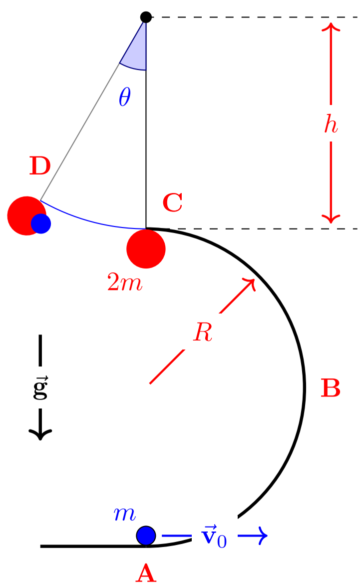
KINE11-EDPH11	
Juin 2023	*Introduction à la mécanique*
IEPR 1011 -Rose-	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

1 Une pirouette à Walibi...



Au point bas A d'une piste semi-circulaire de rayon $R = 3$ m, une bille de masse $m = 1$ kg est injectée avec une vitesse v_0.

Au point haut C de cette piste, une seconde bille de masse $2m$ est suspendue au bout d'une tige rigide de masse négligeable et de longueur $h = 4$ m. L'extrémité supérieure de cette tige est elle-même fixée avec une articulation à un point fixe. Cette tige crée donc un pendule qui pend immobile à la verticale, lorsque la première bille va entrer en collision avec la seconde !

Lors de cette collision, les deux billes restent attachées en une unique masse compacte qui va se déplacer suivant un mouvement commun les amenant à une position angulaire maximale définie par un angle θ.

La bille glisse parfaitement sur la piste.
On néglige les forces de frottement de l'air.

On utilisera $g = 10$ m/s^2
pour effectuer tous les calculs.

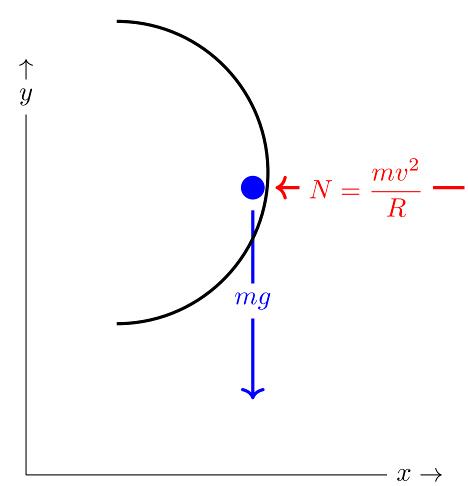
1. Citer et dessiner l'ensemble de toutes les forces sur la bille de masse m au point B.

   Il faut citer uniquement la gravité etla force normale de réaction du sol qui crée l'accélération centripète. Comme la bille glisse parfaitement, il ne faut pas parler de frottement !

   Dessiner une force de réaction qui s'oppose à la gravité est une erreur impardonnable et fait perdre la totalité des points pour cette question qui n'est pas aussi simple qu'on pourrait le croire :-)

Il faut donc uniquement dessiner et citer :

- *Force de gravité :* $m\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$
- *Force de réaction normale du sol :* $\vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} -mv^2/R \\ 0 \end{bmatrix}$



2. Quelle doit être la vitesse initiale minimale v_0 afin que la masse m atteigne le point haut C ?

Cela sera le cas si l'accélération centripète est exactement l'accélération de la gravité au point C ou si la force normale est nulle en ce point C.

$$m\frac{v_1^2}{R} = mg$$

$$v_1^2 = Rg$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En vertu de la conservation de l'énergie, on peut écrire : } \frac{mv_1^2}{2} + 2mgR = \frac{mv_0^2}{2}$$

$$v_0^2 - 4gR = Rg$$

$$v_0^2 = 5Rg$$

On déduit donc : $\boxed{v_0 = \sqrt{5gR} = 12.25 \text{ m/s}}$

C'est quasiment un exemple fait au cours !

Plus concrètement, on constate que la vitesse diminue progressivement entre les points A, B et C et passe successivement par les trois valeurs $\sqrt{5gR}$, $\sqrt{3gR}$ et $\sqrt{gR}$, en vertu de la conservation de l'énergie ! Ce qui nous permettra de répondre immédiatement aux deux questions qui suivent :-)

3. Quelle sera[1] la force de réaction de la piste sur la bille au point B ?

Comme $N = \dfrac{mv^2}{R}$ *et que* $v^2 = 3gR$ *au point B, on déduit immédiatement :*

$$\boxed{N = 3mg = 30 \text{ N}}$$

4. Quelle sera alors la vitesse v_1 de la masse m au point haut C juste avant la collision ?

Il suffit de redonner la valeur obtenue précédemment !
On peut aussi refaire un bilan d'énergie entre les points A et C !

$$\boxed{v_1 = \sqrt{gR} = 5.48 \text{ m/s}}$$

[1] On considère bien le cas où v_0 a été choisie pour la valeur minimale pour que la masse m atteigne le point haut C !

5. Quelle sera alors la vitesse v_2 des deux masses accrochées juste après la collision ?

   Comme les deux masses restent accrochées, le choc est inélastique !
   La conservation de la quantité de mouvement avant et après le choc implique que :

$$
\begin{aligned}
(m+2m)v_2 &= mv_1 \\
v_2 &= \frac{v_1}{3}
\end{aligned}
$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{Comme on vient d'obtenir } v_1 = \sqrt{gR}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{gR}{9}}$$

   Attention : il n'y a pas conservation de l'énergie cinétique pendant le choc inélastique !
   Il ne faut donc pas déduire v_2 en faisant une égalité d'énergie cinétique !

$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{gR}{9}} = 1.83 \text{ m/s}}$$

6. Quelle sera alors l'énergie dissipée lors de la collision ?

   Et maintenant et seulement maintenant,
   on fait la différence entre les deux énergie cinétique !

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}mv_1^2 - \tfrac{1}{2}3mv_2^2$$

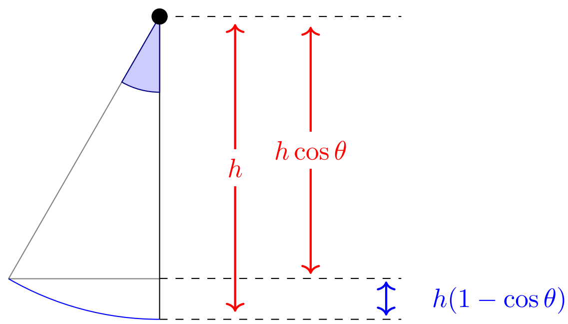
$$\Big\downarrow \quad \textit{En substituant } v_1 = \sqrt{gR} \textit{ et } v_2 = \sqrt{gR/9}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta K &= \frac{mgR}{2} - \frac{mgR}{6} \\
\Delta K &= mgR\left[\frac{3-1}{6}\right] = \frac{2mgR}{6} = \frac{mgR}{3}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\Delta K = \frac{mgR}{3} = 10 \text{ Joules}}$$

7. Jusqu'à quelle position angulaire maximale θ, l'ensemble des deux masses remonte-t-il alors ?

Il suffit d'écrire le bilan d'énergie pendant le mouvement pendulaire !
Tout d'abord, il faut observer la différence de hauteur pour une position angulaire θ :-)



On peut alors écrire le bilan d'énergie.
La perte d'énergie cinétique doit correspondre à l'accroissement d'énergie potentielle.

$$
\begin{aligned}
\frac{3mv_2^2}{2} &= 3mgh(1-\cos\theta) \\
\frac{v_2^2}{2} &= gh(1-\cos\theta)
\end{aligned}
$$

En substituant $v_2 = \sqrt{gR/9}$

$$
\begin{aligned}
\frac{gR}{18} &= gh(1-\cos\theta) \\
\frac{R}{18h} &= (1-\cos\theta)
\end{aligned}
$$

$$
\cos\theta = \frac{18h-R}{18h} = \frac{18\times 4-3}{18\times 4} = \frac{23}{24}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\theta &= \arccos\left(\frac{23}{24}\right) = 16.6^o \\
y_D &= 2R + \frac{h}{24} = 6.17 \text{ m}
\end{aligned}
}
$$

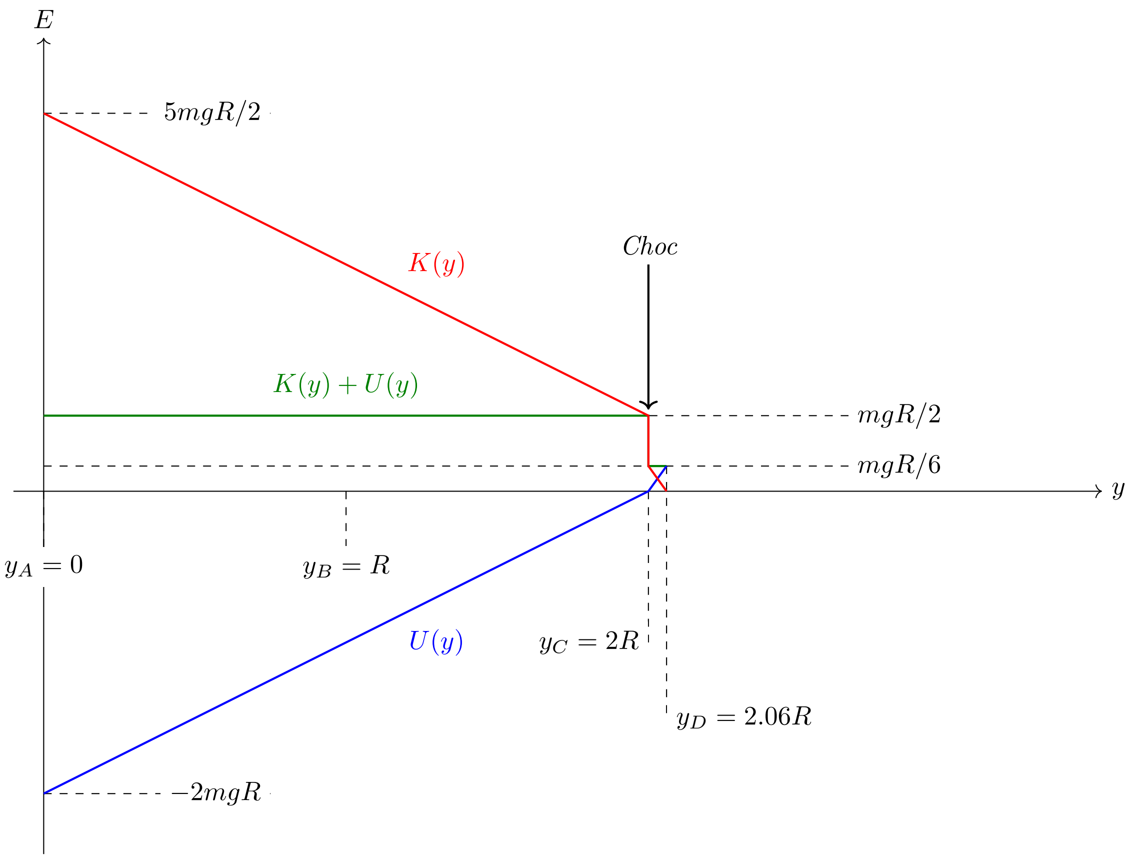
Notez toutefois que la hauteur y_D n'était pas demandée dans la question :-)
Mais, cette valeur permet de dessiner avec plus de précision le dessin de la dernière question.

8. Esquisser l'évolution de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique du système des deux billes[2] en fonction de la hauteur entre les positions A et D.
Pour les graphes, on posera que l'énergie potentielle de gravité sera nulle au point C.
Indiquer clairement les hauteurs y_A, y_B, y_C et y_D sur votre dessin.

L'énergie potentielle augmente de manière linéaire avec la hauteur : la pente change toutefois lorsque les deux billes sont en mouvement. Concrètement, le petit segment de droite entre y_C et y_D a une pente trois fois plus importante que sur le segment précédent.

Par contre, l'énergie cinétique diminue linéairement d'une valeur maximale en y_A vers zéro en y_D. Il y a aussi une perte brutale lors du choc ! C'est bien logique, on convertit de l'énergie cinétique en énergie potentielle puisqu'en s'élevant, la bille va progressivement perdre de la vitesse.

A part le choc, le comportement énergétique est parfaitement conservatif puisqu'il n'y a aucune force de frottement : on peut tracer l'énergie mécanique comme deux segments de droite constants.



Ces courbes peuvent être facilement esquissées avec un peu d'intuition physique et de bon sens sans effectuer aucun calcul !

Oui : il est impératif de tracer des droites !
Oui : il faut que l'énergie cinétique diminue en fonction de y !
Oui : il faut que l'énergie potentielle augmente en fonction de y !
Oui : il faut indiquer l'énergie cinétique perdue lors du choc en y_C !

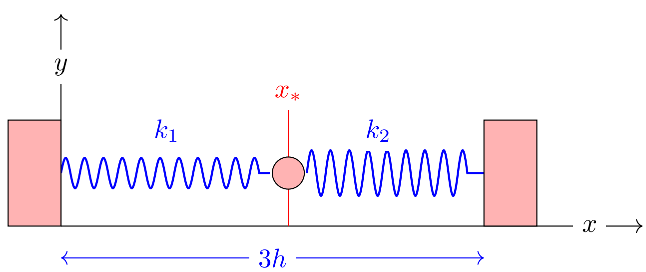
Attention ! Il faut répondre exclusivement sur l'unique feuille de réponse fournie.
Ce questionnaire peut servir de brouillon, mais ne sera jamais lu par le correcteur !
Répondez à chaque sous-question et uniquement à ce qui est demandé.
Faites des dessins distincts pour chaque sous-question.
Soyez précis dans les graphes.
Chaque sous-question peut être résolue de manière symbolique, si les résultats précédents font défaut !
Détaillez vos calculs afin de clairement montrer votre démarche.
Pensez à encadrer les résultats principaux pour les mettre en évidence.

[2] Il s'agit bien de la somme des énergies de chaque bille !

2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Ne pas répondre ou cocher une réponse erronée ne fait rien perdre.
Par contre, il faut répondre correctement à six questions pour réussir cette partie.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !
Gommer pour les corrections !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

Une masse m peut glisser sur un rail horizontal en étant attachée à deux ressorts de raideur k_1 et k_2 avec une même longueur au repos h. Les deux autres extrémités des ressorts sont attachées et distantes d'une longueur $3h$.



Q1 Qelle est la position d'équilibre x_* de la masse ?

A $x_* = \dfrac{2k_1 + k_2}{k_1 + k_2}\, h$ — **A** ☐

B $x_* = \dfrac{k_1 + 2k_2}{k_1 + k_2}\, h$ — **B** ■

C $x_* = \dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\, h$ — **C** ☐

D $x_* = \dfrac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2}\, h$ — **D** ☐

E $x_* = \dfrac{k_2}{k_1 - k_2}\, h$ — **E** ☐

Q2

Un cylindre plein de masse m roule sans glisser sur une surface horizontale. La vitesse du centre de masse est v.

Quelle est l'énergie cinétique K du cylindre ?

A $K = mv^2$ — A ☐

B $K = \frac{mv^2}{2}$ — B ☐

C $K = \frac{2mv^2}{3}$ — C ☐

D $K = \frac{3mv^2}{4}$ — D ■

E $K = \frac{3mv^2}{2}$ — E ☐

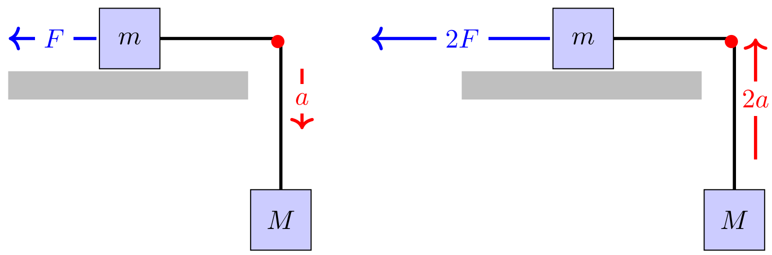
Q3

Quelles sont les unités de l'inertie I d'un corps solide ?

A $kg\ m$ — A ☐
B $J\ s^2$ — B ■
C $kg^2\ m^2$ — C ☐
D $N\ m^2\ s^2$ — D ☐
E $kg\ m\ s^2$ — E ☐

Q4

Deux blocs de masse m et M sont reliés par une corde. D'abord, le bloc de masse m subit une force horizontale F et le second bloc descend avec une accélération a. Dans une seconde expérience, on applique une force $2F$ et le second bloc monte avec une accélération $2a$.



On peut déduire le rapport des masses des deux blocs à partir de a et F.
Le déplacement sur la surface horizontale se fait sans aucun frottement.
La norme de l'accélération de la gravité est $g = 10\ m/s^2$.
Quelle est le rapport des deux masses ?

A $\dfrac{m}{M} = \dfrac{g-4a}{4a}$ — A ■

B $\dfrac{m}{M} = \dfrac{g}{a}$ — B ☐

C $\dfrac{m}{M} = \dfrac{g-a}{4a}$ — C ☐

D $\dfrac{m}{M} = \left(\dfrac{4a}{4a-g}\right) F$ — D ☐

E $\dfrac{m}{M} = \left(\dfrac{g-4a}{4a}\right) F$ — E ☐

Q5

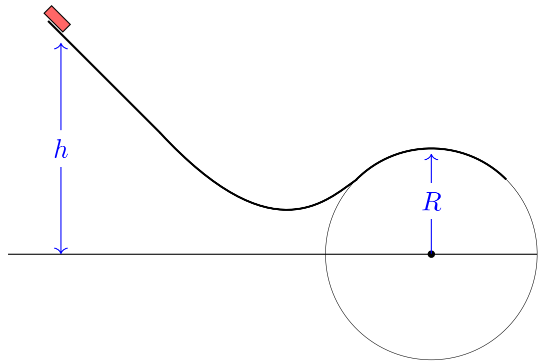
Une voiture roule à une vitesse constante de 50 km/h sur une route droite.
Un ballon est posé sur la plage arrière de la voiture.
Soudain, le conducteur prend un virage avec la même vitesse constante.

Quelle est l'unique affirmation exacte
sur le mouvement du ballon pendant le virage ?

A Le ballon bouge de manière rectiligne et uniforme par rapport à la plage arrière. — A ☐
B Le ballon est immobile par rapport à la plage arrière. — B ☐
C Le ballon est immobile par rapport au sol. — C ☐
D Le ballon bouge de manière rectiligne et uniforme par rapport au sol. — D ■
E Le ballon accélère de manière rectiligne par rapport au sol. — E ☐

Q6

Dans un parc d'attraction, un wagonnet de masse m dévale une pente d'une hauteur h pour passer une petite bosse construite sur un cercle de rayon R. Tous les frottements sont supposés négligeables.



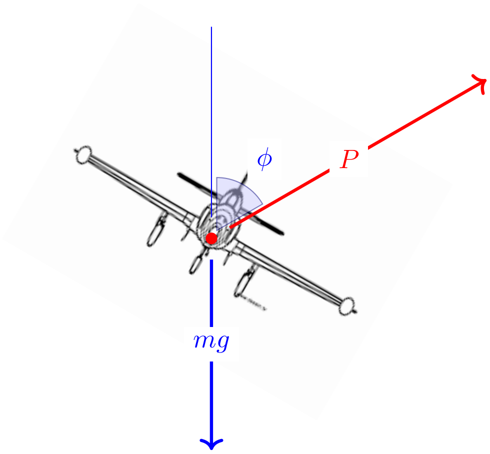
Quelle doit être la hauteur maximale h
afin que le wagon ne décolle pas au sommet de la bosse ?

A $h < 7R/2$
B $h < 6R/2$
C $h < 5R/2$
D $h < 4R/2$
E $h < 3R/2$

A	☐
B	☐
C	☐
D	☐
E	■

Q7

Un avion de masse m effectue un virage avec une vitesse horizontale v de norme constante : la trajectoire de l'avion est sur un cercle horizontal de rayon R.
En pratique, le pilote incline l'avion d'un angle ϕ. La force de portance P exercée par l'air sur l'avion n'est dès lors plus verticale et en équilibre avec la force de gravité et cela engendre le mouvement de rotation.



Quel est le rayon R du virage que va effectuer l'avion ?

A $R = \dfrac{v^2 \cos\phi}{g \sin\phi}$ — A ■

B $R = \dfrac{v^2}{g \sin\phi}$ — B □

C $R = \dfrac{v^2}{g \sin^2\phi}$ — C □

D $R = \dfrac{v^2 \sin\phi}{g \cos\phi}$ — D □

E $R = \dfrac{v \cos\phi}{g^2 \sin^2\phi}$ — E □

Q8

Afin de ranger les archives de notre Faculté, notre Doyen Marc descend une lourde caisse verticalement à vitesse constante avec l'aide d'une corde.

Quelle est l'unique affirmation exacte ?

A Le travail de la force exercée par Marc est positif tandis que le travail de la force de gravité est négatif. — A □

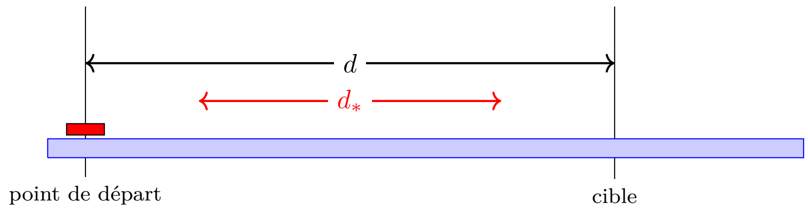
B Le travail de la force exercée par Marc est négatif tandis que le travail de la force de gravité est positif. — B ■

C Le travail de la force exercée par Marc est positif et le travail de la force de gravité est aussi positif. — C □

D Le travail de la force exercée par Marc est négatif et le travail de la force de gravité est aussi négatif. — D □

E Les travaux des deux forces sont tous les deux nuls puisque la caisse descend à vitesse constante. — E □

Le *curling* est un sport de précision pratiqué sur la glace avec des pierres en granite. Le but est de placer la pierre le plus près possible d'une cible appelée la maison. Les joueurs ont un balai de curling qui permet de modifier localement le frottement devant la pierre afin d'y créer des effets complexes permettant d'obtenir une trajectoire courbée. C'est l'origine du nom de ce sport !



Q9 Ici, nous considérons une version très simplifiée où la pierre de masse m suit une trajectoire rectiligne, sans aucun mouvement de rotation. La cible est à une distance d, la vitesse initiale de la pierre est v et le coefficient de frottement cinétique entre la pierre et la glace est μ_c. Afin que la pierre puisse atteindre la cible, les joueurs vont frotter la glace afin de réduire le coefficient de frottement à une valeur $\mu_* < \mu_c$, sur une section d_* de la trajectoire.

Quelle doit être la distance d_* ?

A $d_* = \dfrac{2\mu_c g d - v^2}{2\mu_* g}$ — **A** ☐

B $d_* = \dfrac{2\mu_* g d - v^2}{2\mu_c g}$ — **B** ☐

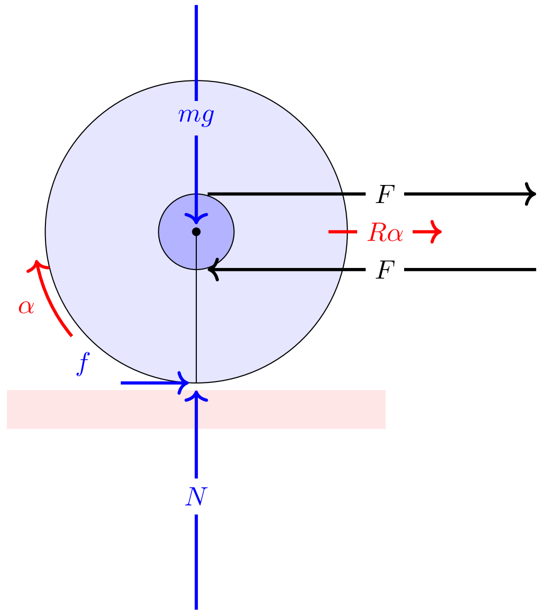
C $d_* = \dfrac{2\mu_c g d - v^2}{2(\mu_c - \mu_*) g}$ — **C** ■

D $d_* = \dfrac{v^2}{2(\mu_c - \mu_*) g}$ — **D** ☐

E $d_* = \dfrac{m v^2}{2(\mu_c - \mu_*) g}$ — **E** ☐

Q10

Considérons une roue de vélo de rayon R entrainée par le mouvement de la chaine avec un pignon de rayon r. Par convention, une valeur positive des accélérations et forces représentées correspond à la donnée telle qu'elle est représentée sur le dessin.



Avec la convention choisie, l'équilibre de rotation s'écrit :

A $I\alpha = 2rF + Rf$
B $I\alpha = rF - Rf$
C $I\alpha = rF + 2Rf$
D $I\alpha = 2RF - rf$
E $I\alpha = 2rF - Rf$

A ☐
B ☐
C ☐
D ☐
E ■

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) &= \sum M_i
\end{aligned}
$$

Formulaire

Lorsque les forces sont constantes,

$$
\begin{aligned}
\Delta\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t \\
\Delta\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}
\end{aligned}
$$

Mouvement d'un projectile

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$\Delta \overbrace{\left(\tfrac{1}{2} m\ v^2\right)}^{K} = \sum \overbrace{\vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W}$$

$$= \sum \underbrace{\vec{\mathbf{F}_{nc}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} - \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r} \Big)$$

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_x F_y - r_y F_x = F\ r_\perp = F_\perp\ r = F r \sin(\theta)$$

Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$

$$m\ \vec{\mathbf{x}}(t) = \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t) \Big)$$

$$m\ \vec{\mathbf{v}}(t) = \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t) \Big)$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\ r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\ k^2 = \sum m_i\ r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\ h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ \dfrac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m\ \dfrac{L^2}{12}$