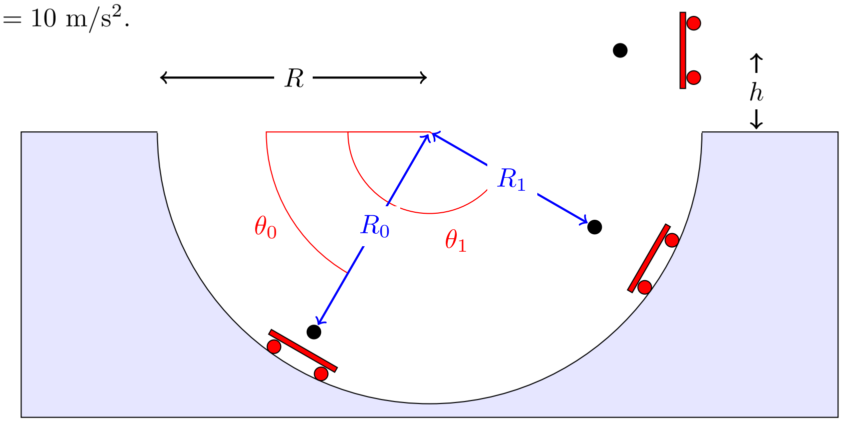
KINE11-EDPH11	
Juin 2021	*Introduction à la mécanique*
IEPR 1011 -Rose-	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

1 La figure du half-pipe du skater !

Dans cette figure, le skater illustre parfaitement la conservation de l'énergie mécanique si on néglige tous les frottements. En partant du sommet gauche et en conservant une même posture sur sa planche, le skater remontera à la même hauteur du côté droit. C'est élémentaire et pourtant !

En réalité, le skater effectue un mouvement de pompage pour augmenter son énergie cinétique et pourra monter ainsi plus haut à chaque oscillation... Schématiquement, il descend en position accroupie et monte en levant les bras en l'air et se dressant sur ses deux jambes tendues. Il tire profit de la conservation du moment cinétique lorsqu'il se redresse sur sa planche pour augmenter son énergie mécanique[1] !

Toute la masse $m = 60$ kg du skater et de sa planche sera supposée être localisée au centre de masse.
Accroupi, le centre de masse du skater se trouve à une distance $R_0 = 2.2$ m du centre du half-pipe. Redressé, cette distance se réduit à $R_1 = 2$ m.
Le rayon du halfpipe est $R = 3$ m.
Tous les frottements sont négligés.
Dans les calculs, on utilisera $g = 10$ m/s^2.

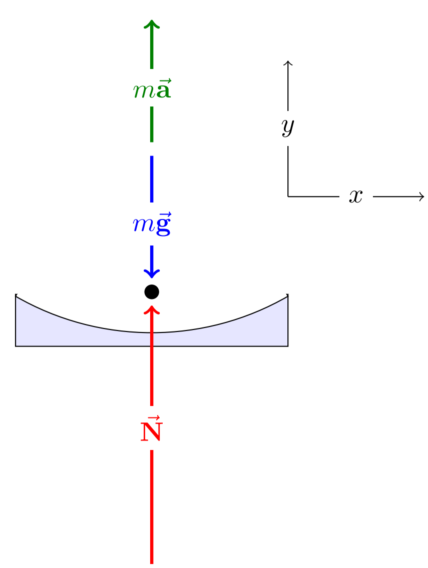


1. Citer et dessiner l'ensemble de toutes les forces agissant le skater lorsque $\theta = 90^o$.

Il faut uniquement citer :

- *Force de gravité :* $m\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$
- *Force de réaction normale du sol :* $\vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0 \\ m(g+a) \end{bmatrix}$

Ici, on peut immédiatment observer que l'accélération est purement centripète et est égale à la différence de la réaction du sol et de la gravité :-)



[1]... et aussi compenser les pertes dues au frottement qui est bien présent dans le monde réel :-)

Il était clairement indiqué dans l'énoncé, qu'il n'y a pas de frottement.
Et donc, il ne faut pas citer, ni indiquer de forces de frottement !

En l'absence de frottement, il n'y a aucune composante tangentielle à l'accélération.
Beaucoup d'étudiants indiquent une accélération purement tangentielle : ils indiquent ainsi, de manière spontanée et stupide, une information erronnée alors que cela n'était pas demandé :-(
Parfois, s'abstenir d'écrire une bétise est une sage décision.

Cette question est très proche de l'expérience du saut d'eau que l'enseignant fait tourner ou de l'essoreuse à salade au passage ! Et pourtant, très peu d'étudiants ont réussi à tracer correctement les deux forces en indiquant que l'amplitude de la réaction du sol est toujours supérieure à la force de gravité. Beaucoup d'étudiants estiment que l'amplitude des deux forces sont identiques.
Bad trip !

2. Que vaut l'accélération centripète à cet instant lorsque le skater est accroupi ?

Il suffit de faire un bilan d'énergie entre le point de départ
et la position centrale accroupie du skater où il aura une vitesse v_0.
A cet instant, son centre de gravité est descendu d'une hauteur R_0 par rapport à point de départ.
Attention, il s'agit bien de R_0 et pas de R, car on s'intéresse on centre de gravité du skater !

$$m\frac{v_0^2}{2} = mgR_0$$

$$\downarrow$$

$$v_0^2 = 2gR_0$$

Et on en déduit l'accélération centripète à cet instant : $\boxed{a_0 = \frac{v_0^2}{R_0} = 2g = 20 \text{ m/s}^2}$

3. Quel est le gain d'énergie cinétique obtenu lorsque le skater se redresse ?
Exprimer ce gain en terme de pourcentage en effectuant le rapport des énergies cinétiques.

L'énoncé fournissait directement la manière de trouver la solution : il faut faire un bilan de moment cinétique ! A cet instant, toutes les forces sont radiales et leur moment est nul : le moment cinétique doit donc rester constant pour le skater accroupi ou relevé. En se relevant, le skater va réduire son moment inertie et donc augmenter sa vitesse. C'est l'exemple de la danseuse qui étend ses bras pour ralentir sa vitesse de rotation ou qui les met le long de son corps pour tourner plus vite !

On écrit donc simplement la conservation du moment cinétique du skateur dans les deux positions en notant v_1 la vitesse obtenue lorsqu'il s'est relevé :-)

$$mR_1^2\omega_1 = mR_0^2\omega_0$$

$$mR_1v_1 = mR_0v_0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{R_0}{R_1}$$

Comme $K = m\frac{v^2}{2}$, on en déduit : $\boxed{\frac{K_1}{K_0} = \frac{v_1^2}{v_0^2} = \frac{R_0^2}{R_1^2} = \left[\frac{2.2}{2}\right]^2 = 1.21}$

Le gain en pourcentage d'énergie cinétique est donc de 21% !

4. Que vaut l'accélération centripète juste après lorsque le skater vient de se redresser ?

On écrit simplement l'expression de a_1 !

$$a_1 = \frac{v_1^2}{R_1}$$

$$a_1 = \frac{v_0^2}{R_1}\frac{R_0^2}{R_1^2}$$

$$\downarrow$$

$$a_1 = \frac{v_0^2}{R_0}\frac{R_0^3}{R_1^3} = a_0\left[\frac{R_0}{R_1}\right]^3$$

Et on en déduit l'accélération centripète du skater redressé : $\boxed{a_1 = 20\underbrace{\left[\frac{2.2}{2}\right]^3}_{1.331} = 26.62 \text{ m/s}^2}$

5. Quel est la hauteur h atteinte par le skater après un unique passage ?

A nouveau, il suffit de faire un bilan d'énergie entre le point le plus haut avec une vitesse nulle n et la position centrale relevée du skater où il a une vitesse v_1. Au point le plus haut, son centre de gravité se sera élevé d'une hauteur $R_1 + h$ par rapport à la position centrale. Attention, il s'agit maintenant de R_1 et pas de R, ni R_0, car on s'intéresse on centre de gravité du skater redressé !

$$m\frac{v_1^2}{2} = mg(R_1 + h)$$

$$\downarrow \quad \textit{Car on avait obtenu } \frac{v_1^2}{v_0^2} = \frac{R_0^2}{R_1^2} \textit{ dans la sous-question 3 :-)}$$

$$\frac{v_0^2}{2}\frac{R_0^2}{R_1^2} = g(R_1 + h)$$

$$\downarrow \quad \textit{Car on avait obtenu } v_0^2 = 2gR_0 \textit{ dans la sous-question 1 :-)}$$

$$gR_0\frac{R_0^2}{R_1^2} = g(R_1 + h)$$

$$\frac{R_0^3 - R_1^3}{R_1^2} = h$$

On obtient donc : $\boxed{h = \frac{[2.2]^3 - 8}{4} = 0.662 \text{ m}}$

6. En effectuant plusieurs va et vient que le skater pourrait-il monter aussi haut qu'il le souhaite ? Quelle serait la hauteur maximale théorique h_{max} atteinte par un skater très doué, sachant qu'un athlète averti ne pourra se redresser si la gravité apparente est supérieur à 4.5 g ?

   Si l'accélération maximale supportée vaut 4.5 g, on peut facilement en déduire la vitesse maximal à partir de l'expression de l'accélération centripète et ensuite la hauteur maximale que le skateur pourrait atteindre. Tout d'abord, il faut donc écrire :

$$4.5\ g \ = \ a_{max} \ = \ \frac{v_{max}^2}{R_1}$$

   où on considère le cas du skateur qui s'est redressé dans la position centrale. C'est bien le moment où l'accélération ressentie par le skateur est maximal. On peut ensuite en déduire la hauteur maximale en faisant encore et à nouveau un bilan d'énergie mécanique.

$$\begin{aligned} m\frac{v_{max}^2}{2} &= mg(R_1 + h_{max}) \\ &\Big\downarrow \quad \textit{En sachant que } v_{max}^2 \ = \ 4.5\ gR_1 \\ 2.25\ gR_1 &= g(R_1 + h_{max}) \\ 1.25\ R_1 &= h_{max} \end{aligned}$$

On obtient donc : $\boxed{h_{max} \ = \ 1.25 \times 2 \ = 2.5 \text{ m}}$

2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Ne pas répondre ou cocher une réponse erronée ne fait rien perdre.
Par contre, il faut répondre correctement à six questions pour réussir cette partie.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !
Gommer pour les corrections !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !
N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique

Q1

Un phénomène se reproduit identiquement à lui-même toutes les 4 secondes.
Quelle est sa fréquence f ?

A $f = 0.25\ \mathrm{s}^{-1}$ — A ■
B $f = 0.25$ s — B □
C $f = 4\pi$ Hertz — C □
D $f = 4$ Hertz — D □
E $f = 4$ s — E □

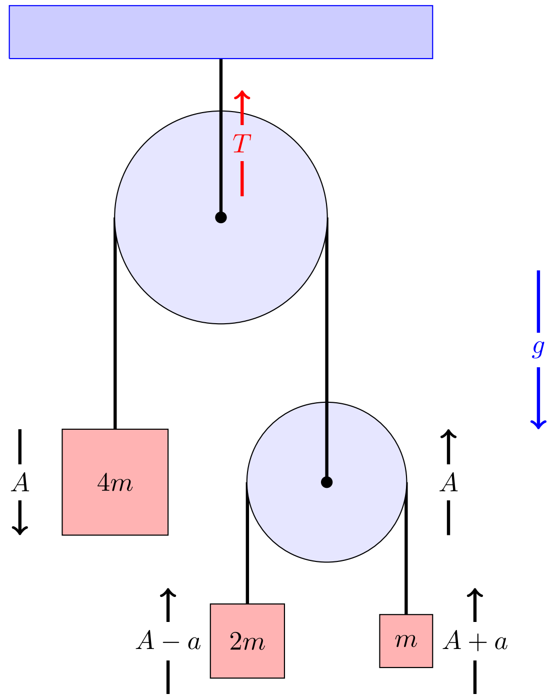
Q2

Un ballon de football parcourt une trajectoire parfaitement parabolique.
Quelle est l'unique affirmation qui est exacte ?

A La résultante des forces qui s'exercent sur le ballon a la même direction et le même sens que le vecteur vitesse. — A □
B La résultante des forces qui s'exercent sur le ballon a la même direction que le vecteur vitesse, mais avec un sens opposé. — B □
C L'unique force qui agit sur le ballon est horizontale. C'est le résultat de l'impulsion initiale du joueur de football ! — C □
D Il n'y a aucune force qui agit sur le ballon. — D □
E L'effet du frottement de l'air sur la ballon est négligeable. — E ■

Q3

Trois masses sont suspendues à deux poulies supposées de masse et d'inertie négligeable. Il n'y a aucun frottement dans les poulies. On note A l'accélération de la plus grosse masse et a l'accélération de la plus petite masse par rapport à la poulie qui la retient. La plus grosse masse descend et la plus petite remonte.



Quelle est la force T qui retient la première poulie ?

A $T = \frac{64mg}{7}$ — A ☐

B $T = \frac{32mg}{5}$ — B ■

C $T = \frac{30mg}{5}$ — C ☐

D $T = \frac{21mg}{4}$ — D ☐

E $T = \frac{16mg}{5}$ — E ☐

Q4

Une balançoire sur laquelle est assise une personne de 60 kg a une période d'oscillation T. Par contre, on observe une période d'oscillation T^* lorsque la personne prend sur ses genoux un enfant de 30 kg.
Quelle est l'unique affirmation exacte ?

A $T^* = T$ — A ■
B $T^* = T/2$ — B ☐
C $T^* = 2T/3$ — C ☐
D $T^* = 3/2$ — D ☐
E $T^* = T/3$ — E ☐

Q5

L'eau sort d'un tuyau d'incendie à une vitesse v.
Quelle relation doit satisfaire l'angle θ du tuyau pour que l'eau atteigne un point situé à une distance d à la même hauteur que le bec du tuyau ?
La norme de l'accélération de la gravité sera notée g.

A $\sin(2\theta) = \dfrac{v^2}{dg}$ — **A** ☐

B $2\sin(\theta)\cos(\theta) = \dfrac{dg}{v^2}$ — **B** ■

C $2\sin(2\theta) = \dfrac{dg}{v^2}$ — **C** ☐

D $\sin(\theta) = \dfrac{dg}{v^2}$ — **D** ☐

E $v\sin(\theta) = \dfrac{g}{d^2}$ — **E** ☐

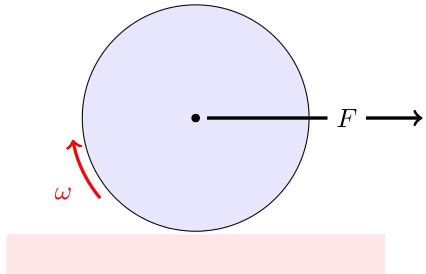
Q6

Un bateau se déplace à une vitesse constante $v = 8$ m/s. Un marin situé sur le bateau lance une balle vers le haut perpendiculairement au mouvement du bateau. Après deux secondes, la balle retombe sur le bateau.
La force de trainée est supposée totalement négligeable !

A Le point de chute se trouve à 8 m du marin vers l'avant du bateau . — **A** ☐
B Le point de chute se trouve à 16 m du marin vers l'avant du bateau. — **B** ☐
C Le point de chute se trouve à 8 m du marin vers l'arrière du bateau. — **C** ☐
D Le point de chute se trouve à 16 m du marin vers l'arrière du bateau. — **D** ☐
E La balle tombe sur la tête du marin :-) — **E** ■

Q7

Un cylindre plein de masse m et de rayon R subit en son centre une force de traction horizontale F et roule sans glisser sur le sol.



Quelle condition doit satisfaire le coefficient de frottement μ_s pour empêcher le glissement ?

A $\mu_s > \dfrac{F}{mg}$ — **A** ☐

B $\mu_s > \dfrac{mg}{F}$ — **B** ☐

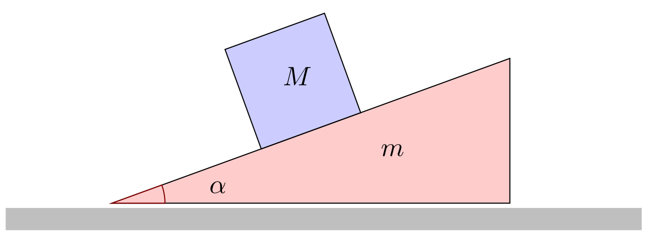
C $3\mu_s > F$ — **C** ☐

D $F\mu_s < 3mg$ — **D** ☐

E $3mg\ \mu_s > F$ — **E** ■

Q8

Un bloc de masse M est placé sur un autre bloc triangulaire de masse m. Tous les mouvement entre les surfaces se font sans frottement : les corps glissent parfaitement.



L'accélération a du bloc triangulaire par rapport au sol est donnée par

A $a = \dfrac{Mg\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{M + m\sin^2(\alpha)}$ — **A** ☐

B $a = \dfrac{Mg\cos(\alpha)}{m + M\sin^2(\alpha)}$ — **B** ☐

C $a = \dfrac{Mg\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{m + M\sin(\alpha)}$ — **C** ☐

D $a = \dfrac{Mg\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{m + M(1 - \cos^2(\alpha))}$ — **D** ■

E $a = \dfrac{Mg\cos(\alpha)}{m + M\sin(\alpha)}$ — **E** ☐

Q9

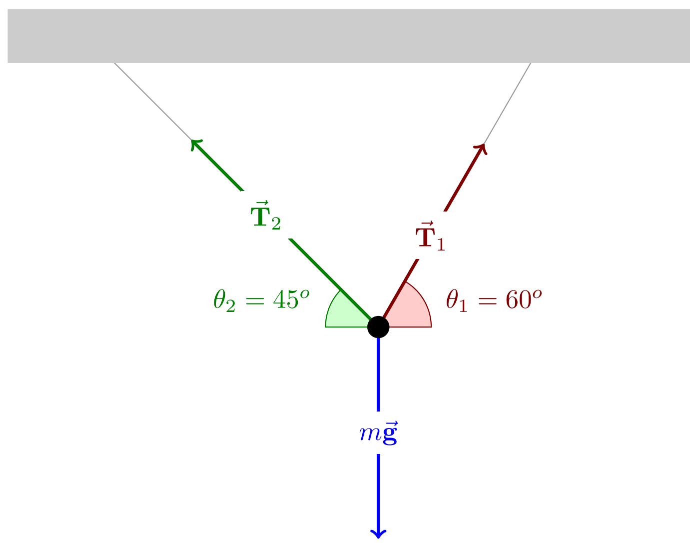
Estimer le temps t de chute d'une pomme qui se détache d'un arbre avec une vitesse initiale nulle une hauteur de 5 mètres.
La norme de l'accélération de la gravité est $g = 10\ m/s^2$.

A $t = 20$ s
B $t = 1$ s
C $t = 2$ s
D $t = \sqrt{2}$ s.
E $t = 10$ s

A ☐
B ■
C ☐
D ☐
E ☐

Q10

Une sphère de masse m est suspendue par deux cordes de masse négligeable.



Quelle est l'unique équation correcte parmi les cinq relations ?

A $T_2 = \sqrt{2}\ T_1$
B $T_2 = T_1$
C $2mg = T_1(1+\sqrt{3})$
D $2T_1 = mg(1+\sqrt{3})$
E $T_1 = 2mg(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

A ☐
B ☐
C ■
D ☐
E ☐

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

Formulaire

$$\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) = \sum M_i$$

Lorsque les forces sont constantes,

$$\Delta\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t$$

$$\Delta\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}$$

Mouvement d'un projectile

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$\Delta\overbrace{\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2\right)}^{K} = \sum\overbrace{\vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W}$$

$$= \sum\underbrace{\vec{\mathbf{F}}_{nc}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} \quad - \quad \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r}\Big)$$

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_xF_y - r_yF_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_xF_y - r_yF_x = F\ r_\perp = F_\perp\ r = Fr\sin(\theta)$$

Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$

$$m\ \vec{\mathbf{x}}(t) = \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t)\Big)$$

$$m\ \vec{\mathbf{v}}(t) = \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t)\Big)$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\ r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\ k^2 = \sum m_i\ r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\ h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution	$I = m\ R^2$
Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution	$I = m\ \frac{R^2}{2}$
Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central	$I = m\ \frac{L^2}{12}$