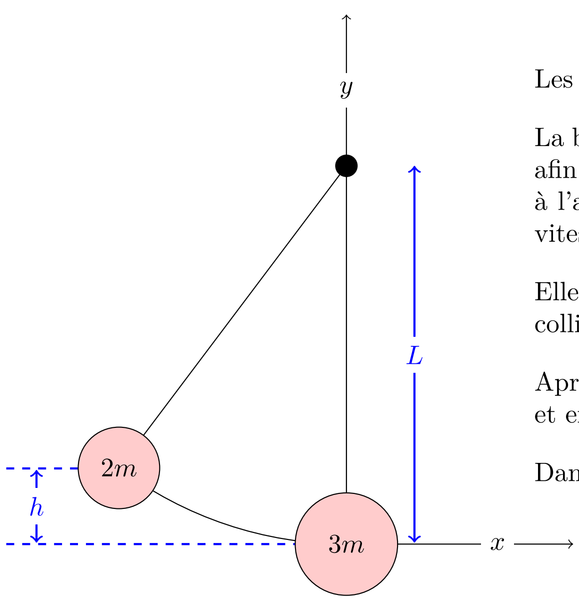
KINE11-EDPH11	
Juin 2022	*Introduction à la mécanique*
IEPR 1011 -Bleu-	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

1 Deux boules pendues à un plafond...

Attention ! Il faut répondre exclusivement sur l'unique feuille de réponse fournie.
Ce questionnaire peut servir de brouillon, mais ne sera jamais lu par le correcteur !

Deux boules sont retenues par deux cordes de même longueur $L = 0.5$ m à un même point du plafond. Les rayons des deux boules sont supposés négligeables par rapport aux autres dimensions de longueur.



Les masses des deux boules sont $2m = 2$ kg et $3m = 3$ kg.

La boule la plus légère est écartée de sa position d'équilibre afin de se situer à une hauteur de $h = 0.1$ m par rapport à l'autre boule. A l'instant $t = 0$, elle est lâchée avec une vitesse initiale nulle de cette position.

Elle commence un mouvement circulaire avant d'entrer en collision avec l'autre boule.

Après la collision, les deux boules restent collées entre elles et effectuent un mouvement de pendule.

Dans les calculs, on utilisera $g = 10$ m/s^2.

1. Quelle sera la vitesse v de la boule la plus légère juste avant le choc ?

   Il suffit juste d'écrire un bilan d'énergie !

$$2mgh = \frac{2mv^2}{2}$$

$$\downarrow$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

La vitesse de la boule juste avant le choc est donc : $\boxed{v = \sqrt{2} = 1.41 \text{ m/s}}$

C'était vraiment élémentaire : il est donc impardonnable de ne pas obtenir cette valeur :-)

2. Quelle sera la vitesse v_* des deux boules juste après le choc ?

   Comme les deux boules restent ensemble après le choc, il s'agit d'une collision inélastique. Il faut donc juste imposer la conservation de la quantité de mouvement avant et après la collision.

$$2m\ v = (2m + 3m)\ v_*$$

$$\downarrow$$

$$v_* = \frac{2v}{5}$$

La vitesse des deux boules juste après le choc est donc : $\boxed{v_* = \frac{2\sqrt{2}}{5} = 0.57 \text{ m/s}}$

3. Quelle hauteur maximale h_* atteindront les deux boules dans le mouvement de pendule ?

   C'est exactement le même principe que pour la première sous question !
   Il suffit à nouveau d'écrire un bilan d'énergie !

$$5mgh_* = \frac{5mv_*^2}{2}$$

$$\downarrow$$

$$h_* = \frac{v_*^2}{2g}$$

On en déduit immédiatement : $\boxed{h_* = \frac{8}{25 \times 20} = 0.016 \text{ m} = 1.6 \text{ cm}}$

4. Quelle sera l'amplitude maximale θ_* du mouvement pendulaire[1] des deux boules ?

   Il suffit de considérer le triangle rectangle d'hypothénuse L et de côté adjacent $L - h_*$:

$$\cos(\theta_*) = \frac{L - h_*}{L}$$

$$\downarrow$$

$$\theta_* = \arccos\left(\frac{L - h_*}{L}\right)$$

L'amplitude angulaire maximale est donc : $\boxed{\theta_* = 14.53^o}$

Il est important ici de mentionner les unités de l'angle !
En radians, on a $\theta_* = 0.254$ rad : ce sont des valeurs bien différentes !

[1] C'est l'angle θ_* formé par la corde par rapport à la verticale lorsque les deux boules se trouvent à la hauteur h_*.

5. Quelle sera la fréquence f du mouvement pendulaire ?

   Pour de petites oscillations, les équations du mouvement du pendule simple s'écrivent :

$$\begin{aligned} m\, x''(t) &= -T\, \overbrace{\sin(\theta(t))}^{=\frac{x(t)}{L}} \\ m\, \underbrace{y''(t)}_{\approx 0} &= T\, \underbrace{\cos(\theta(t))}_{\approx 1} - mg \end{aligned}$$

   On obtient donc bien un mouvement harmonique régi par : $\boxed{x''(t) = -\frac{g}{L}\, x(t)}$

   La fréquence du pendule simple est : $\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} = 0.71 \text{ s}^{-1}}$

   Même avec un angle de 15^o, l'approximation faite pour des petites oscillations reste encore très largement valable ici ! Evidemment, il n'était pas demandé de re-dériver les équations du pendule, même si cela pouvait être une manière d'obtenir la réponse à la question !
   Donner uniquement la réponse finale était donc parfaitement suffisant :-)

6. Estimer l'instant t_c où observe-t-on la collision ?

   La seule option ici est d'écrire le mouvement oscillant du pendule !
   C'est un résultat qui a été vu explicitement au cours.
   C'était aussi une question très semblable à l'examen de janvier 2022 !
   Ici, il suffit d'écrire un mouvement harmonique !

$$\begin{aligned} x(t) &= -x_0 \cos(\omega t) \\ v(t) &= x_0 \omega \sin(\omega t) = v \cos(\omega t) \end{aligned}$$

   Le choix du cosinus permet d'avoir immédiatement les conditions initiales : $x(0) = -x_0$ *et* $v(0) = 0$.

   On obtient immédiatement t_c en observant $x(t_c) = 0$.

$$\cos(\omega t_c) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\sqrt{\frac{g}{L}}\, t_c = \frac{\pi}{2}$$

   L'expression demandée est : $\boxed{t_c = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g}} = 0.35 \text{ s}}$

Peu d'étudiants écrivent une expression avec un cosinus ou sinus et la plupart s'acharnent à vouloir écrire un MRUA. Ce qui est exactement l'erreur commise par les mêmes étudiants en janvier ! Eh oui : refaire l'examen de janvier était une bonne idée !

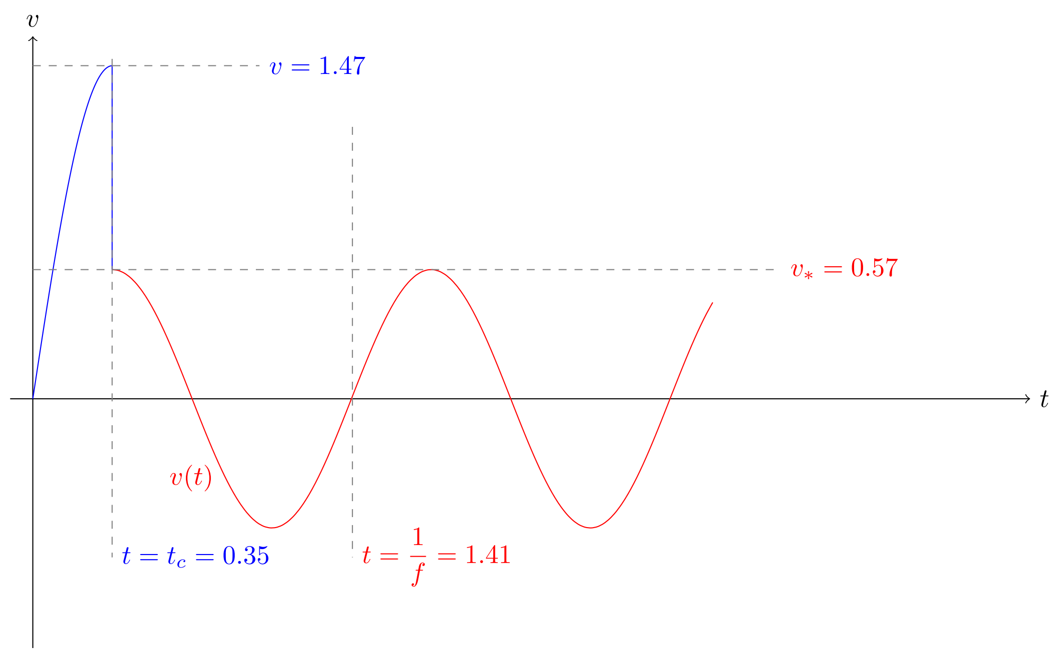
Les puristes ne feront remarquer qu'utiliser ici le modèle du pendule simple valable pour des petites oscillations est assez discutable.
Et, ils auront raison !
Mais, c'est quand-même une bien meilleure approximation qu'utiliser un MRUA !

Indiquer que le modèle du pendule simple était une piètre approximation ici rendait heureux le correcteur et permettait de bénéficier d'un super bonus : malheureusement, quasiment aucun étudiant n'a pas fait un tel commentaire ! Ce qui me laisse bien perplexe après la correction.

7. Dessiner la composante horizontale de vitesse $v_x(t)$ de la boule la plus légère en fonction de $t > 0$. Bien indiquer ce qui se passe à l'instant $t = t_c$

   L'expression de la vitesse de la boule la plus légère est donnée par :

$$\begin{array}{lllllll} v(t) & = & v\ \sin(\omega t) & = & 1.41\ \sin(4.47\ t) & & t < t_c \\ v(t) & = & v_*\ \sin(\omega t) & = & 0.57\ \sin(4.47\ t) & & t_c < t \end{array}$$



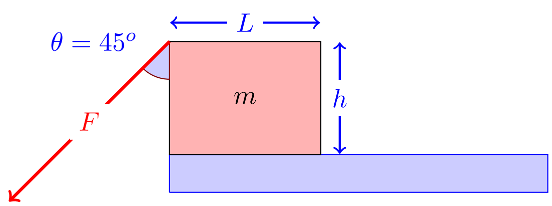
Il suffit donc d'esquisser les deux courbes !
Bien, indiquer le saut de vitesse en $t = t_c$!
Oui : la fréquence avant et après le choc est identique, puisque la fréquence ne dépend pas de la masse ! Par contre, la composante de vitesse est bien un simple sinus à tracer : so easy :-)
Très peu d'étudiants arrivent à dessiner quelque chose un peu proche de la réponse : à méditer !

2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Ne pas répondre ou cocher une réponse erronée ne fait rien perdre.
Par contre, il faut répondre correctement à six questions pour réussir cette partie.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !
Gommer pour les corrections !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Tipp-Ex) pour corriger !

Q1

Une boite de masse m et de dimensions $L \times h$ repose sur un sol horizontal. Vous tentez de la faire pivoter autour du coin inférieur gauche en appliquant une force de traction F sur le coin supérieur gauche avec un angle $\theta = 45^o$.



Quellle est la norme minimale de F permettant à la caisse de pivoter ?

- **A** $F = \frac{mgL}{h}\frac{1}{\sqrt{2}}$ ■
- **B** $F = \frac{mgh}{L}\frac{1}{\sqrt{2}}$ □
- **C** $F = \frac{mgh}{L}\frac{1}{\sqrt{3}}$ □
- **D** $F = \frac{mgL}{h}\frac{2}{\sqrt{3}}$ □
- **E** $F = \frac{mgL}{h}\frac{2}{\sqrt{2}}$ □

Q2

Quelles sont les unités du moment d'une force ?

- **A** $kg\ m^2\ /\ s^3$ □
- **B** $kg\ m^2\ /\ s$ □
- **C** $N\ m$ ■
- **D** $N\ m^2$ □
- **E** $N\ m\ s^2$ □

Q3

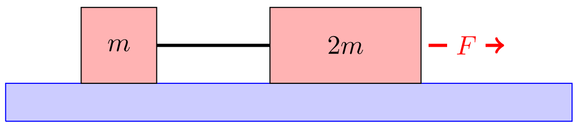
Une expérience montre qu'une force de 0.75 N déforme un ressort de 0.25 cm.
Quelle est la constante de raideur k du ressort ?

A $k = 3000$ N/m
B $k = 300$ N/m
C $k = 33.333$ N/m
D $k = 0.003$ N/m
E $k = 0.03$ N/m

A ☐
B ■
C ☐
D ☐
E ☐

Q4

Deux caisses de masses m et $2m$ reliées par un cable sont posées sur un plan.
Elles sont tirées vers la droite à vitesse constante par une force horizontale F.
Le coefficient de frottement cinétique entre chaque caisse et le sol est μ_c.



Quels sont les normes de la force F et de la tension T dans le cable ?

A $F = 3m\mu_c g$ $T = m\mu_c g$

B $F = 3m\mu_c g$ $T = 3m\mu_c g$

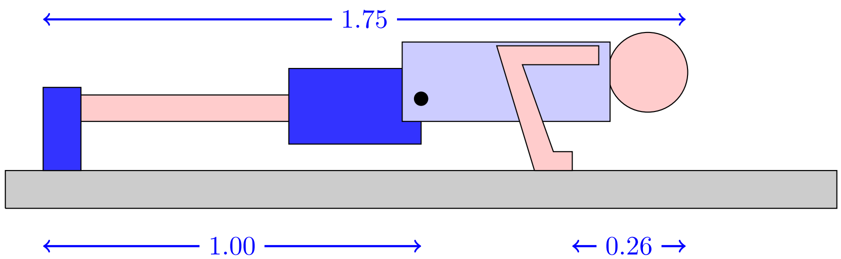
C $F = 3m\mu_c g$ $T = 0$

D $F = 2m\mu_c g$ $T = m\mu_c g$

E $F = 2m\mu_c g$ $T = 0$

A ■
B ☐
C ☐
D ☐
E ☐

Soucieux de garder sa masse de 74 kg et de renforcer sa musculature,
Eden Hazard effectue des pompages au sol.



Q5 On considère une position d'équilibre où ses mains sont posées sur le sol à une distance de 26 cm du sommet de sa tête comme indiqué sur le dessin.
Le centre de gravité de son corps se situe à 100 cm de la plante de ses pieds.
La taille d'Eden Hazard est de 175 cm.

Quelle est la meilleure estimation de la norme de la force F appliquée sur chacune des mains d'Eden ?

A $F = 183$ N — A ☐

B $F = 194$ N — B ☐

C $F = 210$ N — C ☐

D $F = 244$ N — D ■

E $F = 487$ N — E ☐

Q6 Un caisse de masse m est posé sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. On soulève lentement la partie supérieure du plan incliné afin d'augmenter progressivement l'angle α jusqu'à une valeur critique α_* pour laquelle la caisse se met à glisser sur le plan. Les coefficients de frottement cinétique et statique entre la caisse et le plan incliné sont notés μ_c et μ_s.

Quelle est l'unique relation exacte ?

A $\tan(\alpha_*) = \cot(\mu_s)$ — A ☐
B $\tan(\alpha_*) = \mu_s$ — B ■
C $\cot(\alpha_*) = \mu_s$ — C ☐
D $\mu_s \cos(\alpha_*) = \mu_c$ — D ☐
E $\alpha_* = \mu_s$ — E ☐

Q7

Un objet de masse m glisse avec une vitesse constante v sans frottement sur un sol horizontal situé à une hauteur $z = 0$. Ensuite, il entre en collision avec un autre objet de même masse au repos. Après le choc, les deux objets restent collés entre eux et entament une montée, toujours sans frottement avec le sol. Ils atteignent une hauteur $z = h$ avant de redescendre.

Quelle est cette hauteur maximale h ?

A $h = \dfrac{v^2}{g}$ — **A** ☐

B $h = \dfrac{v^2}{2g}$ — **B** ☐

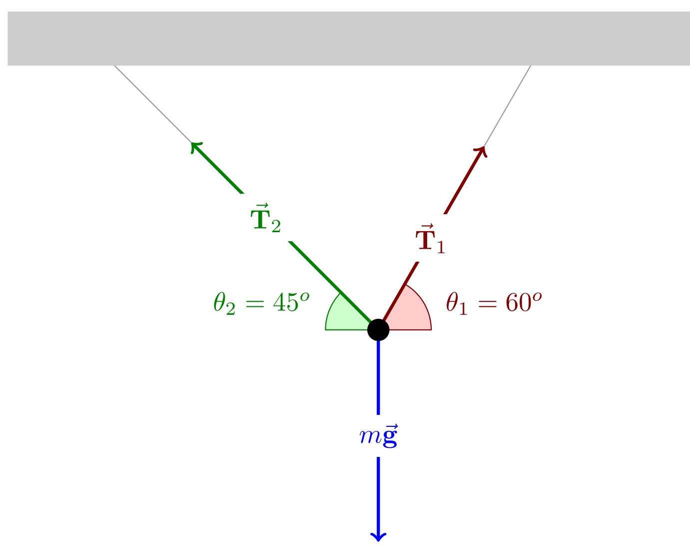
C $h = \dfrac{v^2}{4g}$ — **C** ☐

D $h = \dfrac{v^2}{8g}$ — **D** ■

E $h = \dfrac{v^2}{16g}$ — **E** ☐

Q8

Une sphère de masse m est suspendue par deux cordes de masse négligeable.



Quelle est l'unique équation correcte parmi les cinq relations ?

A $T_2 = \sqrt{2}\ T_1$ — **A** ☐

B $mg = T_1(1/2 + \sqrt{3})$ — **B** ☐

C $2T_1 = mg(1 + \sqrt{3})$ — **C** ☐

D $T_1 = 2mg(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ — **D** ☐

E $2mg = T_1(1 + \sqrt{3})$ — **E** ■

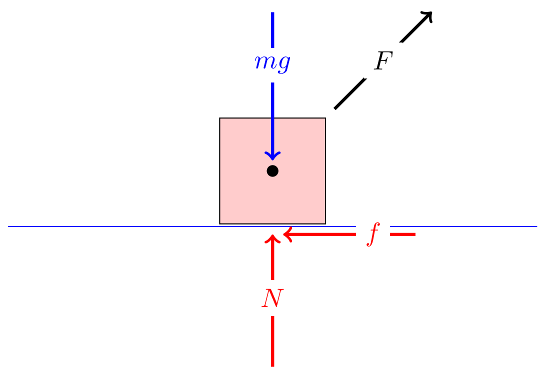
Q9

Considérons le mouvement d'un point matériel.
Quelle est l'unique affirmation correcte ?

A	Le vecteur accélération est toujours perpendiculaire au vecteur vitesse.	**A**	☐
B	Le vecteur accélération n'est jamais parallèle au vecteur vitesse.	**B**	☐
C	Le vecteur accélération est toujours parallèle au vecteur vitesse.	**C**	☐
D	Le vecteur accélération est toujours tangent à la trajectoire.	**D**	☐
E	La vitesse peut être nulle alors que l'accélération ne l'est pas.	**E**	■

Q10

Un ouvrier tente de déplacer un bloc de masse m en appliquant une force F, mais le bloc reste immobile. Le schéma ci-dessous représente correctement les directions de toutes les forces qui agissent sur le bloc, mais pas nécessairement les normes de ces forces.



Quelle est l'unique paire de relations correctes pour les normes des 4 forces ?

A	$F = f$ et $N = mg$	**A**	☐
B	$F = f$ et $N > mg$	**B**	☐
C	$F > f$ et $N < mg$	**C**	■
D	$F > f$ et $N = mg$	**D**	☐
E	$F > f$ et $N > mg$	**E**	☐

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

$$\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) = \sum M_i$$

Formulaire

Lorsque les forces sont constantes,

$$\Delta\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t$$

$$\Delta\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}$$

Mouvement d'un projectile

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$
\begin{aligned}
\Delta\overbrace{\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2\right)}^{K} &= \sum\overbrace{\vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W} \\
&= \sum\underbrace{\vec{\mathbf{F}_{nc}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} \quad - \quad \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r}\Big)
\end{aligned}
$$

Moment d'une force dans le plan

$$
\underbrace{\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_xF_y - r_yF_x \end{bmatrix}
$$

$$
M = r_xF_y - r_yF_x = F\ r_\perp = F_\perp\ r = Fr\sin(\theta)
$$

Ensemble de particules : un corps !

$$
\begin{aligned}
m &= \sum m_i \\
m\ \vec{\mathbf{x}}(t) &= \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t)\Big) \\
m\ \vec{\mathbf{v}}(t) &= \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t)\Big)
\end{aligned}
$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\ r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\ k^2 = \sum m_i\ r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\ h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution	$I = m\ R^2$
Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution	$I = m\ \dfrac{R^2}{2}$
Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central	$I = m\ \dfrac{L^2}{12}$