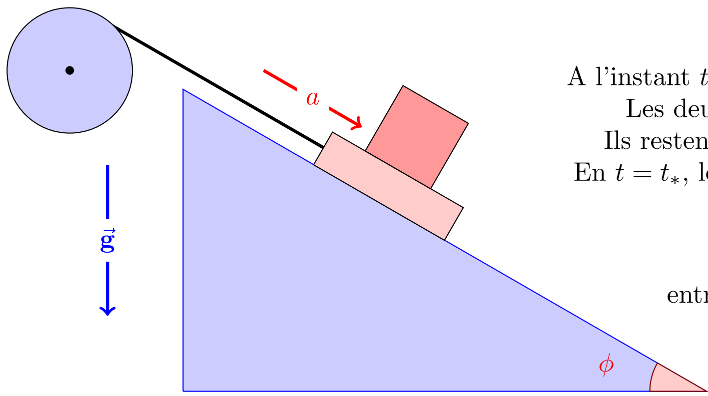
KINE11-EDPH11	
Janvier 2024	*Introduction à la mécanique*
IEPR 1011 -Bleu-	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

1 Deux blocs superposés...

Deux blocs sont retenus par une corde à un cylindre plein de rayon $R = 0.25$ m et de masse $M = 8$ kg.
Les blocs de même masse $m = 2$ kg sont superposés et se trouvent sur une pente avec un angle $\phi = 30^o$.
La corde de la poulie est uniquement attachée au bloc inférieur.
Le second bloc de forme cubique est simplement posé sur le premier bloc.
Le bloc triangulaire de la pente est immobile.



A l'instant $t = 0$, les deux blocs se mettent en mouvement.
Les deux blocs ont exactement la même accélération !
Ils restent solidaires en raison du frottement entre eux !
En $t = t_*$, les blocs ont parcouru une distance $d = 0.25$ m.

Dans les calculs, on utilisera $g = 10$ m/s^2.
Le coefficient de frottement cinétique
entre le bloc inférieur et la pente est $\mu_c = 0.2/\sqrt{3}$.

Dans une première étape, nous considérons les deux blocs comme un unique corps de masse $2m = 4$ kg.

1. Citer et dessiner toutes les forces extérieures sur l'ensemble de deux blocs pour $t > 0$.
   Ne pas indiquer les forces entre les deux blocs !
2. Calculer le moment d'inertie de la poulie.
3. Obtenir l'accélération a des deux blocs pour $t > 0$.
4. Calculer la vitesse v_* des deux blocs à l'instant t_* ?
5. Dessiner l'énergie cinétique et potentielle du système composé
   des deux blocs et de la poulie en fonction du temps $t \in [0, t_*]$.
   Par convention, l'énergie potentielle finale du système sera considérée comme nulle.

Et dans une seconde étape, analysons la situation du petit cube supérieur séparément !

6. Citer et dessiner les forces appliquées sur le bloc supérieur.
7. A partir quelle valeur ϕ_* de la pente du sol, observerait-on un basculement du bloc supérieur ?
8. Quel doit être le coefficient de frottement statique minimal μ_s entre les deux blocs
   pour que les blocs restent toujours solidaires pendant la descente ?

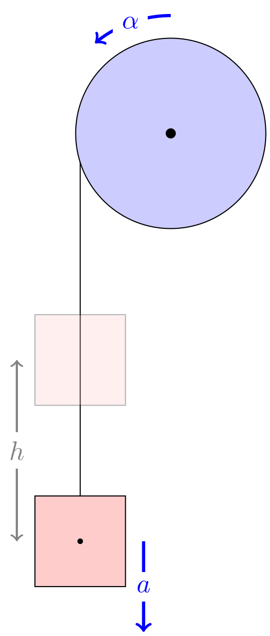
Attention ! Il faut répondre exclusivement sur l'unique feuille de réponse fournie.
Ce questionnaire peut servir de brouillon, mais ne sera jamais lu par le correcteur !
Répondez à chaque sous-question et uniquement à ce qui est demandé.
Faites des dessins distincts pour chaque sous-question.
Soyez précis dans les graphes.
Chaque sous-question peut être résolue de manière symbolique, si les résultats précédents font défaut !
Détaillez vos calculs afin de clairement montrer votre démarche.
Pensez à encadrer les résultats principaux pour les mettre en évidence.

2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Ne pas répondre ou cocher une réponse erronée ne fait rien perdre.
Par contre, il faut répondre correctement à six questions pour réussir cette partie.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !
Gommer pour les corrections !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

Q1

Un bloc de masse m est attachée par une corde de masse négligeable
à une poulie de masse M et de rayon R.
La poulie est un cylindre homogène plein.
Jusqu'à l'instant $t = 0$, le bloc est maintenu immobile : sa vitesse est nulle.
A cet instant, il est lâché et chute sous l'effet de la gravité.



Quelle sera la vitesse du bloc lorsqu'il aura chuté d'une hauteur h ?

A $v = \sqrt{\dfrac{mgh}{(M+m)}}$

B $v = \sqrt{\dfrac{mgh}{(M)}}$

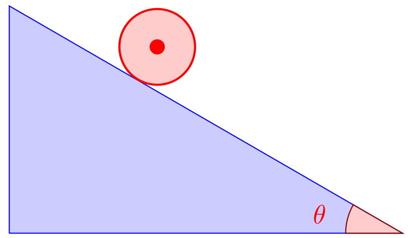
C $v = \sqrt{\dfrac{4mgh}{(M+4m)}}$

D $v = \sqrt{\dfrac{4mgh}{(M+2m)}}$

E $v = \sqrt{\dfrac{2mgh}{(M+2m)}}$

A ☐
B ☐
C ☐
D ☐
E ☐

Un cylindre plein roule sans glisser sur une route en pente avec un angle θ.
La masse du cylindre est m et son rayon est R.
Les coefficients de frottement statique et dynamique entre l'asphalte de la route et l'acier du cylindre sont notés μ_s et μ_c.



Q2 Que vaut la force de frottement exercée par le sol sur la roue ?

A $f = 0$ | **A** ☐

B $f = \mu_s mg \cos\theta$ | **B** ☐

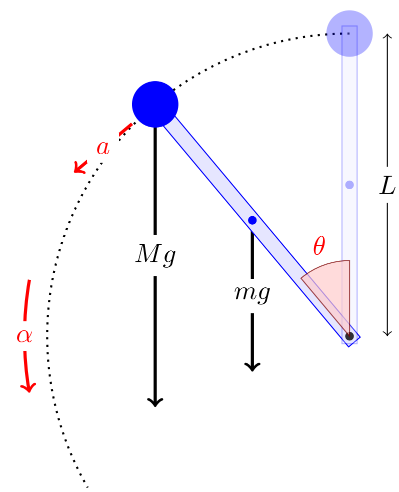
C $f = \mu_c mg \cos\theta$ | **C** ☐

D $f = \dfrac{2mg\sin\theta}{3}$ | **D** ☐

E $f = \dfrac{mg\sin\theta}{3}$ | **E** ☐

Q3

Un athlète a le bras levé verticalement et tendu au dessus de sa tête.
A l'extrémité du bras, il tient dans sa main une boule de masse M
Il laisse tourner le bras tendu autour de son épaule sous l'effet de gravité.
Le bras est modélisé comme une barre homogène de longueur L et de masse m ?



Quelle est sera l'accélération maximale observée à la main ?

A $a = \left(\dfrac{M}{M+m}\right)\ g$

B $a = \left(\dfrac{M}{M-m}\right)\ g$

C $a = \left(\dfrac{6M+3m}{6M+2m}\right)\ g$

D $a = \left(\dfrac{6M-3m}{6M-2m}\right)\ g$

E $a = \left(\dfrac{M-\sqrt{2}m}{M+\sqrt{2}m}\right)\ g$

A ☐
B ☐
C ☐
D ☐
E ☐

Q4

A l'instant $t = 0$, un ressort de raideur k est immobile à sa position d'équilibre.
Une extrémité du ressort est fixée à un mur.
Une masse m est attachée à l'autre extrémité.
Le ressort est ensuite étiré à vitesse v constante pendant n secondes.
Quelle est la puissance P de la force de rappel du ressort à l'instant $t = n$?

A $P = kv^2n^2$ — A ☐

B $P = kv^2n$ — B ☐

C $P = \dfrac{mv^2}{2n}$ — C ☐

D $P = \dfrac{kv^2}{n}$ — D ☐

E $P = \dfrac{kv^2}{n^2}$ — E ☐

Q5

Notons θ l'angle entre un mur parfaitement lisse et une échelle de masse m et de longueur L posée contre celui-ci. Quel est le coefficient minimal de frottement statique requis μ_s entre le sol et l'échelle pour que celle ne glisse pas ?

A $2\mu_s = mg\tan(\theta)/L$ — A ☐
B $2\mu_s = \cos(\theta)$ — B ☐
C $2\mu_s = L\tan(\theta)$ — C ☐
D $2\mu_s = \sin(\theta) - \cos(\theta)$ — D ☐
E $2\mu_s = \tan(\theta)$ — E ☐

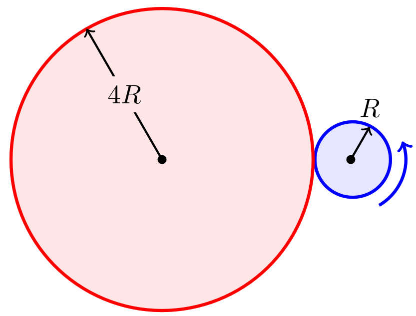
Q6

Une balle est lancée vers le haut.
On néglige les frottements de l'air.
Quelles sont les forces agissant sur la balle lors de sa montée ?

A La force de gravité. — A ☐
B La force verticale qui pousse vers le haut. — B ☐
C La force de gravité et une force verticale décroissante qui pousse vers le haut. — C ☐
D La force de gravité et une force verticale constante qui pousse vers le haut. — D ☐
E La force de gravité et une force verticale croissante qui pousse vers le haut. — E ☐

Q7

Un cylindre de rayon R roule sans glissement sur un cylindre de rayon $4R$.
Le grand cylindre ne bouge pas !
Après avoir parcouru un tour complet du grand cylindre,
le petit cylindre aura effectué n rotations sur lui-même.



Quel est ce nombre n de rotations ?

A $n = 3$
B $n = 4$
C $n = 5$
D $n = 6$
E $n = 7$

A	☐
B	☐
C	☐
D	☐
E	☐

Q8

Quelles sont les unités du moment d'une force ?

A $kg\ m^2\ /\ s$
B $kg\ m^2\ /\ s^2$
C $N\ /\ m$
D $N\ m^2$
E $N\ m\ s^2$

A	☐
B	☐
C	☐
D	☐
E	☐

Q9

A l'instant $t = 0$, on lance verticalement une balle de masse m verticalement.
La vitesse initiale de la balle est donnée : $v(0) = v_0$.
Le frottement de l'air est modélisé par une force $F = -\gamma v(t)$.
L'équation du mouvement s'écrit donc :

$$m\ \frac{dv}{dt}(t) = -m\ g - \gamma\ v(t)$$

Quelle est l'unique expression correcte de $v(t)$?

A $v(t) = \frac{mg}{\gamma}\left(\exp\left(-\frac{\gamma t}{m}\right) - 1\right) + v_0\ \exp\left(\frac{\gamma t}{m}\right)$

B $v(t) = \frac{mg}{\gamma}\left(\exp\left(-\frac{\gamma t}{m}\right) - 1\right) + v_0$

C $v(t) = -\frac{mg}{\gamma} + v_0\ \exp\left(-\frac{\gamma t}{m}\right)$

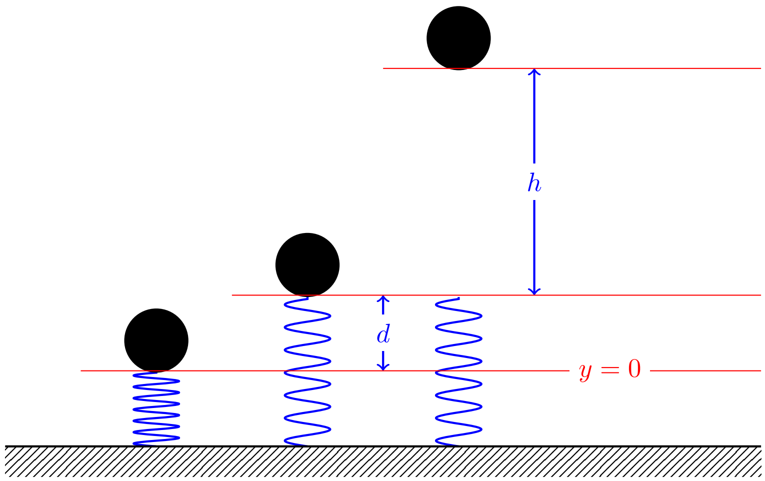
D $v(t) = -\frac{mg}{\gamma} - 2v_0 \exp\left(-\frac{\gamma t}{m}\right)$

E $v(t) = -\frac{mg}{\gamma} + \left(v_0 - \frac{mg}{\gamma}\right)\exp\left(-\frac{\gamma t}{m}\right)$

A	☐
B	☐
C	☐
D	☐
E	☐

Q10

Une bille de masse m se trouve sur un ressort avec une constante de raideur k.
Le ressort est comprimé d'une distance d par rapport à son état au repos.
A l'instant $t = 0$, on relâche le ressort qui va propulser la bille.
Lorsque la bille se désolidarise du ressort, le ressort a sa longueur au repos.
La bille s'élève ensuite d'une hauteur h avant de retomber.



Quelle sera la vitesse de la bille lorsqu'elle se désolidarise du ressort ?

A $v = \sqrt{2gh}$ — **A** ☐

B $v = \sqrt{\frac{2gh}{m}}$ — **B** ☐

C $v = mgh$ — **C** ☐

D $v = \sqrt{\frac{gh}{2m}}$ — **D** ☐

E $v = \sqrt{\frac{kd^2}{m}}$ — **E** ☐

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) &= \sum M_i
\end{aligned}
$$

Formulaire

Lorsque les forces sont constantes,

$$
\begin{aligned}
\Delta\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t \\
\Delta\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}
\end{aligned}
$$

Mouvement d'un projectile

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$\begin{aligned}\Delta\overbrace{\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2\right)}^{K} &= \sum\overbrace{\vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W}\\ &= \sum\underbrace{\vec{\mathbf{F}}_{nc}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} \quad - \quad \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r}\Big)\end{aligned}$$

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_xF_y - r_yF_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_xF_y - r_yF_x = F\ r_\perp = F_\perp\ r = Fr\sin(\theta)$$

Ensemble de particules : un corps !

$$\begin{aligned} m &= \sum m_i \\ m\ \vec{\mathbf{x}}(t) &= \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t)\Big) \\ m\ \vec{\mathbf{v}}(t) &= \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t)\Big)\end{aligned}$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\ r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\ k^2 = \sum m_i\ r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\ h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ \dfrac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m\ \dfrac{L^2}{12}$