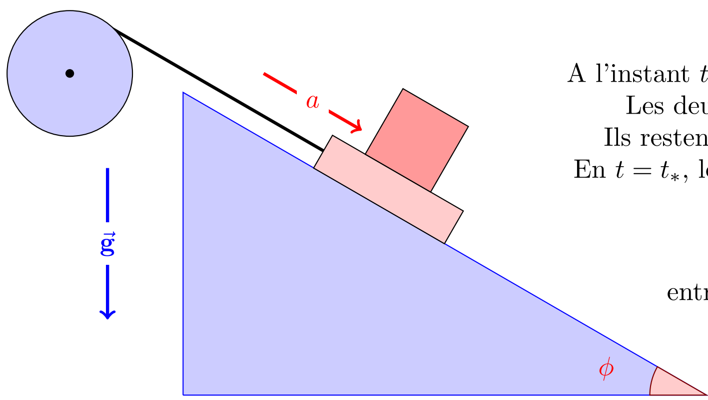
KINE11-EDPH11	
Janvier 2024	*Introduction à la mécanique*
IEPR 1011 -Bleu-	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

1 Deux blocs superposés...

Deux blocs sont retenus par une corde à un cylindre plein de rayon $R = 0.25$ m et de masse $M = 8$ kg.
Les blocs de même masse $m = 2$ kg sont superposés et se trouvent sur une pente avec un angle $\phi = 30^o$.
La corde de la poulie est uniquement attachée au bloc inférieur.
Le second bloc de forme cubique est simplement posé sur le premier bloc.
Le bloc triangulaire de la pente est immobile.



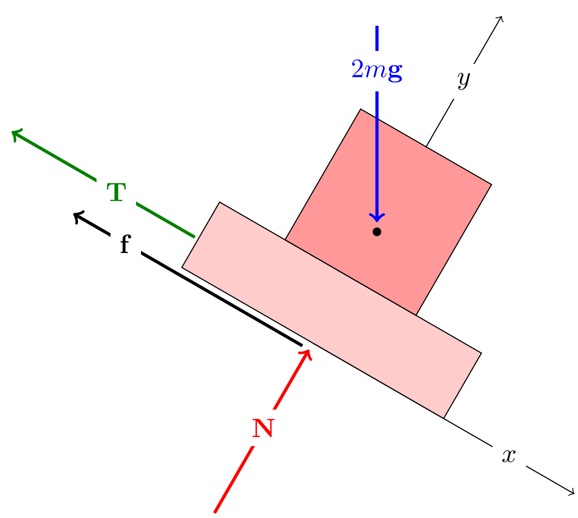
A l'instant $t = 0$, les deux blocs se mettent en mouvement.
Les deux blocs ont exactement la même accélération !
Ils restent solidaires en raison du frottement entre eux !
En $t = t_*$, les blocs ont parcouru une distance $d = 0.25$ m.

Dans les calculs, on utilisera $g = 10$ m/s^2.
Le coefficient de frottement cinétique
entre le bloc inférieur et la pente est $\mu_c = 0.2/\sqrt{3}$.

Dans une première étape, nous considérons les deux blocs comme un unique corps de masse $2m = 4$ kg.

1. Citer et dessiner toutes les forces extérieures sur l'ensemble de deux blocs pour $t > 0$.
   Ne pas indiquer les forces entre les deux blocs !

   Il faut juste considérer la gravité, la force de traction de la corde, la force normale de réaction du sol sur les blocs et le frottement. Il est admis de considérer une seule force de réaction globalisant la composante normale et le frottement et d'effectuer la suite de l'exercice en utilisant les deux composantes de la réaction globale du sol sur le bloc.
   Toutes les forces sont constantes car il s'agit d'un simple MRUA : si, si !



Il faut donc citer :

- *Force de gravité :* $m\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 2mg\sin(\phi) \\ -2mg\cos(\phi) \end{bmatrix}$
- *Force de réaction normale du sol :* $\vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2mg\cos(\phi) \end{bmatrix}$
- *Force de frottement :* $\vec{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} -f \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_c 2mg\cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix}$
- *Force de traction de la corde :* $\vec{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} -T \\ 0 \end{bmatrix}$

La force de gravité doit être dessinée verticalement !
La force normale doit être dessinée perpendiculairement à la pente !
Le frottement doit s'opposer au mouvement !

Il ne faut pas citer d'autres forces totalement bizarroïdes !
Certains étudiants éliminent froidement la force de la corde pour tout simplifier après : no, no !

2. Calculer le moment d'inertie de la poulie.

   Il faut utiliser l'expression du moment d'inertie d'un cylindre plein et on conclut donc.

$$\boxed{I = \frac{MR^2}{2} = \tfrac{8}{2} \times \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = \tfrac{1}{4}\ \text{kg m}^2}$$

   Noter au passage que cette formule était directement fournie dans le formulaire annexé au questionnaire. En outre, noter que cette question a déjà été posée un nombre incalculable de fois et que la solution vous était fournie... Il était donc vraiment impardonnable de ne pas obtenir cette valeur. Il faut la valeur numérique exacte pour valider votre réponse.

   Et il y a encore pas mal d'étudiants qui n'arrivent toujours pas à me donner la valeur exacte !
   Utiliser la masse m des blocs au lieu de la masse M de la poulie est impardonnable !
   Si oublier les unités peut être acceptable avec le stress de l'examen (quoique !)
   Me donner des unités erronées est un crime impardonnable !

3. Obtenir l'accélération a des deux blocs pour $t > 0$.

   Tout d'abord, on écrit l'équation du mouvement pour les deux blocs qui descendent sous l'effet de la gravité et qui sont retenus par la corde et le frottement. Ensuite, on écrit l'équation de la rotation de la poulie entrainée par T

$$\begin{aligned} I\alpha &= RT \\ \frac{MR^2}{2}\,\frac{a}{R} &= RT \\ &\downarrow \\ \frac{M}{2}\,a &= T \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2m\ a &= 2mg\sin(\phi) - 2\mu_c mg\cos(\phi) - T \\ &\downarrow \\ 2m\ a + T &= 2mg\sin(\phi) - 2\mu_c mg\cos(\phi) \end{aligned}$$

   En éliminant la force T, on peut obtenir l'expression de l'accélération. Pour déplacer les deux blocs et faire tourner la poulie, la force motrice est la force de gravité, tandis qu'une force s'oppose au mouvement : le frottement.

$$\begin{aligned} \left(2m + \frac{M}{2}\right) a &= 2mg\sin(\phi) - 2\mu_c mg\cos(\phi) \\ \Big(4m + M\Big)a &= 4mg\Big(\sin(\phi) - \mu_c\cos(\phi)\Big) \\ &\downarrow \\ a &= \frac{4mg}{4m+M}\Big(\sin(\phi) - \mu_c\cos(\phi)\Big) \\ a &= \frac{80}{16}\left(\frac{1}{2} - \frac{0.2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{2} \times \frac{8}{10} = \frac{40}{20} \end{aligned}$$

   Et on déduit la valeur numérique demandée : $\boxed{a = 2\ \text{m/s}^2}$

   Observer qu'aucune calculatrice n'était nécessaire pour obtenir cette valeur !

4. Calculer la vitesse v_* des deux blocs à l'instant t_* ?

   On obtient facilement t_* en sachant $d = a\dfrac{t_*^2}{2}$ et on écrit ensuite :

$$\begin{aligned} v(t_*) &= a\ t_* \\ v(t_*) &= a\sqrt{\frac{2d}{a}} \\ &\Big\downarrow \\ v(t_*) &= \sqrt{2da} \end{aligned}$$

Et on déduit la valeur numérique demandée : $\boxed{v_* \;=\; \sqrt{2da} \;=\; \sqrt{2 \times \frac{1}{4} \times 2} \;=\; 1\text{m/s}}$

Il est fortement conseillé de donner l'expression symbolique à ce type de question, plutôt qu'une valeur numérique, car la très grande majorité des étudiants n'obtiennent pas la bonne valeur numérique parfois même lorsqu'ils ont pourtant la bonne expression symbolique de l'accélération (ou avec une toute petite erreur d'inattention que le correcteur leur a pardonné. Cette question était vraiment élémentaire et une simple application d'un MRUA !

Il existait une autre manière de trouver la vitesse v_* en faisant une bilan d'énergie de la poulie et des deux blocs, ce qui permettait d'obtenir le résultat final sans avoir besoin de connaître l'accélération....

$$\begin{aligned} \frac{2mv_*^2}{2} + \frac{I\omega_*^2}{2} &= 2mgd\sin(\phi) - 2\mu_c mgd\cos(\phi) \\ \left(m + \frac{M}{4}\right)\ v_*^2 &= 2mgd\Big(\sin(\phi) - \mu_c\cos(\phi)\Big) \\ &\Big\downarrow \\ 4v_*^2 &= 10\left(\frac{1}{2} - \frac{0.2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \;=\; 10 \times \frac{8}{20} \;=\; 4 \\ v_*^2 &= 1 \end{aligned}$$

Et, on obtient évidemment la même valeur $v_* = 1$ m/s !
Et en plus, on peut utiliser la relation $v_* = \sqrt{2da}$ pour en déduire immédiatement que $a = 2$ m/s^2....
Notons que l'approche énergétique est souvent plus simple et plus rapide que l'approche classique :-)
Notons aussi que faire les deux approches permettait d'être vraiment certaint de son résultat !

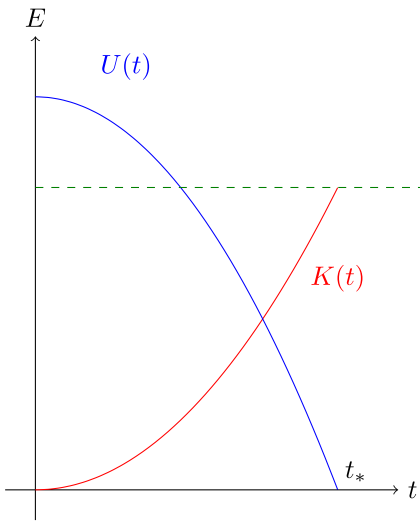
Pas mal d'étudiants ont eu cette idée, mais beaucoup ont manqué de rigueur !
Il faut tenir compte de l'énergie cinétique de rotation de la poulie : si, si !
Il faut tenir compte du travail de la force de frottement trop souvent oublié : hélas, hélas :-(
Mais, le correcteur a quand-même un peu apprécié ces tentatives un peu maladroites...

5. Dessiner l'énergie cinétique et potentielle du système composé des deux blocs et de la poulie en fonction du temps $t \in [0, t_*]$.
   Par convention, l'énergie potentielle finale du système sera considérée comme nulle.

   L'évolution temporelle de l'énergie cinétique est donnée par une parabole :

$$K(t) \quad = \quad \frac{1}{2} \left(2m + \frac{M}{2} \right) a^2 t^2 \; = \; 16 \; t^2$$

   L'énergie mécanique n'est pas conservée, la parabole de l'énergie potentielle doit donc démarrer à une valeur supérieure à $K(t_*)$ si elle est nulle en $t = t_*$. En effet, une partie de cette énergie potentielle sera dissipée par le travail de la force de frottement.



   Ce graphe était vraiment assez simple à obtenir et il est donc assez impardonnable de ne pas obtenir l'allure correcte des deux paraboles.

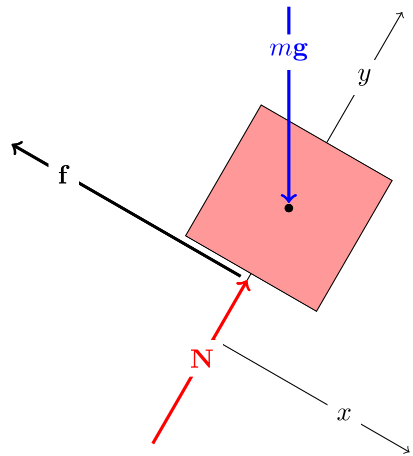
   Ce graphe n'est pas bien compliqué à obtenir avec un tout petit peu de bon sens physique !
   C'est même parfois l'unique contribution correcte de certains étudiants !
   Tracer deux droites est impardonnable !
   Confondre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique est impardonnable !
   Avoir une courbure erronée d'un ou des deux courbes fait perdre une partie des points...
   Ne pas observer qu'une partie de l'énergie potentielle est perdue par la frottement, fait aussi perdre une partie des points !

Et dans une seconde étape, analysons la situation du petit cube supérieur séparément !

6. Citer et dessiner les forces appliquées sur le bloc supérieur.

   Il faut juste considérer la gravité, la force normale de réaction et le frottement entre les blocs. Pour la simplicité, on utilise les mêmes symboles pour les fr

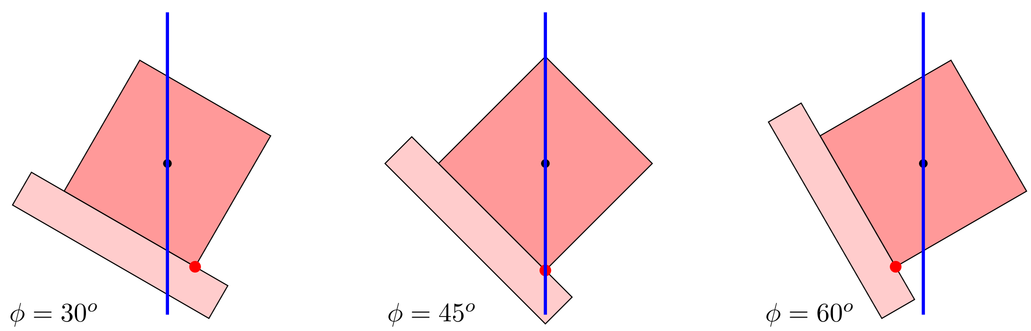
Il faut donc citer :



- *Force de gravité :* $m\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} mg\sin(\phi) \\ -mg\cos(\phi) \end{bmatrix}$
- *Force de réaction normale :* $\vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0 \\ mg\cos(\phi) \end{bmatrix}$
- *Force de frottement :* $\vec{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} -f \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu mg\cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix}$

7. A partir quelle valeur ϕ_* de la pente du sol, observerait-on un basculement du bloc supérieur ?

   Pour que le bloc ne bascule pas, il faut exiger que la droite verticale passant par le centre de masse du bloc passe par la base de celui-ci !



On obtient immédiatement : $\boxed{\phi_* \quad = \quad 45^o}$

Dans le premier cas ($\phi = 30^o$), le moment de la force de gravité par rapport au coin inférieur droit aura tendance à plaquer le bloc supérieur sur le bloc inférieur.

Par contre dans le troisième cas ($\phi = 60^o$), le moment de la force de gravité par rapport au coin inférieur droit aura tendance à faire pivoter le bloc supérieur autour de son coin inférieur droit.

Relativement peu d'étudiants obtiennent cette valeur !
Et pourtant, la plupart des gens savent qu'il suffit de tracer la droite entre le centre de gravité d'un objet et le sol pour savoir si il va basculer !
A nouveau, avoir une petite équerre était bien utile en cas de doute...

8. Quel doit être le coefficient de frottement statique minimal μ_s entre les deux blocs pour que les blocs restent toujours solidaires pendant la descente ?

   On déduit le coefficient de frottement μ en écrivant l'équation du mouvement pour ce bloc : l'accélération est créée par la gravité tandis que le frottement avec le bloc inférieur le retient !

$$\begin{aligned}
ma &= mg\ \sin(\phi) - \mu mg\ \cos(\phi) \\
a &= g\sin(\phi) - \mu g\cos(\phi) \\
\mu &= \frac{g\sin(\phi) - a}{g\cos(\phi)} = \frac{5-2}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{5}
\end{aligned}$$

Et on déduit la valeur numérique demandée : $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{5} \;=\; 0.3464 \;<\; \mu_s}$

Il est intéressant de noter que cette valeur est bien inférieure à la valeur maximale requise pour que le deux blocs ne glissent pas. Ce dernier résultat évident est obtenu par la tangente de l'angle ϕ. Il est donc bien possible d'avoir les deux blocs qui glissent sur la pente et le bloc supérieur qui reste solidaire avec le bloc inférieur avec les mêmes coefficients de frottement : pas intuitif mais vrai ! Faites l'expérience avec une pile de livres !

Evidemment, cette valeur est bien supérieure à la valeur de μ_c.

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}} \;=\; 0.5774 \;<\; \mu \;<\; 0.1155 \;=\; \frac{0.2}{\sqrt{3}}}$$

Quelques étudiants obiennnent la solution : ce qui a ravi le correcteur !
Beaucoup d'étudiants retirent le terme d'accélération et ...
... obtiennent la valeur classique (erronée ici) !
D'autres sont certains que cela doit être cette valeur et juste la citent : eh non !
Certains pensent que ca doit être juste égal à μ_c : eh bien non !

Quelques remarques générales du correcteur

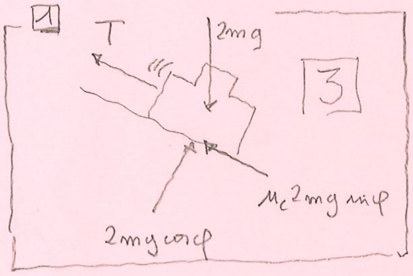
- *Commencer à lire toute la question et essayer de visualiser, d'imaginer le problème : vous devez voir les deux petits blocs descendre !*
- *Vous pouvez écrire au crayon, mais apporter alors un taille-crayon et veillez que votre crayon soit bien taillé !*
- *Pensez à encadrer les expressions symboliques utilisées pour obtenir vos résultats. La toute grande majorité des étudiants se trompent en effectuant les calculs, même lorsqu'ils ont obtenu la bonne expression (ou quasiment celle-ci avec l'un ou l'autre toute petite erreur, comme avoir oubliés de mette 2m pour l'équations du mouvement des deux blocs....)*
- *Ne pas donner juste une valeur numérique sans explication : si votre raisonnement était correct, le correcteur ne peut pas le voir :-)*
- *Il ne faut mettre les valeurs numériques qu'à la fin de votre raisonnement !*
  Tout pouvait se résoudre sans utiliser une calculatrice au passage !
- *Soyez soigneux dans vos dessins : entrainez vous à rédiger proprement la réponse d'un examen précédent sur un simple recto :-)*
- *Il est inutile de baratiner le correcteur.... c'est inutile !*
- *Utiliser l'énoncé comme brouillon avant d'écrire sur la feuille de réponse...*
- *Et soyez cools et calmes pendant votre examen : c'est jouable :-)*
- *Il ne faut pas donner autant de détails que cette solution : la totalité de la réponse peut être mise sur un simple recto. En particulier, un dessin soigné pour les forces et le graphe avec les notations habituelles permet d'obtenir tous les points.*
- *Pour vous aider, je vous inclus aussi la copie de l'enseignant qui permettait d'obtenir le maximum de points (avec une pondération approximative des sous-questions)*

Prière de remplir, en caractères d'IMPRIMERIE, votre nom, votre prénom et votre année d'étude.

IEPR1011 -Rose- Janvier 2024 Introduction à la mécanique	Nom : Prénom : Noma : Année d'étude :	Numéro magique

L'ensemble de la réponse à la question 1 doit être écrite uniquement sur ce seul feuillet (recto et verso).

1



3

2 $\boxed{I = \frac{MR^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 8 = \frac{1}{4}\ kg\,m^2}$

1

3 $\frac{MR^2}{2}\frac{a}{R} = TR \qquad T = \frac{M}{2}a$

$2ma = 2mg\sin\varphi - 2\mu_c mg\cos\varphi - T$

$(4m+M)a = 4mg(\sin\varphi - \mu_c\cos\varphi)$

$a = \underbrace{\frac{4m}{(4m+M)}}_{\frac{5}{2}} g \underbrace{(\sin\varphi - \mu_c\cos\varphi)}_{\frac{1}{2} - \frac{0{,}2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}}$

3

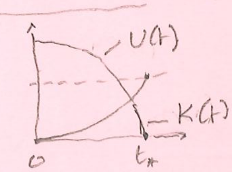
$= \frac{5}{2}\times\frac{4}{10} = 2$ $\qquad \boxed{a = 2\ m/s^2}$

4 $t_*^2 = \frac{2d_*}{a}$

$\boxed{v_* = a t_* = \sqrt{2 d_* a} = \sqrt{2\,\frac{1}{4}\,2} = 1\ m}$

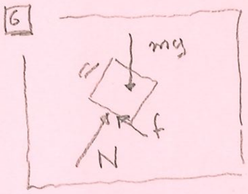
3

5



3

6



2

7 $\boxed{\phi_* = 45°}$

2

8 $\cancel{m}a = \cancel{m}g\sin\theta - \mu\cancel{m}g\cos\theta$

$\mu = \frac{g\sin\theta - a}{g\cos\theta} = \frac{5-2}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$

$\boxed{\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{5}}_{0{,}3464} < \mu_s}$

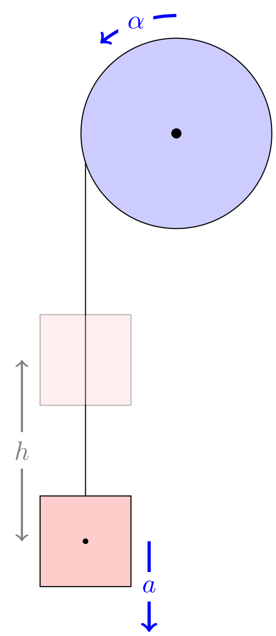
3

2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Ne pas répondre ou cocher une réponse erronée ne fait rien perdre.
Par contre, il faut répondre correctement à six questions pour réussir cette partie.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !
Gommer pour les corrections !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

Q1

Un bloc de masse m est attachée par une corde de masse négligeable
à une poulie de masse M et de rayon R.
La poulie est un cylindre homogène plein.
Jusqu'à l'instant $t = 0$, le bloc est maintenu immobile : sa vitesse est nulle.
A cet instant, il est lâché et chute sous l'effet de la gravité.



Quelle sera la vitesse du bloc lorsqu'il aura chuté d'une hauteur h ?

A $v = \sqrt{\dfrac{mgh}{(M+m)}}$ — **A** ☐

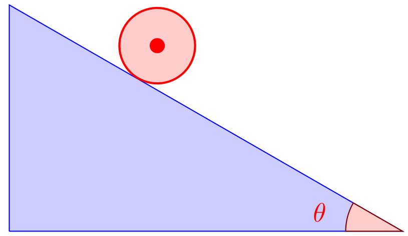
B $v = \sqrt{\dfrac{mgh}{(M)}}$ — **B** ☐

C $v = \sqrt{\dfrac{4mgh}{(M+4m)}}$ — **C** ☐

D $v = \sqrt{\dfrac{4mgh}{(M+2m)}}$ — **D** ■

E $v = \sqrt{\dfrac{2mgh}{(M+2m)}}$ — **E** ☐

Un cylindre plein roule sans glisser sur une route en pente avec un angle θ.
La masse du cylindre est m et son rayon est R.
Les coefficients de frottement statique et dynamique entre l'asphalte de la route et l'acier du cylindre sont notés μ_s et μ_c.

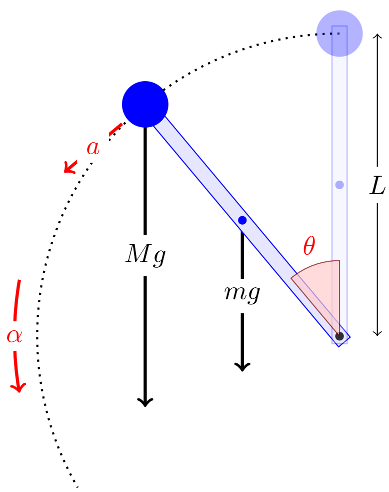


Q2 Que vaut la force de frottement exercée par le sol sur la roue ?

A	$f = 0$	**A**	☐
B	$f = \mu_s mg\cos\theta$	**B**	☐
C	$f = \mu_c mg\cos\theta$	**C**	☐
D	$f = \dfrac{2mg\sin\theta}{3}$	**D**	☐
E	$f = \dfrac{mg\sin\theta}{3}$	**E**	■

Q3

Un athlète a le bras levé verticalement et tendu au dessus de sa tête.
A l'extrémité du bras, il tient dans sa main une boule de masse M
Il laisse tourner le bras tendu autour de son épaule sous l'effet de gravité.
Le bras est modélisé comme une barre homogène de longueur L et de masse m ?



Quelle est sera l'accélération maximale observée à la main ?

A $a = \left(\dfrac{M}{M+m}\right) \; g$

B $a = \left(\dfrac{M}{M-m}\right) \; g$

C $a = \left(\dfrac{6M+3m}{6M+2m}\right) \; g$

D $a = \left(\dfrac{6M-3m}{6M-2m}\right) \; g$

E $a = \left(\dfrac{M-\sqrt{2}m}{M+\sqrt{2}m}\right) \; g$

A ☐
B ☐
C ■
D ☐
E ☐

Q4

A l'instant $t = 0$, un ressort de raideur k est immobile à sa position d'équilibre.
Une extrémité du ressort est fixée à un mur.
Une masse m est attachée à l'autre extrémité.
Le ressort est ensuite étiré à vitesse v constante pendant n secondes.
Quelle est la puissance P de la force de rappel du ressort à l'instant $t = n$?

A $P = kv^2n^2$ — A ☐

B $P = kv^2n$ — B ■

C $P = \dfrac{mv^2}{2n}$ — C ☐

D $P = \dfrac{kv^2}{n}$ — D ☐

E $P = \dfrac{kv^2}{n^2}$ — E ☐

Q5

Notons θ l'angle entre un mur parfaitement lisse et une échelle de masse m et de longueur L posée contre celui-ci. Quel est le coefficient minimal de frottement statique requis μ_s entre le sol et l'échelle pour que celle ne glisse pas ?

A $2\mu_s = mg\tan(\theta)/L$ — A ☐
B $2\mu_s = \cos(\theta)$ — B ☐
C $2\mu_s = L\tan(\theta)$ — C ☐
D $2\mu_s = \sin(\theta) - \cos(\theta)$ — D ☐
E $2\mu_s = \tan(\theta)$ — E ■

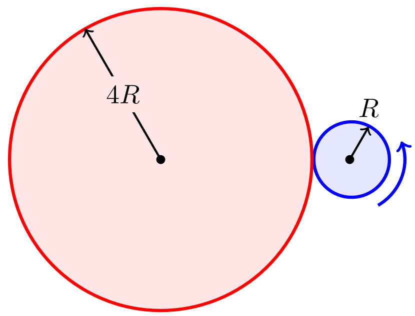
Q6

Une balle est lancée vers le haut.
On néglige les frottements de l'air.
Quelles sont les forces agissant sur la balle lors de sa montée ?

A La force de gravité. — A ■
B La force verticale qui pousse vers le haut. — B ☐
C La force de gravité et une force verticale décroissante qui pousse vers le haut. — C ☐
D La force de gravité et une force verticale constante qui pousse vers le haut. — D ☐
E La force de gravité et une force verticale croissante qui pousse vers le haut. — E ☐

Q7

Un cylindre de rayon R roule sans glissement sur un cylindre de rayon $4R$.
Le grand cylindre ne bouge pas !
Après avoir parcouru un tour complet du grand cylindre,
le petit cylindre aura effectué n rotations sur lui-même.



Quel est ce nombre n de rotations ?

A $n = 3$
B $n = 4$
C $n = 5$
D $n = 6$
E $n = 7$

A ☐
B ☐
C ■
D ☐
E ☐

Q8

Quelles sont les unités du moment d'une force ?

A $kg\ m^2\ /\ s$
B $kg\ m^2\ /\ s^2$
C $N\ /\ m$
D $N\ m^2$
E $N\ m\ s^2$

A ☐
B ■
C ☐
D ☐
E ☐

Q9

A l'instant $t = 0$, on lance verticalement une balle de masse m verticalement.
La vitesse initiale de la balle est donnée : $v(0) = v_0$.
Le frottement de l'air est modélisé par une force $F = -\gamma v(t)$.
L'équation du mouvement s'écrit donc :

$$m\ \frac{dv}{dt}(t) = -m\ g - \gamma\ v(t)$$

Quelle est l'unique expression correcte de $v(t)$?

A $v(t) = \frac{mg}{\gamma}\left(\exp\left(-\frac{\gamma t}{m}\right) - 1\right) + v_0\ \exp\left(\frac{\gamma t}{m}\right)$ — A ☐

B $v(t) = \frac{mg}{\gamma}\left(\exp\left(-\frac{\gamma t}{m}\right) - 1\right) + v_0$ — B ☐

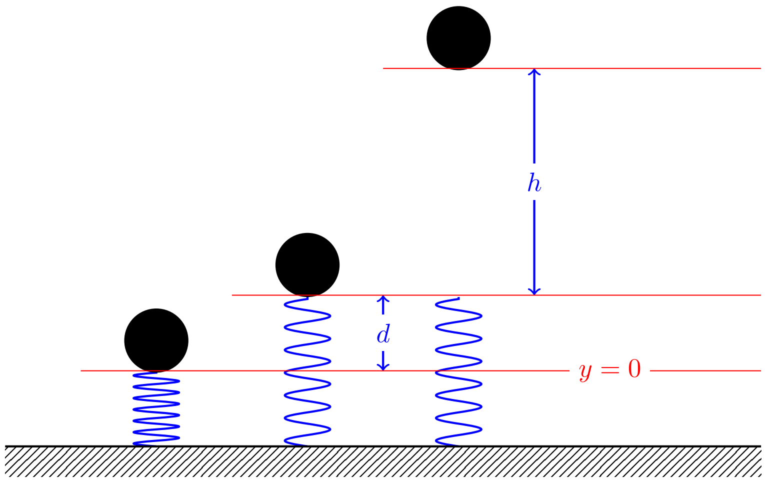
C $v(t) = -\frac{mg}{\gamma} + v_0\ \exp\left(-\frac{\gamma t}{m}\right)$ — C ☐

D $v(t) = -\frac{mg}{\gamma} - 2v_0 \exp\left(-\frac{\gamma t}{m}\right)$ — D ☐

E $v(t) = -\frac{mg}{\gamma} + \left(v_0 - \frac{mg}{\gamma}\right) \exp\left(-\frac{\gamma t}{m}\right)$ — E ■

Q10

Une bille de masse m se trouve sur un ressort avec une constante de raideur k.
Le ressort est comprimé d'une distance d par rapport à son état au repos.
A l'instant $t = 0$, on relâche le ressort qui va propulser la bille.
Lorsque la bille se désolidarise du ressort, le ressort a sa longueur au repos.
La bille s'élève ensuite d'une hauteur h avant de retomber.



Quelle sera la vitesse de la bille lorsqu'elle se désolidarise du ressort ?

A $v = \sqrt{2gh}$ — **A** ■

B $v = \sqrt{\frac{2gh}{m}}$ — **B** □

C $v = mgh$ — **C** □

D $v = \sqrt{\frac{gh}{2m}}$ — **D** □

E $v = \sqrt{\frac{kd^2}{m}}$ — **E** □

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

$$\frac{d}{dt}\Big(m\,\vec{\mathbf{v}}\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\,v^2 + \tfrac{1}{2}I\,\omega^2\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\Big(I\,\omega\Big) = \sum M_i$$

Formulaire

Lorsque les forces sont constantes,

$$\Delta\Big(m\,\vec{\mathbf{v}}\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t$$

$$\Delta\Big(\tfrac{1}{2}m\,v^2\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}$$

Mouvement d'un projectile

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\, t^2}{2}$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$\Delta \overbrace{\left(\tfrac{1}{2} m\ v^2\right)}^{K} = \sum \overbrace{\vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta \vec{\mathbf{x}}}^{W}$$
$$= \sum \underbrace{\vec{\mathbf{F}_{nc}} \cdot \Delta \vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} \quad - \quad \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r} \Big)$$

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_x F_y - r_y F_x = F\ r_\perp = F_\perp\ r = F r \sin(\theta)$$

Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$
$$m\ \vec{\mathbf{x}}(t) = \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t) \Big)$$
$$m\ \vec{\mathbf{v}}(t) = \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t) \Big)$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\ r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\ k^2 = \sum m_i\ r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\ h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ \dfrac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m\ \dfrac{L^2}{12}$