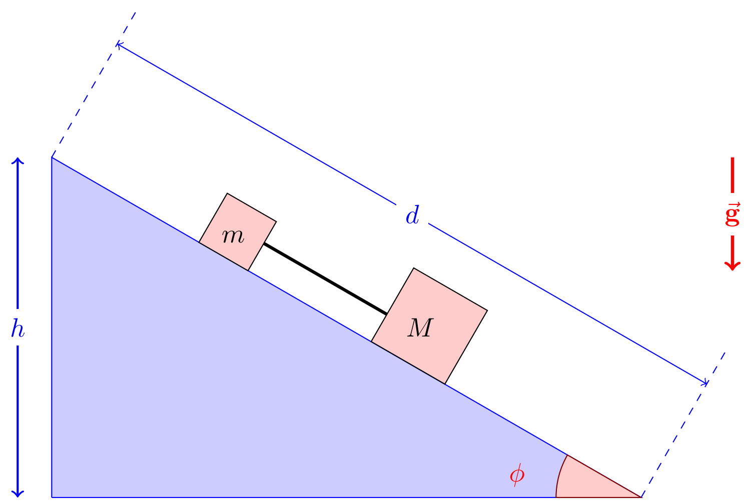
KINE11-EDPH11	
Juin 2017	*Introduction à la mécanique*
IEPR 1011 -Rose-	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

1 Donatienne et Valentin encordés...

Donatienne une jeune alpiniste avec une masse $m = 60$ kg retient avec une corde son amoureux Valentin qui a une masse $M = 100$ kg, sur une pente glacée avec une longueur $d = 1200$ m et une hauteur $h = 600$ m. Le coefficient de frottement statique μ_s est identique pour les deux alpinistes.
A l'instant $t = 0$, les deux alpinistes qui étaient auparavant immobiles se mettent à glisser.



Comme Donatienne a des crampons, le coefficient de frottement cinétique entre elle et la glace vaut $\mu_c = 0.4$. Par contre, Valentin qui est plus étourdi a oublié ses crampons : le coefficient de frottement cinétique entre lui et la glace vaut $\mu_c = 0.3$. Dans les calculs, on utilisera $g = 10$ m/s^2.

1. Quelle est la valeur de l'angle ϕ en degrés ?

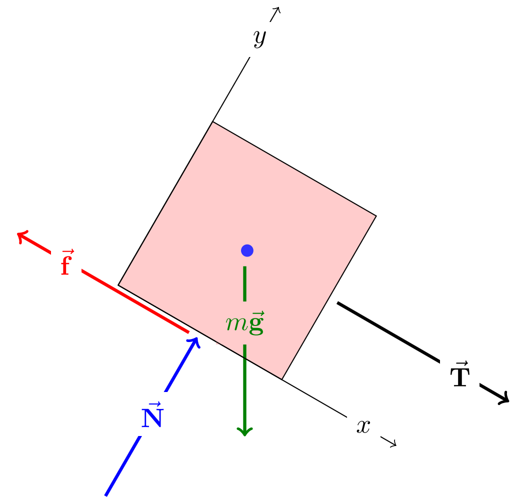
   On obtient immédiatement :

$$\boxed{\phi \;=\; \arcsin\frac{h}{d} \;=\; \arcsin\frac{1}{2} \;=\; 30^o}$$

Une très large majorité des étudiants obtiennent cette valeur.
Mais un nombre non négligeable d'étudiants arrivent à confondre l'hypoténuse et la base d'un triangle rectangle ! Ne pas obtenir cet angle est vraiment totalement impardonnable :-)
Il était aussi possible de directement obtenir la valeur en mesurant l'angle sur le dessin avec votre équerre : c'était pas interdit : vérifiez ! L'angle du dessin était le bon :-)

2. Dessiner l'ensemble des forces sur Donatienne pendant sa descente sur la pente.
   Y indiquer clairement le nom et la notation habituelle pour chacune des forces.

   Les forces qui agissent sur Donatienne sont la réaction normale du sol, le frottement, la gravité et la tension dans la corde qui retient Valentin !

   Il faut donc citer :

   - *Force de gravité :* $m\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} mg\sin(\phi) \\ -mg\cos(\phi) \end{bmatrix}$
   - *Force normale du sol :* $\vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0 \\ mg\cos(\phi) \end{bmatrix}$
   - *Force de frottement :* $\vec{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} -\mu_c mg\cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix}$
   - *Force de traction de la corde :* $\vec{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix}$

   Définir les axes comme indiqué sur la figure simplifie énormément la suite des calculs.

3. Calculer la norme de l'accélération constante a de Donatienne et Valentin.

   Le long de l'axe x, on obtient immédiatement l'accélération demandée en écrivant la loi de Newton pour l'ensemble des deux alpinistes pris comme un unique corps :

$$(m+M)a = (m+M)g\sin(\phi) - 0.3\ Mg\cos(\phi) - 0.4\ mg\cos(\phi)$$

$$\downarrow$$

$$a = g\sin(\phi) - \left(\frac{0.3\ M + 0.4\ m}{m+M}\right) g\cos(\phi)$$

$$\downarrow$$

$$a = 5 + \frac{27}{10}\sqrt{3}$$

On déduit finalement : $\boxed{a = 2.08 \text{ m/s}^2}$

On observe bien que la gravité aura tendance à faire glisser les deux alpinistes et que les deux forces de frottement s'y opposent...

Considérer les deux corps séparément nécessitera d'exprimer d'abord la valeur de T commune en termes de l'accélération a. Ensuite, on pourra déduire cette accélération commune a : cette démarche est évidemment admise, mais est plus longue à mettre en oeuvre.

Attention : pour une fois, la valeur numérique n'était pas un nombre entier ! Noter aussi qu'il faut bien mettre les coefficients de frottement distincts pour les deux forces de frottement et pas faire une moyenne des deux coefficients de frottement :-)

4. Calculer la norme de la tension constante T dans la corde entre les deux alpinistes.

   Le long de l'axe x, on obtient immédiatement la tension demandée en écrivant la loi de Newton pour Donatienne uniquement :

$$ma = mg\sin(\phi) + T - 0.4\ mg\cos(\phi)$$

$$\downarrow$$

$$T = ma - mg\sin(\phi) + 0.4\ mg\cos(\phi)$$

$$\downarrow$$

$$T = m\ \underbrace{\left(2.08 - 5 + 2\sqrt{3}\right)}_{0.544}$$

On déduit finalement : $\boxed{T = 32.65 \text{ Newton}}$

   Il est important de noter que l'on obtient une valeur positive : ce qui signifie que c'est bien Donatienne qui retient Valentin dans leur chute. L'inverse ne serait pas possible car la corde ne peut reprendre une force qu'en traction et jamais en compression... Imaginez la situation pour bien vous rendre compte de la réalité physique du problème :-)

5. Calculer la valeur minimale de μ_s pour que les deux alpinistes ne glissent pas.

   Il faut donc exiger que les effets du frottement et de la gravité soient exactement identiques dans le bilan de la composante x des forces : ce qui revient à écrire pour l'ensemble formé par les deux alpinistes :

$$0 = (m+M)g\sin(\phi) - \mu_s(m+M)g\cos(\phi)$$

$$\downarrow$$

$$\mu_s\cos(\phi) = \sin(\phi)$$

$$\downarrow$$

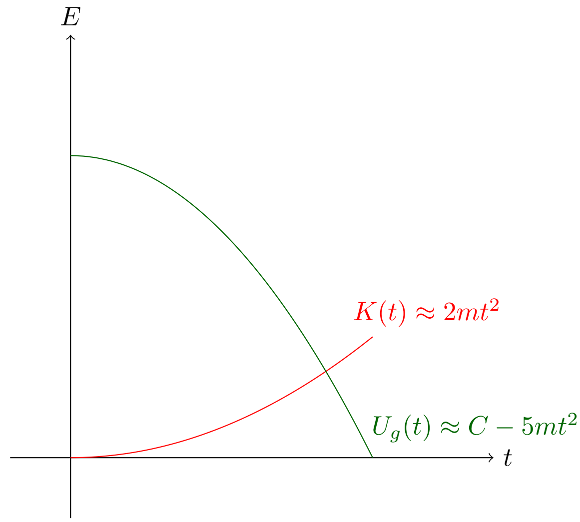
$$\mu_s = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}$$

On conclut donc : $\boxed{\mu_s = \tan(\phi) = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.58}$

   Ce résultat pouvait s'obtenir immédiatement (et donc sans faire aucun calcul !) en se souvenant de l'interprétation physique du coefficient de frottement statique tel que montré dans l'expérience faite au cours !

6. Dessiner la variation de l'énergie cinétique et potentielle de Donatienne[1] en fonction du temps.

L'évolution de l'énergie potentielle et cinétique en fonction du temps est donnée par :



Tracer des droites est incorrect, car c'est alors l'évolution en fonction de la distance !

Attention : il n'y pas de conservation de l'énergie mécanique, car une partie de l'énergie potentielle est dissipée par le travail de la force de frottement. Il est donc essentiel que sur votre dessin, on observe que l'accroissement de l'énergie cinétique ne compense que très partiellement la décroissance de l'énergie potentielle de Donatienne.

Donner deux droites qui se compensent ou deux paraboles qui se compensent était une mauvaise idée. L'enseignant trouve toujours une nouvelle figure à faire ! Moralité : c'est bien de réviser les examens des années précédentes, mais pas de recopier sans comprendre les réponses d'une année pour la question d'une autre année.... Au jeu du plus idiot et débile, c'est à nouveau toujours une fois de plus l'enseignant qui gagne :-) Très peu d'étudiants ont le dessin correct : pourtant, c'est un très grand classique des annales de tous mes examens !

[1] Attention : il s'agit bien de Donatienne uniquement et pas l'ensemble des deux alpinistes !

2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Une réponse correcte rapporte 4 points, une réponse erronée fait perdre 1 point.
Ne rien cocher ne fait rien gagner et ne fait rien perdre.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !
Gommer pour les corrections !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

Q1

On tire un obus avec un angle d'inclinaison de 45^o. Quelle doit être la norme de sa vitesse initiale afin que l'obus puisse s'élever d'une hauteur de 483.025 m ? On ne tient compte que de la force de gravité avec $g = 10\ m/s^2$.

A $139\ m/s$
B $140\ m/s$
C $2800\ m/s$
D $13.9\ m/s$
E $278\ m/s$

A ■
B □
C □
D □
E □

Q2

Un enfant fait tourner un modèle réduit d'avion sur une trajectoire circulaire en le retenant par une ficelle de longueur R. La norme de la vitesse v de l'avion est constante et la norme de la tension dans la ficelle vaut T. Que vaudra la tension T_* dans la corde, si on réduit la longueur de la ficelle de moitié sans changer la norme de la vitesse de l'avion ?

A $T_* = T$
B $T_* = T/2$
C $T_* = T/4$
D $T_* = 2T$
E $T_* = 4T$

A □
B □
C □
D ■
E □

Q3

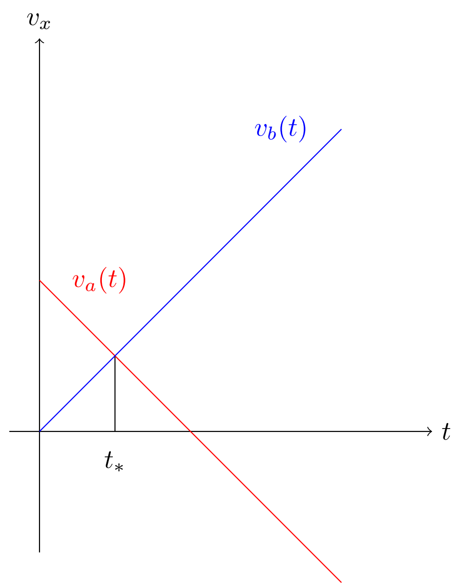
Afin de mettre en mouvement une malle de masse m posée sur le sol, une personne exerce une force F sur cette malle. Malheureusement, la malle reste immobile en raison du frottement. Quelle affirmation est correcte pour la force F_* exercée par la malle sur cette personne ?

A $F_* > F$
B $F_* < F$
C $F_* = F$
D $F_* = \mu_c mg$
E $F_* = \mu_s mg$

A □
B □
C ■
D □
E □

Q4

Deux voitures a et b roulent sur une même route parfaitement rectiligne et alignée avec l'axe x. Dans le graphique, on trace l'évolution de l'unique composante non-nulle des vecteurs vitesse des deux voitures en fonction du temps.



Quelle est l'unique affirmation toujours exacte
quelle que soit la position initiale des voitures ?

A Les deux voitures se croisent en l'instant t_* — **A** ☐
B Les deux voitures roulent toujours en sens inverse. — **B** ☐
C Les deux voitures ne se croisent jamais. — **C** ☐
D La voiture a double la voiture b l'instant t_*. — **D** ☐
E Les deux voitures roulent parfois en sens inverse. — **E** ■

Q5

A l'instant $t = 0$, une masse m est lancée sur une table avec une vitesse v.
A l'instant $t = t_*$, elle s'immobilise en raison du frottement.
Que vaut le coefficient de frottement dynamique μ_c ?

A $\mu_c = \dfrac{v}{2gt_*}$ — **A** ☐

B $\mu_c = m\dfrac{v^2}{gt_*}$ — **B** ☐

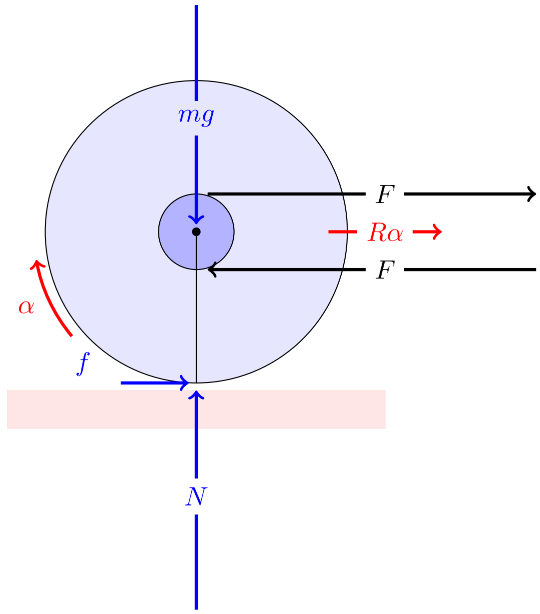
C $\mu_c = m\dfrac{gt_*}{v}$ — **C** ☐

D $\mu_c = \dfrac{v}{gt_*}$ — **D** ■

E $\mu_c = \dfrac{2gt_*}{v}$ — **E** ☐

Q6

Considérons une roue de vélo de rayon R entrainée par le mouvement de la chaine avec un pignon de rayon r. L'inertie de la roue autour de son centre est notée I. Par convention, une valeur positive des accélérations et forces représentées correspond à la donnée telle qu'elle est représentée sur le dessin.



Avec la convention choisie, l'équilibre de rotation s'écrit :

A $I\alpha = 2rF - Rf$
B $I\alpha = 2rF + Rf$
C $I\alpha = rF - Rf$
D $I\alpha = rF + 2Rf$
E $I\alpha = 2RF - rf$

A ■ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

Q7

Avec une vitesse initiale nulle, on lâche une balle d'une hauteur de 5 m sur une planète mystérieuse. La vitesse de la balle vaut 6 m/s lorsqu'elle touche le sol. Que vaut l'accélération gravitationnelle g à cet endroit de la planète ?

A $g = 10$ m/s^2
B $g = 9.81$ m/s^2
C $g = 3.6$ m/s^2
D $g = 1.66$ m/s^2
E $g = 1$ m/s^2

A ☐ B ☐ C ■ D ☐ E ☐

Q8

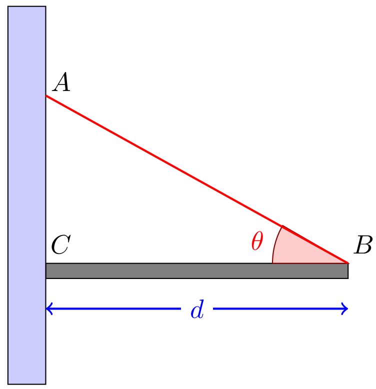
Quelles sont les unités d'une énergie ?

A $kg/\ s^2$
B $kg\ m^2\ /\ s^2$
C $kg\ m\ /\ s^2$
D $N\ s$
E $J\ m$

A ☐ B ■ C ☐ D ☐ E ☐

Q9

Une corde AB et le frottement en C maintiennent immobile une barre CB contre un mur. La barre a une longueur d et une masse m.
La norme de l'accélération de la gravité est $g = 10 m/s^2$.
Le coefficient de frottement statique est $\mu_s = 0.6$.



La force de frottement exercée par le mur sur la barre est :

A $f = \mu_s\ mg$ — **A** ☐

B $f = (1 + \sin\theta)\ mg$ — **B** ☐

C $f = \sin\theta\ mg$ — **C** ☐

D $f = mg/2$ — **D** ■

E $f = \mu_s \sin\theta\ mg$ — **E** ☐

Q10

Un bateau se déplace à une vitesse constante $v = 8$ m/s. Un marin situé sur le bateau lance une balle vers le haut perpendiculairement au mouvement du bateau. Après deux secondes, la balle retombe sur le bateau.
La force de trainée est supposée totalement négligeable !

A Le point de chute se trouve à 8 m du marin vers l'avant du bateau . — **A** ☐
B Le point de chute se trouve à 16 m du marin vers l'avant du bateau. — **B** ☐
C Le point de chute se trouve à 8 m du marin vers l'arrière du bateau. — **C** ☐
D Le point de chute se trouve à 16 m du marin vers l'arrière du bateau. — **D** ☐
E La balle tombe sur la tête du marin :-) — **E** ■

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\ \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\ \frac{d}{dt}\left(I\ \omega\right) &= \sum M_i \end{aligned}$$

Formulaire

Lorsque les forces sont constantes,

$$\begin{aligned} \Delta\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t \\ \Delta\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Mouvement d'un projectile

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$\Delta\overbrace{\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2\right)}^{K} = \sum\overbrace{\vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W}$$

$$= \underbrace{\sum\vec{\mathbf{F}}_{nc}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} - \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r}\Big)$$

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_xF_y - r_yF_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_xF_y - r_yF_x = F\ r_\perp = F_\perp\ r = Fr\sin(\theta)$$

Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$

$$m\ \vec{\mathbf{x}}(t) = \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t)\Big)$$

$$m\ \vec{\mathbf{v}}(t) = \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t)\Big)$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\ r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\ k^2 = \sum m_i\ r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\ h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ \frac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m\ \frac{L^2}{12}$