KINE11-EDPH11	
Juin 2019	*Introduction à la mécanique*
IEPR 1011 -Rose-	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

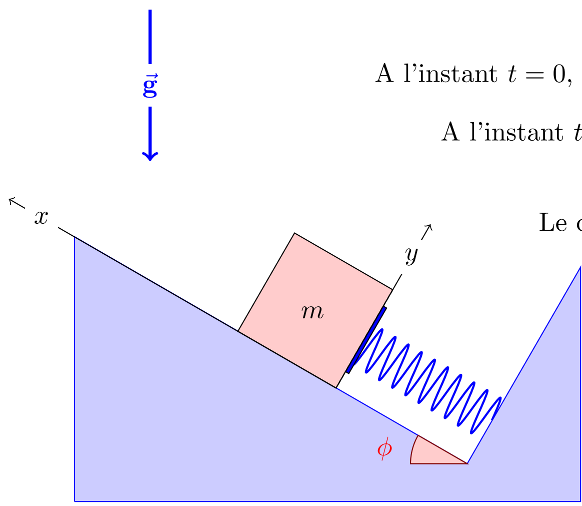
1 Un gros bloc sur un ressort comprimé...

Sur un sol incliné avec un angle $\phi = 30^o$, un bloc de masse $m = 0.2$ kg est maintenu sur un ressort comprimé d'une distance $d = 0.25$ m par rapport à sa longueur au repos sans la présence du bloc.

A l'instant $t = 0$, le bloc est lâché et s'élève sous l'effet du ressort qui se dilate.

A l'instant $t = t^*$, le bloc se sépare du ressort qui a sa longueur au repos. De manière plus mathématique, $x(t^*) = d$.

Le coefficient de frottement dynamique bloc-sol est $\mu_c = 0.2/\sqrt{3}$. Le coefficient de raideur du ressort est $k = 16$ N/m. Dans les calculs, on utilisera $g = 10$ m/s^2.



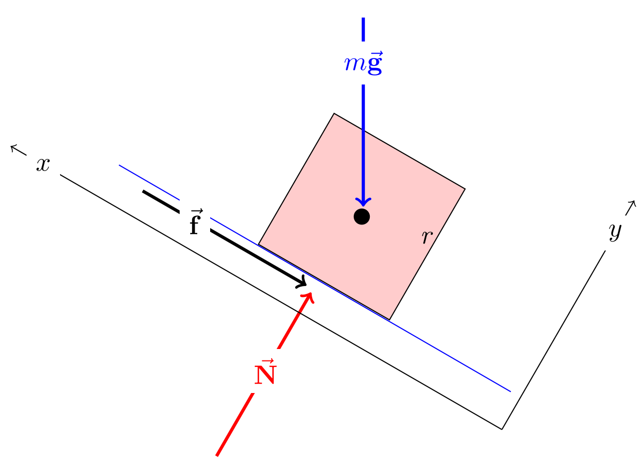
1. Citer et dessiner l'ensemble de toutes les forces sur le bloc pour $t > t^*$.
   Y indiquer clairement le nom et la notation habituelle pour chaque force.

   Il faut juste considérer la gravité, la force normale de réaction du sol sur la roue et le frottement. Il est admis de considérer une seule force de réaction globalisant la composante normale et le frottement et d'effectuer la suite de l'exercice en utilisant les deux composantes de la réaction globale du sol sur le bloc.
   Attention, comme le bloc n'est plus en contact avec le ressort : il n'y a pas de force due au ressort.

   Le bloc est désolidarisé du ressort et commence à ralentir sous l'effet de la gravité et du frottement. Comme ces deux dernières forces sont constantes car il s'agit d'un simple MRUA : si, si !

Il faut donc citer :

- *Force de gravité :* $m\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} -mg\sin(\phi) \\ -mg\cos(\phi) \end{bmatrix}$
- *Force de réaction normale du sol :* $\vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0 \\ mg\cos(\phi) \end{bmatrix}$
- *Force de frottement :* $\vec{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} -f \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu mg\cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix}$



2. Quelle est l'accélération du bloc lorsqu'il vient juste de se séparer du ressort ?

   Il suffit d'écrire l'équation de mouvement pour la composante x de l'accélération :

$$ma_x = -mg\sin(\phi) - \mu_c mg\cos(\phi)$$

$$\downarrow$$

$$a_x = -g\left(\frac{1}{2} - \frac{0.2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

   Et on déduit la valeur numérique demandée : $\boxed{a_x = -0.6\ g = -6\ \mathrm{m/s^2}}$

   On obtient bien une valeur négative puisque le bloc commence à ralentir.
   Le bloc subit donc bien une décélération.

3. Quelle est la vitesse du bloc lorsque ce dernier se sépare du ressort en $t = t^*$?

   Pour obtenir cette vitesse, il est vraiment très fortement conseillé d'utiliser un bilan d'énergie, car le mouvement du bloc pour $t \in [0, t^*]$ n'est pas un MRUA, car la force due au ressort n'est pas constante. Un tel mouvement serait donc assez compliqué à déterminer, quoique cela ne soit pas impossible toutefois : il faudrait juste faire appel aux fonctions trigonométriques... pour le décrire. Aucun étudiant n'a obtenu le résultat correct de cette manière toutefois :-(

   Le bilan d'énergie entre les situations $t = 0$ et $t = t^*$ s'écrit comme suit :

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}kd^2 - dmg\sin(\phi) - d\mu_c mg\cos(\phi)$$

$$\downarrow$$

$$v^2 = \frac{kd^2}{m} - 2gd\Big(\sin(\phi) + \mu_c\cos(\phi)\Big)$$

$$v^2 = \underbrace{5 - 5\times 0.6}_{=2}$$

   La vitesse peut alors être immédiatement déduite : $\boxed{v = \sqrt{2} = 1.41\ \mathrm{m/s}}$

4. Quelle est la position x_m la plus élevée que va atteindre le bloc sur la plan incliné ?

   Entre $t = t^*$ et $t = t_m$, la décélération du bloc est constante et on peut donc utiliser les relations bien connues du MRUA ! Le bloc atteint la position x_m à t'instant $t = t_m$, lorsque sa vitesse s'annule. En d'autres mots, on peut écrire que : $t_m a = v$ avec $a = 6\mathrm{m/s^2}$. On en déduit ensuite la position demandée, en écrivant tout simplement :

$$x_m - d \quad = \quad \tfrac{1}{2}\, t_m^2 \; a \quad = \quad \tfrac{1}{2}\, \frac{v^2}{a^2} \; a$$

$$\downarrow$$

$$x_m \quad = \quad d + \frac{v^2}{2a}$$

La position atteinte est donc : $\boxed{x_m \quad = \quad \frac{1}{4} + \frac{2}{12} \quad = \quad \frac{5}{12} \quad = \quad 0.42 \text{ m}}$

Il fallait tenir compte que le ressort occupait déjà la position $x(t^*) = d$, au début du mouvement. Toutefois, le correcteur est en général honteusement indulgent si vous oubliez de tenir compte de cela et si le reste de votre raisonnement est correct :-)

Le même résultat pourrait aussi être obtenu en faisant un bilan d'énergie entre l'énergie cinétique annihilée par le travail des deux forces qui ralentissent le bloc.

$$\tfrac{1}{2}mv^2 \quad = \quad (x_m - d)\ \Big(mg\sin(\phi) + d\mu_c mg\cos(\phi)\Big)$$

$$\downarrow$$

$$xm \quad = \quad d + \frac{2}{gv^2\Big(\sin(\phi) + \mu_c\cos(\phi)\Big)}$$

$$x_m \quad = \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{10 \times 0.6} \quad = \quad \frac{5}{12}$$

Les deux démarches sont évidemment admises par le correcteur !

5. Que devrait être le coefficient de frottement statique μ_s minimal nécessaire pour que le bloc ne bouge pas lorsqu'on le libère en $t = 0$?

   Pour que le bloc ne bouge pas en $t = 0$, la force du ressort qui peut propulser le bloc doit être exactement compensée par les deux forces qui s'opposent au mouvement : la composante en x de la force de gravité et le frottement statique !

$$kd \quad = \quad mg\sin(\phi) + \mu_s mg\cos(\phi)$$

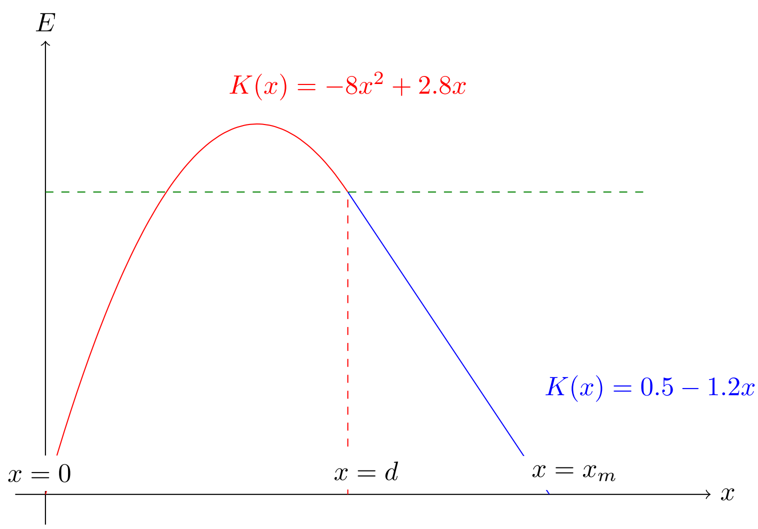
$$\downarrow$$

$$\mu_s \quad = \quad \frac{kd - mg\sin(\phi)}{mg\cos(\phi)}$$

Le coefficient de frottement statique minimal vaut donc : $\boxed{\mu_s \quad = \quad \frac{4-1}{2\sqrt{3}/2} \quad = \quad \sqrt{3} \quad = \quad 1.73}$

6. Dessiner l'énergie cinétique du bloc en fonction de sa position $x \in [0, x_m]$.
Indiquer clairement ce qui change lorsque $x = d$.

L'énergie cinétique du bloc est nulle en $x = 0$ et $x = x_m$, car la vitesse du bloc est nulle pour ces deux positions. Il est aussi évident que l'énergie cinétique du bloc sera élevée en $x = d$ lorsque le bloc se désolidarise du ressort et va ensuite ralentir sous l'effet de la gravité et du frottement. En réalité, il commence à ralentir plus tôt dès que la force du ressort est inférieure à la combinaison de la force de gravité et de la force du frottement : le maximum doit donc se trouver dans l'intervalle $[0, d]$.



Ce graphe était assez simple à obtenir et pouvait être assez rapidement déduit. Le correcteur a été particulièrement indulgent pour les étudiants qui avaient une parabole un peu étrange : l'essentiel était d'indiquer que l'énergie cinétique était nulle en $x = 0$ et $x = x_m$ et qu'elle atteignait son maximum en un point plausible ou proche de $x = d$ pour obtenir la satisfaction de l'enseignant. Il faut un peu réfléchir au sens physique du problème pour obtenir le graphe avec un peu d'intuition !

Bien que cela ne soit pas formellement demandé, on peut toujours vérifier l'allure du graphe en écrivant formellement l'expression de l'énergie cinétique en fonction de x. Pour les abscisses $x \in [0, d]$, l'évolution de l'énergie cinétique est donnée par une parabole car la force du ressort n'est pas constante mais est une fonction linéaire de x.

$$K(x) \quad = \quad \tfrac{1}{2}kd^2 - \tfrac{1}{2}k(x-d)^2 - mg\Big(\sin(\phi) + \mu_s mg\cos(\phi)\Big)x \;=\; 0.5 - 8(x - 0.25)^2 - 1.2x$$

Par contre, l'évolution est linéaire est linéaire pour les abscisses $x \in [d, x_m]$, car le mouvement se fait à accélération constante :-)

$$K(x) \quad = \quad \tfrac{1}{2}kd^2 - mg\Big(\sin(\phi) + \mu_s mg\cos(\phi)\Big)x \;=\; 0.5 - 1.2x$$

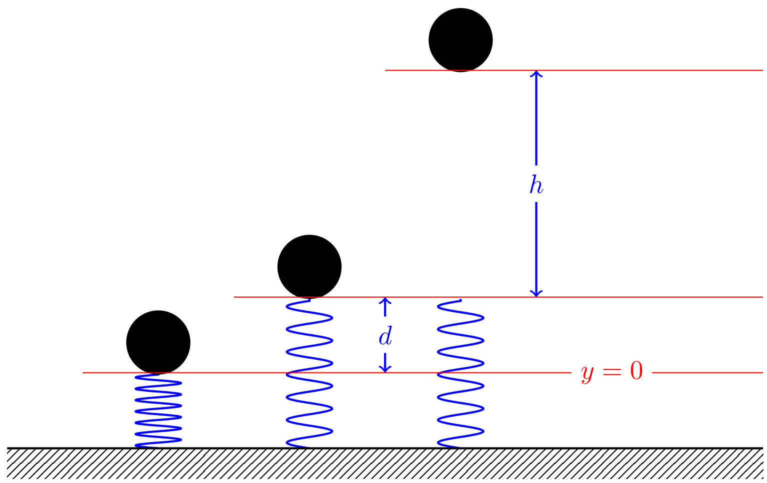
On peut bien observer que $K(0) = K(x_m) = 0$ et $K(d) = 0.2$..

2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Une réponse correcte rapporte 4 points, une réponse erronée en fait perdre 1 point.
Ne rien cocher ne fait rien gagner et ne fait rien perdre.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !
Gommer pour les corrections !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

Q1

Une bille de masse m se trouve sur un ressort avec une constante de raideur k.
Le ressort est comprimé d'une distance d par rapport à son état au repos.
A l'instant $t = 0$, on relâche le ressort qui va propulser la bille.
Lorsque la bille se désolidarise du ressort, le ressort a sa longueur au repos.
La bille s'élève ensuite d'une hauteur h avant de retomber.



Quelle vaut la constante de raideur du ressort ?

A $k = \dfrac{mg}{2d}$ — **A** ☐

B $k = \dfrac{2mg(h+d)}{d^2}$ — **B** ■

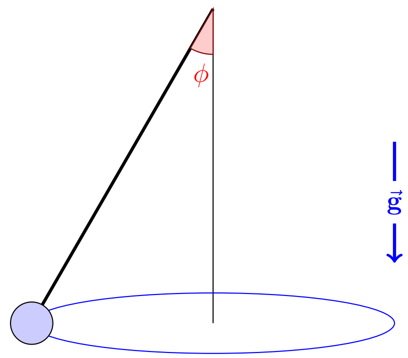
C $k = \dfrac{2mg}{d}$ — **C** ☐

D $k = \dfrac{mg}{2(h+d)}$ — **D** ☐

E $k = \dfrac{2mgd}{(h+d)^2}$ — **E** ☐

Q2

Une boule d'une masse m est suspendue à un fil de longueur L tourne sur un cercle horizontal avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical. L'angle entre la direction verticale et la corde vaut ϕ.



Quelle est la vitesse angulaire ω de la masse m ?

A $\omega = \sqrt{\dfrac{mg}{L\cos(\phi)}}$ — **A** ☐

B $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L\sin(\phi)}}$ — **B** ☐

C $\omega = \sqrt{\dfrac{L}{mg\cos(\phi)}}$ — **C** ☐

D $\omega = \sqrt{\dfrac{g\cos(\phi)}{L}}$ — **D** ☐

E $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L\cos(\phi)}}$ — **E** ■

Q3

Considérons une roue de rayon R avec une masse m et un moment d'inertie I par rapport au centre de masse. Si la vitesse du centre de masse et la vitesse angulaire de rotation sont v et ω respectivement, l'énergie cinétique de cette roue qui roule sans glisser est donnée par :

A $K = \dfrac{I\omega^2}{2}$ — **A** ☐

B $K = \left(m + IR^2\right)\dfrac{v^2}{2}$ — **B** ☐

C $K = \left(mR^2 + I\right)\dfrac{\omega^2}{2}$ — **C** ■

D $K = \dfrac{mv^2}{2}$ — **D** ☐

E $K = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{mR^2\omega^2}{2}$ — **E** ☐

Q4

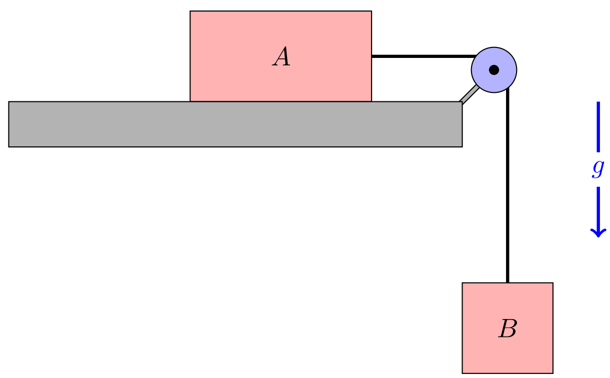
Un objet a une masse de 80 grammes.
Quelle est la force de gravité F qui s'applique sur cet objet si l'accélération de la gravité est $g = 10\ m/s^2$?

A $F = 0.08$ N
B $F = 0.8$ N
C $F = 8$ N
D $F = 80$ N
E $F = 800$ N

A ☐
B ■
C ☐
D ☐
E ☐

Q5

Un bloc B est suspendu par une corde de masse négligeable à un autre bloc A qui glisse sans frottement sur le sol.
La corde coulisse sans frottement sur la poulie dont on néglige l'inertie.
Les masses des deux blocs sont notées m_A et m_B respectivement.



Quelle est la norme de l'accélération a qui fait chuter le bloc B ?

A $a = g\,\dfrac{m_B}{(m_A + m_B)}$

B $a = g\,\dfrac{m_A}{(m_A + m_B)}$

C $a = g\,\dfrac{(m_A - m_B)}{(m_A + m_B)}$

D $a = g\,\dfrac{(m_A + m_B)}{(m_A - m_B)}$

E $a = g\,\dfrac{m_B}{m_A}$

A ■
B ☐
C ☐
D ☐
E ☐

Q6

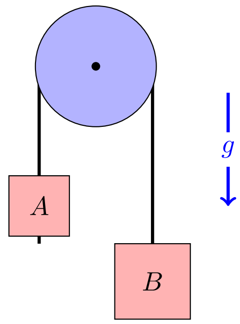
Quelles sont les unités du moment d'une force ?

A $kg\ m^2\ /\ s^2$
B $kg\ m^2\ /\ s$
C $kg\ m$
D $N\ m^2$
E $N\ m\ s^2$

A ■
B ☐
C ☐
D ☐
E ☐

Q7

Deux blocs de masse $m_A < m_B$ respectivement sont reliés entre eux par une corde passant sur une poulie accrochée au plafond.
On néglige l'inertie de la poulie ainsi que la masse de la corde.



Quelle est l'amplitude de l'accélération des deux masses ?

A $a = g\,\dfrac{m_B}{(m_A + m_B)}$ — **A** ☐

B $a = g\,\dfrac{(m_A + m_B)}{(m_B - m_A)}$ — **B** ☐

C $a = g\,\dfrac{(m_B - m_A)}{(m_A + m_B)}$ — **C** ■

D $a = g\,\dfrac{m_A}{m_B}$ — **D** ☐

E $a = g\,\dfrac{m_B}{m_A}$ — **E** ☐

Q8

La position d'un coureur en fonction du temps est donnée par l'expression:

$$x(t) = t^3 - 4t^2 + 2t + 3$$

où x est exprimé en mètres et t en secondes.
Quelle est l'accélération du coureur lorsque $t = 5$ s ?

A $a(5) = 0\ m/s^2$ — **A** ☐
B $a(5) = 7\ m/s^2$ — **B** ☐
C $a(5) = 15\ m/s^2$ — **C** ☐
D $a(5) = 22\ m/s^2$ — **D** ■
E $a(5) = 35\ m/s^2$ — **E** ☐

Q9

On souhaite calculer $\vec{\mathbf{M}}$ le vecteur moment d'une force $\vec{\mathbf{F}}$ avec un bras de levier $\vec{\mathbf{r}}$, sachant que ces deux derniers vecteurs forment un angle θ entre eux. Les symboles F et r dénotent les amplitudes de $\vec{\mathbf{F}}$ et $\vec{\mathbf{r}}$ respectivement.

Quelle est l'unique expression exacte ?

A $\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{F}}$ — **A** ☐

B $\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{F}} \times \vec{\mathbf{r}}$ — **B** ☐

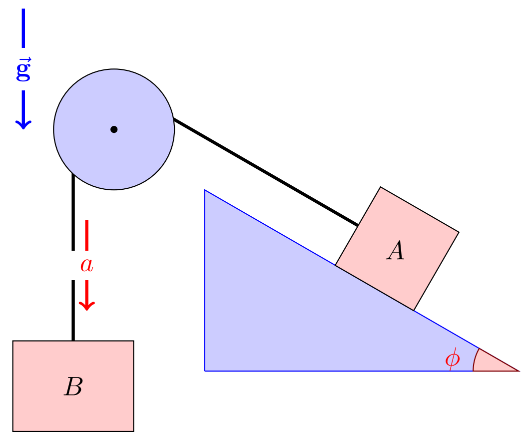
C $\vec{\mathbf{M}} = rF\cos(\theta)$ — **C** ☐

D $\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$ — **D** ■

E $\vec{\mathbf{M}} = rF\sin(\theta)$ — **E** ☐

Q10

Deux blocs sont reliés entre eux par une corde passant sur une poulie accrochée au plafond. Le bloc A glisse sur un plan incliné avec un angle $\phi = 30^o$ avec un coefficient de frottement cinétique $\mu_c = 0.5$.
Les deux blocs sont initialement au repos. On lâche le bloc B en $t = 0$.
Les masses $m_A > m_B$ des deux blocs sont données en kilogrammes.
On néglige l'inertie de la poulie ainsi que la masse de la corde.



Quelle distance d (en mètres) le corps A aura-t-il parcouru en $t = 2$ s ?

A $d = g\,\dfrac{(m_B - m_A/2 - m_A\sqrt{3}/2)}{(m_A + m_B)}$ — **A** ☐

B $d = g\,\dfrac{(m_B - m_A)}{(m_A + m_B)}$ — **B** ☐

C $d = g\,\dfrac{(2m_B - m_A\sqrt{3}/2)}{(m_A + m_B)}$ — **C** ☐

D $d = g\,\dfrac{(2m_B - m_A\mu_c\sqrt{3}/2)}{(m_A + m_B)}$ — **D** ☐

E $d = g\,\dfrac{(2m_B - m_A - m_A\sqrt{3}/2)}{(m_A + m_B)}$ — **E** ■

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(m\,\vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\ \frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\,v^2 + \tfrac{1}{2}I\,\omega^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\ \frac{d}{dt}\Big(I\,\omega\Big) &= \sum M_i \end{aligned}$$

Formulaire

Lorsque les forces sont constantes,

$$\begin{aligned} \Delta\Big(m\,\vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t \\ \Delta\Big(\tfrac{1}{2}m\,v^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Mouvement d'un projectile

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\, t^2}{2}$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$\Delta \overbrace{\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2\right)}^{K} = \sum \overbrace{\vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W}$$

$$= \sum \underbrace{\vec{\mathbf{F}}_{nc} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} \quad - \quad \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r} \Big)$$

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_xF_y - r_yF_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_xF_y - r_yF_x = F\ r_\perp = F_\perp\ r = Fr\sin(\theta)$$

Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$

$$m\ \vec{\mathbf{x}}(t) = \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t) \Big)$$

$$m\ \vec{\mathbf{v}}(t) = \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t) \Big)$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\ r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\ k^2 = \sum m_i\ r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\ h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution	$I = m\ R^2$
Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution	$I = m\ \dfrac{R^2}{2}$
Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central	$I = m\ \dfrac{L^2}{12}$