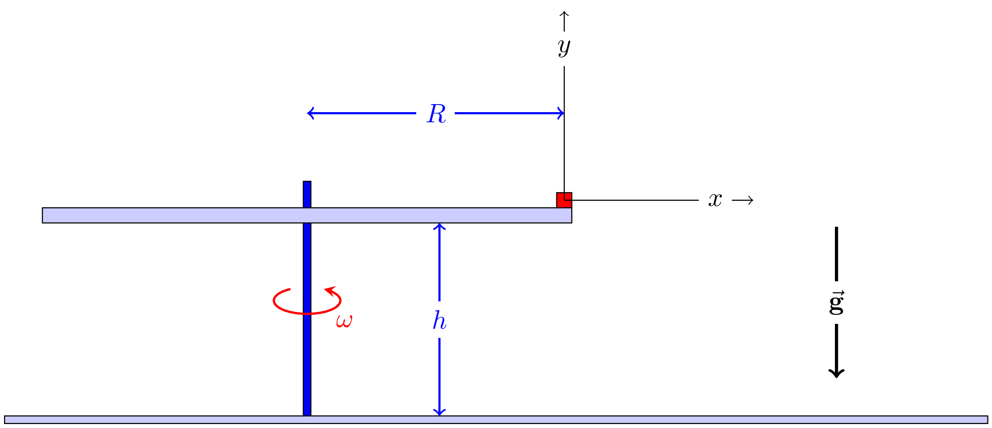
| | |
|---|---|
| **KINE11-EDPH11** | |
| **Juin 2024** | *Introduction à la mécanique* |
| **IEPR 1011 -Bleu-** | *Vous pouvez conserver cet énoncé !* |

# 1 Un petit bloc sur un plateau tournant.

On place un petit bloc sur la surface d'un disque de rayon $R = 30\ cm$.
La plateau tourne avec une vitesse de 30 tours/minute.
Il s'agit de déterminer le coefficient de frottement minimal $\mu_s$ afin que le bloc reste sur le plateau.
Le poids du bloc est de $m = 0.1\ kg$.
Le plateau se trouve à une hauteur $h = 2\ m$ par rapport à un sol plat.
Dans les calculs, on utilisera $g = 10$ m/s$^2$.




1. Calculer la valeur de la vitesse angulaire du plateau $\omega$ en radians par seconde.

   *Il faut simplement écrire :*

$$\boxed{30 \left[\frac{\text{tour}}{\text{minutes}}\right] = \frac{30 \times 2\pi}{60} \left[\frac{\text{radians}}{\text{secondes}}\right]}$$

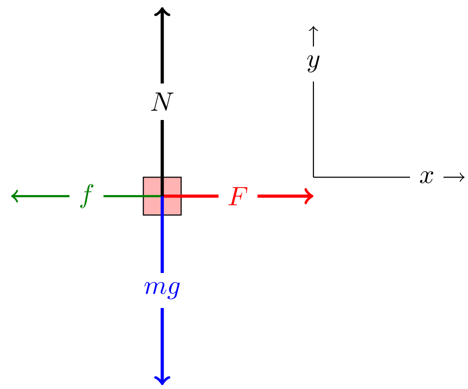
*Cette question est vaiment élémentaire.*
*Il est donc vraiment impardonnable de ne pas obtenir cette valeur.*
*Oui : il faut la valeur numérique exacte pour valider votre réponse.*

*Ne pas savoir qu'un tour est une révolution de $2\pi$ en radians est assez angoissant !*
*Non, non : il n'y a aucune formule à appliquer ici*

2. Dessiner les forces qui agissent sur le bloc.
Y indiquer clairement le nom et la notation habituelle pour chacune des forces !

*Il faut citer la force de gravité, la force de réaction qui se compose d'une réaction normale et d'une composante de frottement.*
*On peut éventuellement, ajouter une pseudo-force centrifuge !*

- *Force de gravité :* $m\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$
- *Force de réaction normale :* $\vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix}$
- *Force de frottement :* $\vec{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_s mg \\ 0 \end{bmatrix}$
- *Pseudo-force centrifuge :* $\vec{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} mR\omega^2 \\ 0 \end{bmatrix}$




*Beaucoup d'étudiants introduisent des forces étranges de poussée ou des choses farfelues.*
*Beaucoup d'étudiants orientent mal la force de frottement*
*Beaucoup d'étudiants confondent force de frottement* **f** *et coefficient de frottement* $\mu_s$*.*
*C'est impardonnable : une force est un vecteur et un coefficient de frottement est un nombre !*

*Comme on considère le bloc comme un point matériel, il est assez légitime d'appliquer toutes les forces au centre de gravité, ici. Mais, le frottement s'applique à la base du bloc et la pseudo-force centrifuge sur le centre de gravité. Pour être tout)à-fait rigoureux, on pourrait donc imaginer que le bloc ne glisse pas sur le plateau, mais pivote sous l'effet de la rotation.*

3. Calculer le coefficient de frottement minimal pour que la pièce reste sur le disque.
*En observant que l'accélération centripète doit être créée par la force de frottement* [1]*:*

$$\mu_s mg = mR\omega^2$$
$$\downarrow$$
$$\mu_s = \frac{R\omega^2}{g}$$

*Et on déduit la valeur numérique demandée :* $\boxed{\mu_s = \frac{0.3 \times 3.14^2}{10} = 0.2961}$

*Il est judicieux de donner l'expression symbolique à ce type de question, plutôt qu'une valeur numérique, car la très grande majorité des étudiants n'obtiennent pas la bonne valeur numérique !*

[1]... ou que la pseudo-force centrifuge doit être balancée par la force de frottement, si vous préférez :-)

4. A un instant donné, le frottement n'est plus suffisant pour retenir le bloc.
   Calculer $t_c$ le temps nécessaire au bloc pour attendre le sol.

   *Il suffit de calculer le temps de la chute libre d'une hauteur $h$ :*

$$y(t_c) = h - \frac{gt_c^2}{2}$$

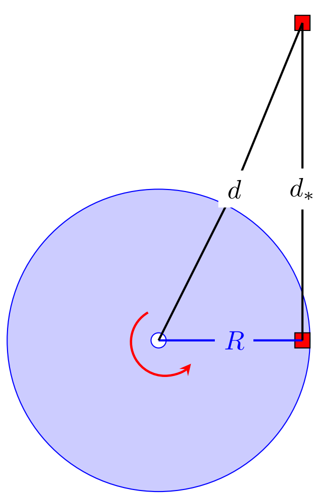
$$\downarrow$$

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

*On obtient immédiatement :* $\boxed{t_c = 0.63 \text{ s}}$

5. Quelle est la distance au sol du point d'impact par rapport à la base de l'axe du plateau ?

   *Il suffit de calculer le déplacement horizontal $d_*$ parcouru avec une vitesse $v = R\omega$ pendant un temps $t_c$.*




$$x(t_c) = R\omega \; t_c$$

$$\downarrow$$

$$d_* = 0.94.63 = 0.59$$

*Ensuite, pour obtenir la distance $d$ à la base de l'axe du plateau, il faut juste effectuer un peu de trigonométrie et tenir compte que le petit bloc poursuit une trajectoire tangente au plateau.*

$$d = \sqrt{R^2 + R^2\omega^2 t_c^2} = R\sqrt{1 + \omega^2 t_c^2}$$

*On peut finalement conclure :* $\boxed{d = 0.7 \text{ m}}$

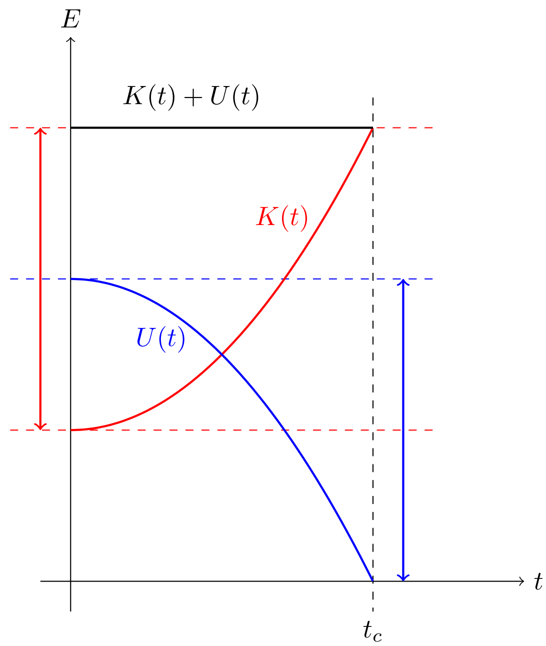
6. Dessiner l'évolution de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique en fonction du temps pendant la chute du bloc. On pose que l'énergie potentielle est nulle au niveau du sol.

   *Les évolutions temporelles de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle sont données par deux paraboles :*

$$K(t) = \frac{mR^2\omega^2}{2} + \frac{mg^2t^2}{2}$$

$$U(t) = mgh - \frac{mg^2t^2}{2}$$

*L'énergie mécanique est conservée : la perte d'énergie potentielle est entièrement transférée à l'énergie cinétique. Mais, le bloc a une énergie cinétique initiale liée à la vitesse de rotation du plateau $v = R\omega$. Il faut donc en tenir compte dans le dessin.*




*Ce graphe était vraiment assez simple à obtenir et il est donc assez impardonnable de ne pas obtenir l'allure correcte des deux paraboles.*

*Ce graphe n'est pas bien compliqué à obtenir avec un tout petit peu de bon sens physique !*
*C'est même parfois l'unique contribution correcte de certains étudiants !*
*Tracer deux droites est impardonnable !*
*Confondre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique est impardonnable !*
*Avoir une courbure erronée d'un ou des deux courbes fait perdre une partie des points...*
*Ne pas avoir la conservation de l'énergie mécanique fait aussi perdre une partie des points !*

## 2 Questions à choix multiples

*Attention !*
*Il y a toujours une et une seule bonne réponse !*
*Ne pas répondre ou cocher une réponse erronée ne fait rien perdre.*
*Par contre, il faut répondre correctement à six questions pour réussir cette partie.*
*Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)*
*Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !*
*Gommer pour les corrections !*
*N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !*

**Q1**

En partant du repos, un coureur de 70 kg parcourt une distance de six mètres en une seconde. En une approximation un peu rapide, on suppose que les jambes du coureur produisent une force horizontale constante $F$.

Que vaudrait cette force ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| **A** | $F = 840$ N | **A** | ■ |
| **B** | $F = 700$ N | **B** | □ |
| **C** | $F = 420$ N | **C** | □ |
| **D** | $F = 350$ N | **D** | □ |
| **E** | $F = 70$ N | **E** | □ |

**Q2**

Le temps de cuisson $t$ d'un oeuf dans l'eau bouillante est donné par l'expression suivante :

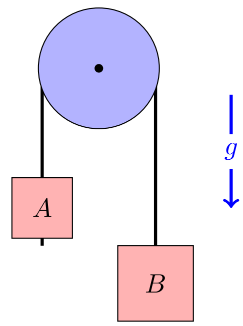
$$t = C\ \kappa^a\ V^b$$

où $\kappa$ est la diffusivité thermique de l'oeuf exprimée en $m^2/s$ et $V$ est le volume de l'oeuf exprimé en $m^3$, tandis que $C$, $a$ et $b$ sont des constantes sans dimensions. Quelle est la valeur de $b$ ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| **A** | $b = 0$ | **A** | □ |
| **B** | $b = 1$ | **B** | □ |
| **C** | $b = 2$ | **C** | □ |
| **D** | $b = 3/2$ | **D** | □ |
| **E** | $b = 2/3$ | **E** | ■ |

Q3

Deux blocs de masse $m_A < m_B$ respectivement sont reliés entre eux par une corde passant sur une poulie accrochée au plafond.
On néglige l'inertie de la poulie ainsi que la masse de la corde.




Quelle est l'amplitude de l'accélération des deux masses ?

**A** $a = g\,\dfrac{m_B}{(m_A + m_B)}$

**B** $a = g\,\dfrac{(m_A + m_B)}{(m_B - m_A)}$

**C** $a = g\,\dfrac{(m_B - m_A)}{(m_A + m_B)}$

**D** $a = g\,\dfrac{m_A}{m_B}$

**E** $a = g\,\dfrac{m_B}{m_A}$

**A** ☐

**B** ☐

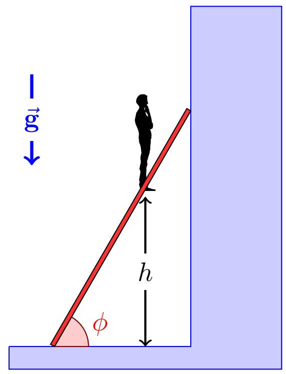
**C** ■

**D** ☐

**E** ☐

Q4

Un ouvrier se trouve sur une échelle d'épaisseur négligeable de masse $m$ et de longueur $L$ appuyée sur un mur avec un angle $\phi = 60^o$.
Entre le mur et l'échelle, il n'y a aucun frottement.
Le coefficient de frottement statique entre le sol et l'échelle est $\mu_s$.




Quelle est hauteur maximale $h$ que peut atteindre un ouvrier de masse $M$ avant que l'échelle ne commence à glisser ?

**A** $h = L\,\dfrac{\mu_s(m+M)6-m}{12M}$ — A ☐

**B** $h = L\,\dfrac{\mu_s(m+M)6-m\sqrt{3}}{4M}$ — B ■

**C** $h = L\,\dfrac{\mu_s(m+M)6+m\sqrt{3}}{2M}$ — C ☐

**D** $h = L\,\dfrac{\mu_s(m+M)6}{4M}$ — D ☐

**E** $h = L\,\dfrac{\mu_s(m+M)\sqrt{3}}{2M}$ — E ☐

Q5

On étudie le mouvement d'un enfant de masse $m$ sur un toboggan que l'on assimile à un plan incliné formant un angle $\theta$ avec l'horizontale.
A l'instant $t = 0$ s, la vitesse de l'enfant est nulle.
A l'instant $t = 1.5$ s, la vitesse de l'enfant vaut $v(t) = 1.5$ m/s.
La norme de l'accélération de la gravité est notée $g$.

Quel est le coefficient de frottement $\mu_c$ entre l'enfant et le toboggan ?

**A** $\mu_c = \dfrac{\sin(\theta)-1}{\cos(\theta)}$ — A ☐

**B** $\mu_c = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ — B ☐

**C** $\mu_c = \dfrac{mg\sin(\theta)-1}{mg\cos(\theta)}$ — C ☐

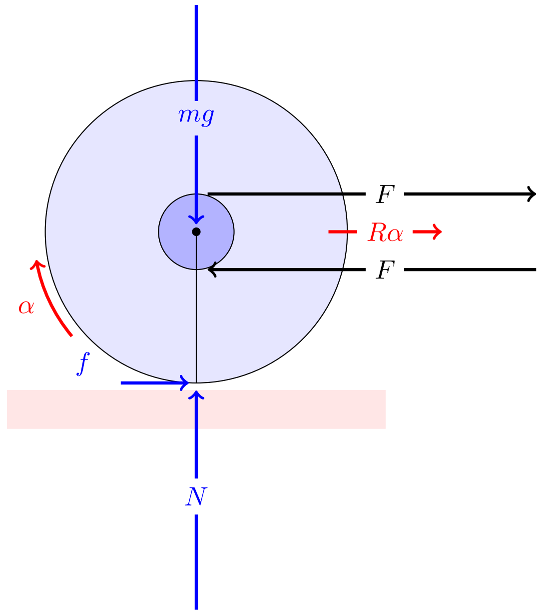
**D** $\mu_c = \dfrac{g\sin(\theta)-1}{g\cos(\theta)}$ — D ■

**E** $\mu_c = \dfrac{\sin(\theta)-g}{\cos(\theta)}$ — E ☐

| | | |
|---|---|---|
| Q6 | Une balle est lancée vers le haut.<br>On néglige les frottements de l'air.<br>Quelles sont les forces agissant sur la balle lors de sa montée ?<br><br>**A** La force de gravité.<br>**B** La force verticale qui pousse vers le haut.<br>**C** La force de gravité et une force verticale décroissante qui pousse vers le haut.<br>**D** La force de gravité et une force verticale constante qui pousse vers le haut.<br>**E** La force de gravité et une force verticale croissante qui pousse vers le haut. | **A** ■<br>**B** □<br>**C** □<br>**D** □<br>**E** □ |
| Q7 | Considérons un mouvement circulaire avec une vitesse angulaire constante $\omega$.<br>La norme de la vitesse et de l'accélération sont notées $v$ et $a$.<br>Quelle est l'unique paire de relations correctes ?<br><br>**A** $v = r\ \omega^2$ $a = r\ \omega$<br>**B** $v = r\ \omega^2$ $a = r\ \omega^4$<br>**C** $v = r\ \omega$ $a = v\ \omega$<br>**D** $v = r\ \omega$ $a = r^2\omega^2$<br>**E** $v = r/\omega$ $a = r/\omega^2$ | **A** □<br>**B** □<br>**C** ■<br>**D** □<br>**E** □ |
| Q8 | Quelles sont les unités d'une puissance ?<br><br>**A** $kg\ m^2\ /\ s^4$<br>**B** $N\ m\ /\ s^2$<br>**C** $kg^2\ m^2\ /\ s^2$<br>**D** $J\ s$<br>**E** $J\ /\ s$ | **A** □<br>**B** □<br>**C** □<br>**D** □<br>**E** ■ |

Q9

Considérons une roue de vélo de rayon $R$ entrainée par le mouvement de la chaine avec un pignon de rayon $r$. Par convention, une valeur positive des accélérations et forces représentées correspond à la donnée telle qu'elle est représentée sur le dessin.




Avec la convention choisie, l'équilibre de rotation s'écrit :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **A** | $I\alpha = 2rF + Rf$ | **A** | ☐ |
| **B** | $I\alpha = rF - Rf$ | **B** | ☐ |
| **C** | $I\alpha = rF + 2Rf$ | **C** | ☐ |
| **D** | $I\alpha = 2rF - Rf$ | **D** | ■ |
| **E** | $I\alpha = 2RF - rf$ | **E** | ☐ |

Q10

Un phénomène se reproduit identiquement à lui-même toutes les 8 secondes. Quelle est sa fréquence $f$ ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| **A** | $f = 0.125\ \mathrm{s}^{-1}$ | **A** | ■ |
| **B** | $f = 0.125$ s | **B** | ☐ |
| **C** | $f = 8\pi$ Hertz | **C** | ☐ |
| **D** | $f = 8$ Hertz | **D** | ☐ |
| **E** | $f = 8$ s | **E** | ☐ |

*N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.*

# Formulaire

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) &= \sum M_i
\end{aligned}$$

Lorsque les forces sont constantes,

$$\begin{aligned}
\Delta\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t \\
\Delta\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

**Mouvement d'un projectile**

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

**Mouvement circulaire uniformément accéléré :** $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire $\omega$ et accélération angulaire $\alpha$

**Bilan d'énergie**

$$\Delta \overbrace{\left(\tfrac{1}{2} m\ v^2\right)}^{K} = \sum \overbrace{\vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W}$$
$$= \sum \underbrace{\vec{\mathbf{F}}_{nc} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} - \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r}\Big)$$

**Moment d'une force dans le plan**

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_x F_y - r_y F_x = F\ r_\perp = F_\perp\ r = F r \sin(\theta)$$

**Ensemble de particules : un corps !**

$$m = \sum m_i$$
$$m\ \vec{\mathbf{x}}(t) = \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t)\Big)$$
$$m\ \vec{\mathbf{v}}(t) = \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t)\Big)$$

**Moment d'inertie**

$$I = \sum m_i\ r_i^2$$

**Rayon de giration**

$$m\ k^2 = \sum m_i\ r_i^2$$

**Théorème des axes parallèles**

$$I_h = m\ h^2 + I$$

**Moments d'inertie de corps rigides homogènes**

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ \dfrac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m\ \dfrac{L^2}{12}$