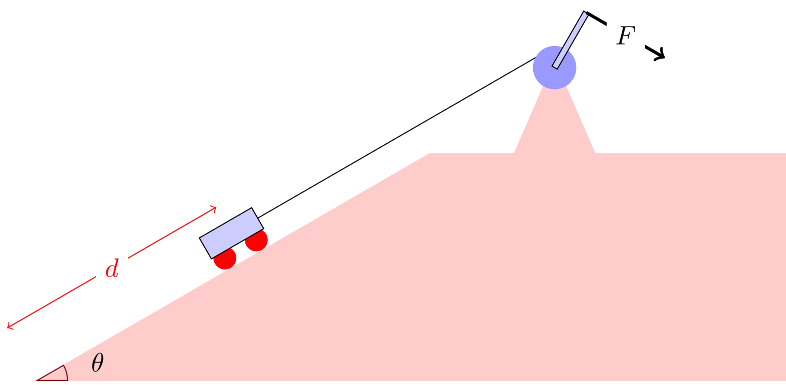
KINE11-EDPH11	
Juin 2015	*Introduction à la mécanique*
IEPR 1011 -Rose-	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

1 Alphonse lâche bêtement la manivelle...

Attention ! Il faut répondre exclusivement sur l'unique feuille de réponse fournie.
Ce questionnaire peut servir de brouillon, mais ne sera jamais lu par le correcteur !
Pour rappel, vous pouvez conserver cet énoncé à la fin de l'examen.

Alphonse actionne un treuil pour tirer un chariot de masse totale $m = 100$ kg le long d'un plan incliné avec un angle $\theta = 30^o$. Lorsque le chariot a parcouru une distance $d = 5$ m depuis la base du plan incliné, Alphonse s'arrête un instant. Ensuite, il lâche malencontreusement la manivelle : le chariot redescend en entrainant la rotation du tambour du treuil.

Le tambour du treuil est un cylindre creux de rayon $R = 10$ cm et d'inertie $I = 0.05$ kg m^2. La manivelle du treuil a une longueur $L = 30$ cm et une masse négligeable. Tous les frottements sont supposés négligeables, ainsi que tous les effets liés à la rotation des quatre roues du chariot: on suppose donc que l'inertie des roues du chariot est nulle et que le chariot glisse parfaitement sur le plan incliné.



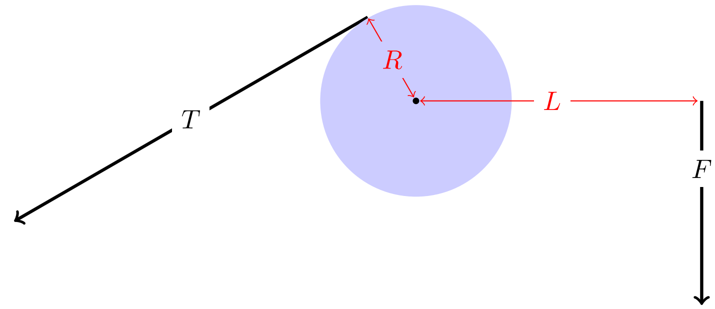
1. Quelle est la norme de la force tangentielle F exercée par Alphonse à l'extrémité de la manivelle du treuil pour maintenir le chariot au repos pendant le temps d'arrêt ?

   On applique l'équilibre de rotation autour de l'axe du treuil :

$$FL - TR = 0$$

En faisant l'équilibre de forces sur la chariot : $T = mg\sin(\theta)$

$$F = \frac{mg\sin(\theta)R}{L}$$



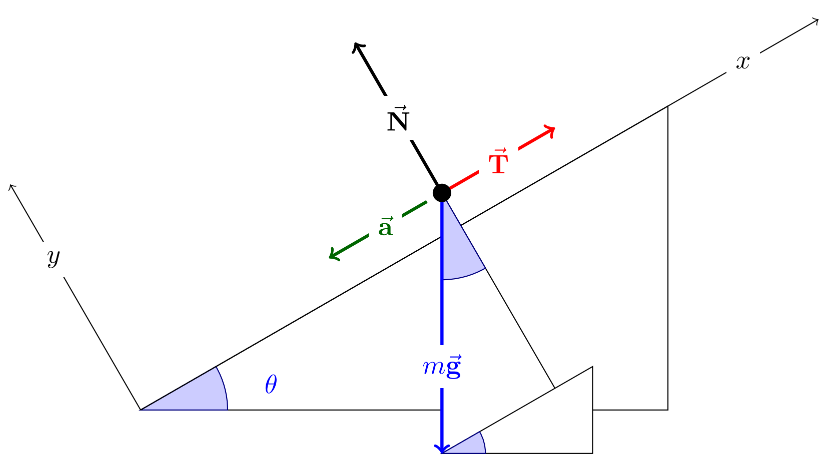
On obtient finalement : $\boxed{F \quad = \quad 163.5 \text{ N}}$

Le résultat numérique est obtenu avec $g = 9.81$ m/s^2. Utiliser $g = 10$ m/s^2 modifie très légèrement la valeur numérique : cette approximation a été admise par le correcteur pour toutes les valeurs numériques. Il faut observer que les calculs doivent être faits avec beaucoup de soin : le bilan d'énergie à la dernière question peut permettre de vérifier que tous vos calculs ont été réalisés avec l'exactitude requise.

Lors de la correction, l'accent est davantage mis sur les relations symboliques qui sont primordiales plutôt sur la réponse numérique finale. Fournir uniquement une réponse numérique sans expliquer la démarche suivie est stupide et audacieux : une toute petite erreur d'arrondi sera sanctionnée impitoyablement.

2. Dessiner l'ensemble des forces qui agissent sur le chariot durant la descente.
   Y indiquer clairement le nom et la notation habituelle pour chacune des forces !

   On réduit le chariot à un unique point matériel et on dessine l'ensemble des forces.



Réaliser avec soin le dessin permet d'éviter de confondre le sinus et le cosinus dans le calcul des deux composantes de la gravité :-) Utiliser une petite équerre graduée est vraiment une bonne idée que devraient méditer pas mal d'étudiants. Dessiner la normale et la force de gravité comme deux vecteurs parallèles est une erreur impardonnable qui démontre que vous n'avez strictement rien compris...

On obtient donc :

- *Force de gravité :* $m\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} -mg\sin(\theta) \\ -mg\cos(\theta) \end{bmatrix}$
- *Force normale du sol :* $\vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix}$
- *Traction du cable :* $\vec{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix}$
- *Accélération du chariot :* $\vec{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} -a \\ 0 \end{bmatrix}$

où a, T et N représentent la norme de vecteurs correspondants.
Ce sont donc des nombres réels positifs.

3. Quelles sont l'accélération a du chariot et la tension T dans la corde durant la descente ?

On écrit les équations de la dynamique pour le chariot et pour le treuil, ainsi que la condition cinématique qui lie le mouvement de la corde et la rotation du tambour. Il y a trois équations et trois inconnues α, a et T. Les valeurs α et a représentent les normes de l'accélération du chariot (vers le bas) et de la rotation (anti-horlogique) du tambour : ce sont donc des nombres positifs dans les équations qui suivent. Dans un tel exercice, il est vraiment important de clairement définir ce que représentent les symboles introduit :-)

$$\left\{\begin{array}{lcl} ma & = & mgd\sin(\theta) - T \\ I\alpha & = & TR \\ \alpha R & = & a \end{array}\right.$$

$$\downarrow$$

$$\left(m + \frac{I}{R^2}\right) a = mg\sin(\theta)$$

$$a = \frac{mR^2}{(mR^2 + I)}\, g\sin(\theta)$$

On obtient finalement :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} a & = & 4.67 \text{ m/s}^2 \\ T = mg\sin(\theta) - ma & = & 23.5 \text{ N} \end{array}}$$

Beaucoup d'étudiants oublient de tenir compte de la rotation du tambour et traitent le problème uniquement comme la descente libre du chariot : c'est une erreur, même si l'impact de la rotation du tambour est modeste sur les résultats finaux. Couper la corde ou lâcher la manivelle n'est pas le même problème : il faut résoudre ce qui est demandé !

Il faut aussi observer que la tension dans la corde est modeste, puisqu'elle ne sert plus qu'à faire tourner le tambour. Ecrire que $T = mg\sin(\theta)$ pendant la descente est donc vraiment une grosse bétise !

4. Quelle est la durée de la descente jusqu'au bas du plan incliné ?

Le calcul du temps de descente est donné par :

$$\frac{at_*^2}{2} = d$$

$$t_* = \sqrt{\frac{2d}{a}}$$

Et ensuite comme $a = 4.67 \text{ m/s}^2$, *on obtient immédiatement :* $\boxed{t_* \;=\; 1.46 \text{ s}}$

5. Quelle est la vitesse angulaire de rotation du tambour lorsque le chariot arrive en bas de la pente ?

   Le vitesse angulaire à la fin de la descente est donné par :

$$v_* = at_*$$

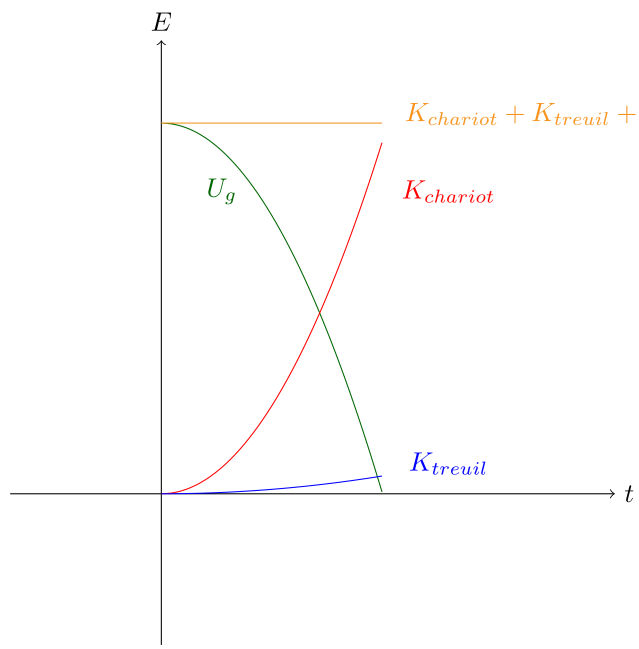
$$\omega_* = \frac{at_*}{R}$$

A nouveau comme $a = 4.67 \text{ m/s}^2$, *on obtient immédiatement :* $\boxed{\omega_* \;=\; 68.3 \text{ rad/s}}$

Attention, écrire que $vt_* = d$ *est incorrect ! La vitesse n'est pas constante : nous avons un MRUA et pas un MRU. Une telle erreur commise par beaucoup d'étudiants est impardonnable....*
Les examens se ressemblent mais ne sont pas identiques : ces étudiants semblent appliquer mécaniquement (et donc bêtement) une approche inspirée de l'examen de janvier... C'est une très mauvaise idée !

6. Dessiner l'évolution de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique du chariot en fonction du temps pendant la descente. On pose que l'énergie potentielle est nulle au niveau du sol.

   L'évolution de l'énergie potentielle et cinétique du chariot en fonction du temps est donnée par :



Tracer des droites est incorrect, car c'est alors l'évolution en fonction de la distance !
Tracer l'énergie cinétique globale du système n'est pas correct !
Une partie de l'énergie potentielle est transformée en énergie cinétique de rotation du treuil. Pour réussir cette question, il est donc vraiment indispensable que l'énergie cinétique du chariot à la fin de la descente soit inférieure à l'énergie potentielle initiale.
Par contre, il n'était pas requis de tracer la courbe bleue K_{treuil}

Globalement, le bilan d'énergie s'écrit :

$$\frac{mv_*^2}{2} + \frac{I\omega_*^2}{2} = mgd\sin(\theta)$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En y substituant les valeurs numériques}$$

$$2336\ \mathrm{J} + 116\ \mathrm{J} = 2452\ \mathrm{J}$$

En mentionnant clairement dans cette sous-question qu'une partie de l'énergie potentielle sert à faire tourner le tambour du treuil, vous démontrez au correcteur que vous avez vraiment compris ! Bravo aux rares étudiants qui l'ont fait :-)
Reproduire servilement un des graphes inappropriés d'un des examens précédents n'est pas la meilleure manière de démontrer que vous avez compris quelque chose et que vous avez étudié de manière intelligente :-(Cela attriste bêtement le correcteur...

Répondez à chaque sous-question et uniquement à ce qui est demandé.
Faites des dessins distincts pour chaque sous-question.
Soyez précis dans les graphes.
Chaque sous-question peut être résolue de manière symbolique, si les résultats précédents font défaut !
Détaillez vos calculs afin de clairement montrer votre démarche.
Pensez à encadrer les résultats principaux pour les mettre en évidence.

2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Une réponse correcte rapporte 4 points, une réponse erronée en fait perdre 1 point.
Ne rien cocher ne fait rien gagner et ne fait rien perdre.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !
Gommer pour les corrections !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

Q1

Un joueur de hockey imprime une vitesse initiale v à la rondelle grâce à un lancer exécuté sur la surface gelée d'une patinoire. La rondelle demeure sur la glace et se déplace en ligne droite sur une distance d avant de s'immobiliser. Que vaut le coefficient de frottement cinétique μ_c entre la rondelle et la glace ?

A $\mu_c = \dfrac{v}{\sqrt{2gd}}$ — **A** ☐

B $\mu_c = \dfrac{gd}{v^2}$ — **B** ☐

C $\mu_c = \dfrac{v^2}{2gd}$ — **C** ■

D $\mu_c = \dfrac{2\sqrt{gd}}{v^2}$ — **D** ☐

E $\mu_c = \dfrac{2v^2}{gd}$ — **E** ☐

Q2

La grande boucle d'un parc d'attraction a un rayon R pour un train de masse m. Au sommet de la boucle, quelle doit être la vitesse minimale v du train pour ne pas quitter les rails ?

A $v = \dfrac{mg}{R^2}$ — **A** ☐

B $v = \sqrt{gR}$ — **B** ■

C $v = \sqrt{2gR}$ — **C** ☐

D $v = \dfrac{\sqrt{gR}}{2}$ — **D** ☐

E $v = \sqrt{mgR}$ — **E** ☐

Q3

Considérons un mouvement circulaire uniformément accéléré.
Les composantes radiale et tangentielle de l'accélération sont notées a_r et a_t.
La vitesse et l'accélération angulaires sont notées ω et α.
Quelle est l'unique affirmation exacte ?

A	α et a_t sont constantes.	**A**	■
B	α et a_r sont constantes.	**B**	□
C	ω et a_t sont constantes.	**C**	□
D	α et ω sont constantes.	**D**	□
E	a_t et a_r sont constantes.	**E**	□

Q4

Notons θ l'angle entre un mur parfaitement lisse et une échelle de masse m et de longueur L posée contre celui-ci. Quel est le coefficient minimal de frottement statique requis μ_s entre le sol et l'échelle pour que celle ne glisse pas ?

A	$2\mu_S = mg\tan(\theta)/L$	**A**	□
B	$2\mu_S = \cos(\theta)$	**B**	□
C	$2\mu_S = \tan(\theta)$	**C**	■
D	$2\mu_S = L\tan(\theta)$	**D**	□
E	$2\mu_S = \sin(\theta) - \cos(\theta)$	**E**	□

Q5

Quelles sont les unités d'une puissance ?

A	$N\ m\ /\ s^2$	**A**	□
B	$kg\ m^2\ /\ s^3$	**B**	■
C	$kg^2\ m^2\ /\ s^2$	**C**	□
D	$J\ s$	**D**	□
E	$J\ m\ s^2$	**E**	□

Q6

Un cycliste roule à une vitesse $v = 5\ m/s$.
Quelle est l'unique affirmation exacte ?

A	Sa vitesse est approximativement 30 km/h.	**A**	□
B	Sa vitesse est approximativement 18 km/h.	**B**	■
C	Sa vitesse est approximativement 10 km/h.	**C**	□
D	Une telle vitesse pour un cycliste est totalement irréaliste.	**D**	□
E	Sa vitesse est approximativement 6 km/h.	**E**	□

Q7

Le mouvement d'une masse reliée à un ressort est décrit par l'équation :

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = -\frac{k}{m}\ x(t)$$

La fréquence angulaire d'oscillation du pendule est donc donnée par :

A $\omega = \sqrt{k/m}$
B $\omega = \sqrt{m/k}$
C $\omega = \sqrt{mk^2}$
D $\omega = k/m$
E $\omega = m/k$

A ■
B ☐
C ☐
D ☐
E ☐

Q8

Considérons le vecteur

$$\vec{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

dans un repère cartésien tel que représenté sur la figure. La longueur (ou le module, ou la norme) du vecteur est donnée par

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Quelle est l'unique affirmation exacte ?

A $A\sin(\theta) = A_z$

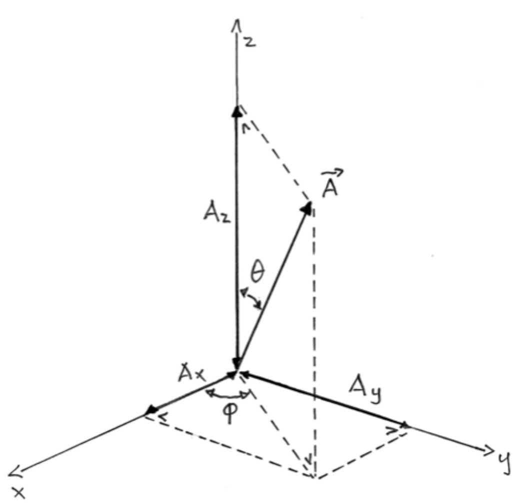
B $A\cos(\theta) = A_y$

C $A\sin(\phi) = A_x$

D $A\cos(\phi) = A_y$

E $A\sin(\theta) = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$

A ☐
B ☐
C ☐
D ☐
E ■



Q9

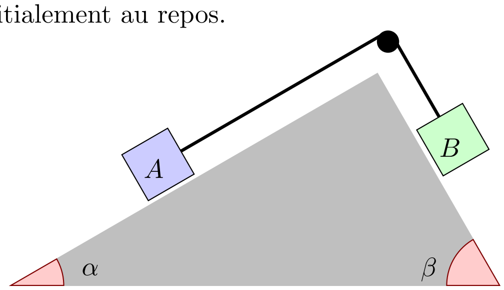
Une balle de tennis de masse m rebondit horizontalement sur un mur avec une vitesse v. Après la collision, elle n'a plus que 49% de son énergie cinétique initiale.
Quelle est l'impulsion subie par la balle ?

A $0,7\ mv$
B $0,49\ mv^2$
C $1,49\ mv^2$
D $1,7\ mv$
E $0,49\ mv$

A ☐
B ☐
C ☐
D ■
E ☐

Q10

Deux bloc de masses $m_A < m_B$ sont reliés par une corde via une poulie sur un bloc triangulaire avec des angles $\alpha < \beta$ respectivement. Il n'y aucun frottement dans la poulie. Les masses de la corde et de la poulie sont négligeables. Le système est initialement au repos.



Quelle est la vitesse v des blocs lorsqu'ils se sont déplacés d'une distance d ?

A $v = \left(\dfrac{m_A + m_B}{m_B \sin\beta - m_A \sin\alpha}\right)\sqrt{gd}$

B $v = \sqrt{2gd\left(\dfrac{m_A \sin\alpha - m_B \sin\beta}{m_A + m_B}\right)}$

C $v = \sqrt{2gd\left(\dfrac{m_A + m_B}{m_B \cos\beta - m_A \cos\alpha}\right)}$

D $v = \sqrt{2gd\left(\dfrac{m_B \sin\beta - m_A \sin\alpha}{m_A + m_B}\right)}$

E $v = \left(\dfrac{m_A + m_B}{m_B \sin\beta - m_A \sin\alpha}\right)\sqrt{2gd}$

A ☐
B ☐
C ☐
D ■
E ☐

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\left(I\ \omega\right) &= \sum M_i
\end{aligned}$$

Formulaire

Lorsque les forces sont constantes,

$$\begin{aligned}
\Delta\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \Delta t \\
\Delta\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta \vec{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

Mouvement d'un projectile

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$\Delta \overbrace{\left(\tfrac{1}{2} m\ v^2\right)}^{K} = \sum \overbrace{\vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W}$$

$$= \sum \underbrace{\vec{\mathbf{F}}_{nc} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} - \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r} \Big)$$

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_xF_y - r_yF_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_xF_y - r_yF_x = F\ r_\perp = F_\perp\ r = Fr\sin(\theta)$$

Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$

$$m\ \vec{\mathbf{x}}(t) = \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t) \Big)$$

$$m\ \vec{\mathbf{v}}(t) = \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t) \Big)$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\ r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\ k^2 = \sum m_i\ r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\ h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ \dfrac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m\ \dfrac{L^2}{12}$