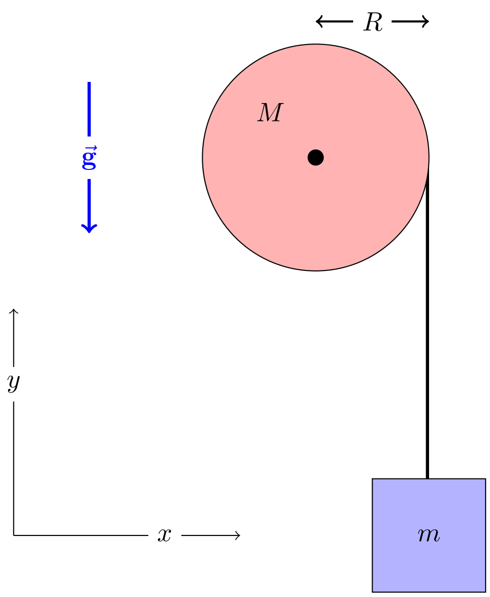
KINE11-EDPH11	
Juin 2018	*Introduction à la mécanique*
IEPR 1011 -Rose-	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

1 Lâchons un bloc...



Considérons un bloc et une poulie qui sont maintenus immobiles jusqu'à l'instant $t = 0$.

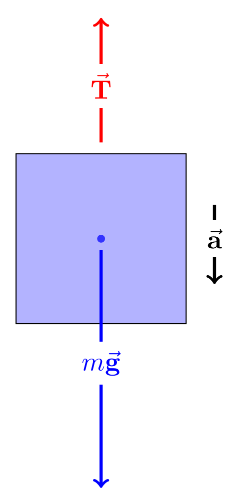
Le bloc a une masse $m = 2$ kg et est suspendu verticalement par une corde qui passe sur la poulie sans glisser. Il n'y a donc aucun frottement dans la poulie. La poulie de masse $M = 4$ kg est un disque plein de rayon $R = 0.5$ m.

A l'instant $t = 0$, on lâche le bloc et on libère la poulie.
En $t = t_*$, le bloc est descendu d'une hauteur $d = 2$ m.

Dans les calculs, on utilisera $g = 10$ m/s^2.
Tous les frottements avec l'air sont négligés.
La masse de la corde est négligeable.

1. Citer et dessiner l'ensemble de toutes les forces sur le bloc pour $t > 0$.
   Y indiquer clairement le nom et la notation habituelle pour chacune des forces.

   Il faut juste considérer la gravité et la force qu'exerce la corde pour retenir le bloc.
   Les deux forces sont pas égales, car le bloc descend et a donc une accélération.
   Toutes les forces sont constantes et donc il s'agit d'un simple MRUA : si, si !



Il faut donc citer :

- *Force de gravité :* $m\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$
- *Force exercée par la corde sur le bloc :* $\vec{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix}$

2. Calculer le moment d'inertie de la poulie.

   Il faut utiliser l'expression du moment d'inertie d'un cylindre plein et on conclut donc.

$$\boxed{I = \frac{MR^2}{2} = 0.5 \text{ kg m}^2}$$

   Noter au passage que cette formule était directement fournie dans le formulaire annexé au questionnaire. Il était donc vraiment impardonnable de ne pas obtenir cette valeur.

3. Obtenir l'expression de l'accélération du bloc pour $t > 0$.

   Il y a deux inconnues a et T dans ce problème : il faudra donc considérer deux équations pour obtenir la solution. Plus concrètement, on considèrera la translation du bloc et la rotation de la poulie. On considère les vecteurs tels que défini lors du dessin pour la première question. Tout d'abord, on obtient l'expression de T en écrivant la conservation de la quantité de mouvement pour le bloc :

$$ma = mg - T$$

$$\downarrow$$

$$T = m(g - a)$$

   Ensuite, on écrit la conservation du moment cinétique pour la poulie, en tenant compte que $\alpha R = a$:

$$\begin{aligned} I\alpha &= TR \\ \frac{MR^2}{2}\,\frac{a}{R} &= m(g-a)\ R \\ \left(\frac{M}{2} + m\right) a &= mg \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$a = \frac{2mg}{M + 2m}$$

   Et on déduit la deux valeur numérique demandée : $\boxed{a = \frac{2 \times 2 \times 10}{4 + 2 \times 2} = 5 \text{ m s}^2}$

   On observe bien que l'accélération du bloc est inférieur à g puisqu'il est partiellement retenu par le fait que la force de gravité doit aussi servir à générer une accélération angulaire pour la poulie.... Une nombre incalculable d'étudiants considèrent juste un bloc en chute libre sans tenir compte de la poulie : est-il réellement possible de faire tout un énoncé avec une poulie et de ne pas du tout en tenir compte ! Oui, on néglige le frottement mais la corde est attachée à la poulie et donc la chute du bloc fait tourner la poulie et il faut donc en tenir compte :-)

4. Quelle est la vitesse du bloc à l'instant t_* ?

   Comme il s'agit d'un MRUA, on peut écrire directement :

$$d = a\,\frac{t_*^2}{2}$$

$$\downarrow$$

$$t_* = \sqrt{\frac{2d}{a}}$$

On conclut donc : $\boxed{v_* = at_* = \sqrt{2da} = 2\sqrt{5} = 4.4721 \text{ m/s}}$

5. Combien de tours[1] a effectué la poulie à cet instant t_* ?

   Il suffit de considérer le déplacement de la corde pour connaître le nombre de tours n_* qu'a effectuées la poulie.

$$2\pi\ n_*\ R = d$$

$$\downarrow$$

$$n_* = \frac{d}{2\pi R}$$

On conclut donc : $\boxed{n_* = \frac{d}{\pi} = 0.63 \text{ tours}}$

   Le nombre de tours n_* peut être obtenu directement en tenant compte du déplacement de la corde, même si aucun des résultats précédents n'a été obtenu. Bien observer qu'il n'est pas nécessaire de connaître la vitesse pour résoudre cette question : il s'agit juste de dérouler la corde sur un cercle ! Beaucoup d'étudiants s'égarent dans des calculs inutiles et incohérents !

[1] On s'attend donc à une valeur non entière en tenant compte des tours partiellement effectués :-)

6. Calculer les valeurs de l'énergie cinétique du bloc et de la poulie à l'instant t_*.

   L'énergie cinétique est donnée par

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}\ m v_*^2 + \frac{1}{2}\ I\omega_*^2 \\
&= \frac{1}{2}\ \left(m v_*^2 + \frac{MR^2}{2}\frac{v_*^2}{R^2} \right) \\
&\Big\downarrow \\
K &= \frac{1}{2}\ \left(m + \frac{M}{2} \right) v_*^2
\end{aligned}
$$

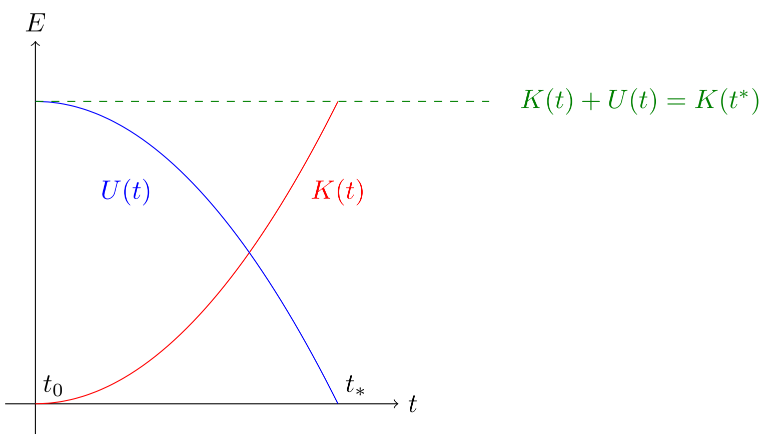
   On conclut donc : $\boxed{K \ = \ \frac{(2 \times 2) \times 20}{2} \ = \ 40 \text{ J}}$

7. Dessiner l'énergie cinétique et potentielle du système composé du bloc et de la poulie en fonction de temps. Par convention, l'énergie potentielle finale en t_* du système sera considérée comme nulle.

   L'évolution temporelle de l'énergie cinétique est donnée par :

$$
K(t) \ = \ \frac{1}{2}\ \left(m + \frac{M}{2} \right) a^2 t^2 \ = \ 10\ t^2
$$

   Comme l'énergie mécanique est conservée, on obtient simplement l'énergie potentielle en écrivant $U(t) = K(t_*) - K(t)$. Cela implique que la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle est une constante qui est l'énergie cinétique finale en t^* puisqu'on obtiendra automatiquement $U(t) + K(t) = K(t^*)$.



   Il est possible de tracer des graphes distincts pour la poulie et le bloc qui auront un aspect parfaitement semblables et identiques : l'énergie potentielle est donc transformée de manière strictement égale en énergie cinétique pour le bloc et la poulie. Ce graphe était vraiment assez simple à obtenir et il est donc assez impardonnable de ne pas obtenir l'allure correcte des deux paraboles. Le graphe n'est pas bien compliqué à obtenir avec un tout petit peu de bon sens physique ! Eviter de bêtement recopier le graphe de l'examen de l'année précédente : c'est très rarement la bonne solution :-(

2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Une réponse correcte rapporte 4 points, une réponse erronée en fait perdre 1 point.
Ne rien cocher ne fait rien gagner et ne fait rien perdre.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !
Gommer pour les corrections !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

Q1

De l'eau coule d'un robinet à la vitesse de 5 gouttes par seconde. Quelle est la distance verticale d séparant deux gouttes consécutives à l'instant où la goutte la plus basse a atteint une vitesse de 3 m/s ?

L'accélération de la gravité est $g = 10$ m/s^2.

A $d = 0.05$ m
B $d = 0.40$ m
C $d = 0.45$ m
D $d = 0.50$ m
E $d = 0.80$ m

A ☐
B ■
C ☐
D ☐
E ☐

Q2

Un gamin lance une balle verticalement vers le haut.
On néglige les frottements de l'air.
Quelles sont les forces agissant sur la balle lors de sa montée ?

A Uniquement, la gravité.
B Uniquement, une force verticale constante qui maintient le mouvement.
C Uniquement, une force verticale croissante qui maintient le mouvement.
D La gravité et une force verticale croissante qui maintient le mouvement.
E La gravité et une force verticale décroissante qui maintient le mouvement.

A ■
B ☐
C ☐
D ☐
E ☐

Q3

A l'instant $t = 0$, le chauffeur d'un camion roulant à 16 m/s aperçoit soudain un caribou immobile à 70 m devant lui. Pour éviter le caribou, le chauffeur freine à fond sans donner de coup de volant et le caribou reste pétrifié face à son destin. On suppose que le temps de réflexe du chauffeur est de 0.5 s et la décélération due au freinage sera d'une valeur constante de $a = 8$ m/s^2.

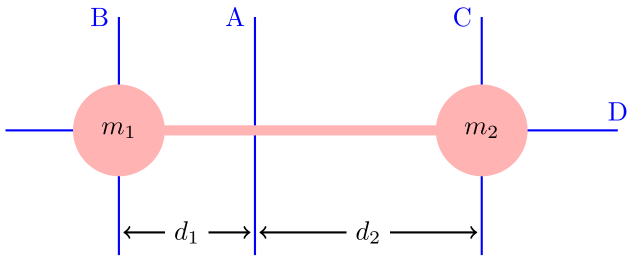
Estimer la distance totale d parcourue par le camion entre l'instant $t = 0$ et l'arrêt complet du véhicule.

A $d = 97.5$ m : le caribou est dans le paradis des animaux.
B $d = 80.0$ m : le caribou est dans le paradis des animaux.
C $d = 71.3$ m : le caribou est légèrement blessé !
D $d = 24.0$ m : le caribou est sauf !
E $d = 16.0$ m : le caribou est sauf !

A ☐
B ☐
C ☐
D ■
E ☐

Q4

Considérons une haltère composé de deux sphères de même rayon $r = 0.01$ m et des masses $m_1 = 3$ kg et $m_2 = 5$ kg et d'une barre de masse négligeable. On calcule les moments d'inertie I_A, I_B, I_C et I_D par rapport aux quatre axes indiqués sur la figure. Les distances sont $d_1 = 0.1$ m et $d_2 = 0.2$ m



Quelle est l'unique affirmation exacte?

A $I_D < I_C < I_B < I_A$ — A ☐
B $I_C < I_B < I_D < I_A$ — B ☐
C $I_B < I_D < I_A < I_C$ — C ☐
D $I_D < I_A < I_C < I_B$ — D ■
E $I_B = I_C$ — E ☐

Q5

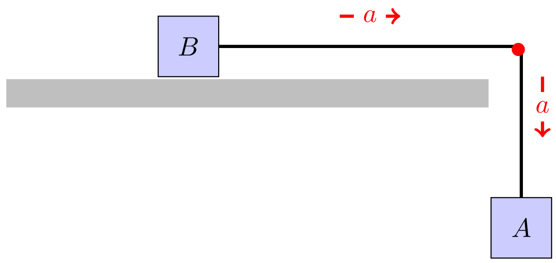
En 2012, Felix Baumgartner a réussi le plus haut saut en chute libre jamais réalisé à l'époque, depuis une altitude de 39 000 m. Il a atteint une vitesse limite $v = 1\ 350$ km/h, enregistrée à une altitude de 12 500 m.

A quelle vitesse v se serait-il écrasé sur terre s'il n'avait pas eu de parachute ?

A $v = 122$ m/s — A ☐
B $v = 375$ m/s — B ■
C $v = 625$ m/s — C ☐
D $v = 708$ m/s — D ☐
E $v = 883$ m/s — E ☐

Q6

Un bloc A est suspendu par une corde à un bloc B via une poulie.
Lorsqu'on lâche le bloc A, on observe que la norme des accélérations des deux blocs est identique. Les deux blocs ont le même masse $m = 2$ kg.
L'accélération de la gravité est donnée par $g = 9.81$ m/s^2.



Il n'y a aucun frottement.
La masse de la corde est négligeable.

La norme de la force F qu'exerce la corde sur le bloc B est donnée par :

A $F = 39.24$ N
B $F = 19.62$ N
C $F = 9.81$ N
D $F = 4.905$ N
E $F = 2.4525$ N

A ☐
B ☐
C ■
D ☐
E ☐

Q7

Le moment d'inertie d'une sphère pleine de masse m et rayon R tournant autour de son centre est donné par l'expression :

$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

Cette sphère part du repos à une hauteur $y = h$ et roule sans glisser le long d'un plan incliné sous l'effet de la gravité.
Quelle sera la vitesse de translation v du centre de la sphère en bas du plan incliné en $y = 0$?

A $v = \sqrt{\dfrac{10\ gh}{7}}$

B $v = \sqrt{\dfrac{10\ gh}{5}}$

C $v = \sqrt{\dfrac{mgh}{2}}$

D $v = \sqrt{\dfrac{7\ R^2 gh}{10}}$

E $v = \sqrt{\dfrac{7\ gh}{10}}$

A ■
B ☐
C ☐
D ☐
E ☐

Q8

Le moment cinétique d'un corps rigide tournant autour d'un axe fixe est donné par le produit entre son moment d'inertie I et sa vitesse angulaire ω :

$$L = I\omega$$

Quelles sont les unités de ce moment cinétique ?

A kg m / s^2 — A ☐
B kg m^2 / s^2 — B ☐
C kg m^2 / s^3 — C ☐
D N m / s — D ☐
E N m s — E ■

Q9

Lorsque l'on quitte la surface de la Terre, l'accélération gravitationnelle varie avec l'altitude à laquelle se trouve un corps:

$$g = \frac{GM}{h^2}$$

où G est une constante, M la masse de la Terre et h est la distance séparant le corps du centre de la Terre. En 2018, Elon Musk a mis son cabriolet Tesla Spider en orbite autour de la Terre. Sa voiture de masse m est en orbite circulaire stable à une distance h du centre de la Terre et avec une vitesse de norme constante v.

Comment peut-on obtenir la vitesse orbitale v ?

A $v = \sqrt{\frac{2GM}{h}}$ — A ☐

B $v = \sqrt{\frac{GM}{h^2}}$ — B ☐

C $v = \sqrt{\frac{GMm}{h}}$ — C ☐

D $v = \sqrt{\frac{GM}{h}}$ — D ■

E $v = \sqrt{\frac{GM}{mh}}$ — E ☐

Q10

Considérons le mouvement d'un point matériel.
Quelle est l'unique affirmation correcte ?

A Le vecteur accélération est toujours perpendiculaire au vecteur vitesse. — A ☐
B Le vecteur accélération n'est jamais parallèle au vecteur vitesse. — B ☐
C Le vecteur accélération est toujours parallèle au vecteur vitesse. — C ☐
D Le vecteur accélération est toujours tangent à la trajectoire. — D ☐
E La vitesse peut être nulle alors que l'accélération ne l'est pas. — E ■

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

Formulaire

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i\\ \frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i\\ \frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) &= \sum M_i\end{aligned}$$

Lorsque les forces sont constantes,

$$\begin{aligned}\Delta\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t\\ \Delta\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

Mouvement d'un projectile

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix}\\ \vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix}\\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix}\\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$\begin{aligned}
\Delta\overbrace{\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2\right)}^{K} &= \sum\overbrace{\vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W} \\
&= \sum\underbrace{\vec{\mathbf{F}_{nc}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} \quad - \quad \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r}\Big)
\end{aligned}$$

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_xF_y - r_yF_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_xF_y - r_yF_x = F\ r_\perp = F_\perp\ r = Fr\sin(\theta)$$

Ensemble de particules : un corps !

$$\begin{aligned}
m &= \sum m_i \\
m\ \vec{\mathbf{x}}(t) &= \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t)\Big) \\
m\ \vec{\mathbf{v}}(t) &= \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t)\Big)
\end{aligned}$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\ r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\ k^2 = \sum m_i\ r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\ h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ \dfrac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m\ \dfrac{L^2}{12}$