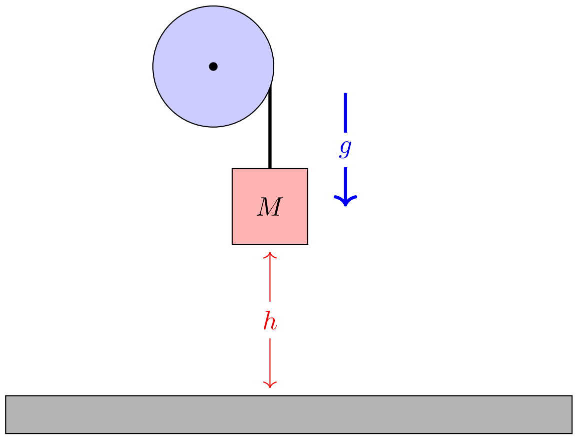
C $R = \dfrac{v^2}{g \sin^2\phi}$ **C** □

D $R = \dfrac{v^2 \sin\phi}{g \cos\phi}$ **D** □

E $R = \dfrac{v \cos\phi}{g^2 \sin^2\phi}$ **E** □

Q4

Un bloc de masse M est suspendu à une poulie pleine de masse m et de rayon R. A l'instant $t = 0$, le bloc a une vitesse nulle et est lâché à une hauteur h du sol.



Quelle est l'amplitude de la vitesse v de la masse lorsqu'elle touche le sol ?

A $v = \sqrt{\frac{4Mgh}{2M + m}}$ — **A** ■

B $v = \sqrt{\frac{2Mgh}{2M + m}}$ — **B** □

C $v = \sqrt{\frac{2mghR}{2MR^2 + mR^2}}$ — **C** □

D $v = \sqrt{\frac{4Mgh^2}{2MR + mR}}$ — **D** □

E $v = \sqrt{\frac{4Mgh}{2M - m}}$ — **E** □

Q5

Vous attachez un seau rempli d'eau a une corde et vous faites tourner le seau sur une trajectoire verticale circulaire avec une vitesse angulaire constante. Le rayon du cercle est R et la masse totale de l'eau et du seau est m.

Quelle doit être la vitesse minimale v du seau
pour éviter que l'eau se répande sur le sol ?

A $v = \sqrt{\frac{mg}{R^2}}$ — **A** □

B $v = \sqrt{\frac{g}{R}}$ — **B** □

C $v = \sqrt{\frac{gR}{2}}$ — **C** □

D $v = \sqrt{gR}$ — **D** ■

E $v = \sqrt{2gR}$ — **E** □

Q6

Le moment cinétique d'un corps rigide tournant autour d'un axe fixe est donné par le produit entre son moment d'inertie I et sa vitesse angulaire ω :

$$L = I\omega$$

Quelles sont les unités de ce moment cinétique ?

A kg m / s^2
B kg m^2 / s^2
C kg m^2 / s^3
D N m / s
E N m s

A ☐
B ☐
C ☐
D ☐
E ■

Q7

Une carabine a toujours un mouvement de recul lorsqu'on tire une balle de masse $m = 0.05$ kg qui est propulsée avec une vitesse $v = 300$ m/s.
Plus précisément, on observe une vitesse de recul v_*
de la carabine de masse $m_* = 3$ kg opposée à la vitesse de la balle.

Que sera le rapport entre l'énergie cinétique K de la balle
et l'énergie cinétique K_* de la carabine juste après le tir ?

A $\dfrac{K_*}{K} = \left(\dfrac{m}{m_*}\right)^2$

B $\dfrac{K_*}{K} = \dfrac{m}{m_*}$

C $\dfrac{K_*}{K} = \dfrac{v}{v_*}$

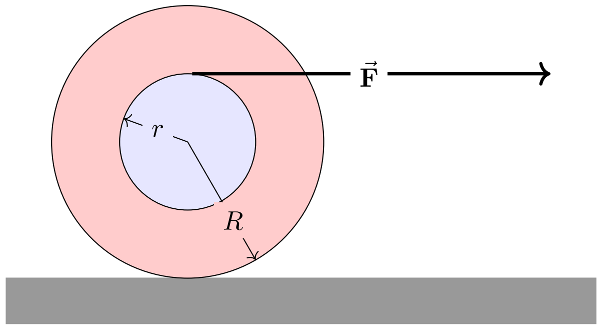
D $\dfrac{K_*}{K} = \dfrac{m_*}{m}$

E $\dfrac{K_*}{K} = \left(\dfrac{m_*}{m}\right)^2$

A ☐
B ■
C ☐
D ☐
E ☐

Q8

Une bobine de masse M et de rayon R a un moment d'inertie I. On tire sur un fil avec une force F le long d'un axe de rayon r et la bobine se met à rouler sans glissement sur sol.



La norme de l'accélération du centre de masse est donnée par :

A $a = \frac{F}{M}$

B $a = F\frac{(rR + R^2)}{(I + MR^2)}$

C $a = \frac{Fr}{3MR}$

D $a = F\frac{R^2}{(I + MrR)}$

E $a = F\frac{(I + MR^2)}{(rR + R^2)}$

A ☐ B ■ C ☐ D ☐ E ☐

Q9

On considère les oscillations d'une bille attachée à un ressort ou à un pendule. k est la constante de raideur d'un ressort, L la longueur d'un pendule, m la masse de la bille, T la période et ω la fréquence angulaire.
Quelle expression n'est pas correcte ?

A $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

B $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

C $T = \frac{2\pi}{\omega}$

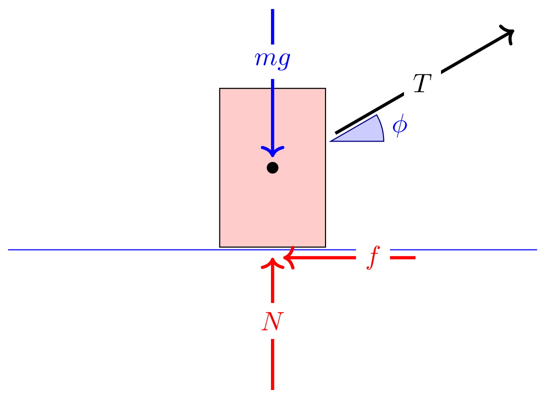
D $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

E $\omega = \sqrt{\frac{m}{k}}$

A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E ■

Q10

On déplace une caisse de masse m en tirant avec une force T et un angle ϕ.
Le déplacement se fait avec une vitesse constante.
Le coefficient de frottement cinétique entre la caisse et le sol est μ_c.



Quelle est l'expression de la force T ?

A $T = \dfrac{\mu_c mg \sin\phi}{\cos\phi}$ — **A** ☐

B $T = \dfrac{\mu_c mg \cos\phi}{\sin\phi}$ — **B** ☐

C $T = \dfrac{\mu_c mg \sin\phi}{\cos\phi + \mu_c \sin\phi}$ — **C** ☐

D $T = \dfrac{\mu_c mg}{\sin\phi + \mu_c \cos\phi}$ — **D** ☐

E $T = \dfrac{\mu_c mg}{\cos\phi + \mu_c \sin\phi}$ — **E** ■

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\ \frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\ \frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) &= \sum M_i\end{aligned}$$

Formulaire

Lorsque les forces sont constantes,

$$\begin{aligned}\Delta\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t \\ \Delta\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

Mouvement d'un projectile

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$\Delta\overbrace{\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2\right)}^{K} = \sum\overbrace{\vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W}$$

$$= \underbrace{\sum\vec{\mathbf{F}_{nc}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} - \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r}\Big)$$

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_xF_y - r_yF_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_xF_y - r_yF_x = F\ r_\perp = F_\perp\ r = Fr\sin(\theta)$$

Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$

$$m\ \vec{\mathbf{x}}(t) = \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t)\Big)$$

$$m\ \vec{\mathbf{v}}(t) = \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t)\Big)$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\ r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\ k^2 = \sum m_i\ r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\ h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ \dfrac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m\ \dfrac{L^2}{12}$