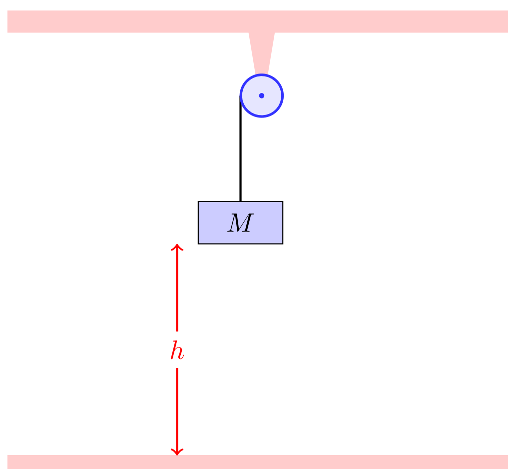
KINE11-EDPH11	
Août 2015	*Introduction à la mécanique*
IEPR 1011 -Rose-	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

1 On lâche une masse attachée à une poulie...

Attention ! Il faut répondre exclusivement sur l'unique feuille de réponse fournie.
Ce questionnaire peut servir de brouillon, mais ne sera jamais lu par le correcteur !

Une caisse de masse $M = 100$ kg est reliée par une corde de masse négligeable qui est enroulée autour d'une poulie fixée au plafond. La poulie est supposée être un cylindre creux de rayon $R = 10$ cm et de moment d'inertie $I = 0.1$ kg m^2. Initialement, la caisse se trouve à une hauteur $h = 5$ m par rapport au sol.

A l'instant $t = 0$, on lâche la caisse qui commence à descendre en entrainant la rotation de la poulie. La corde ne glisse pas autour de la poulie.



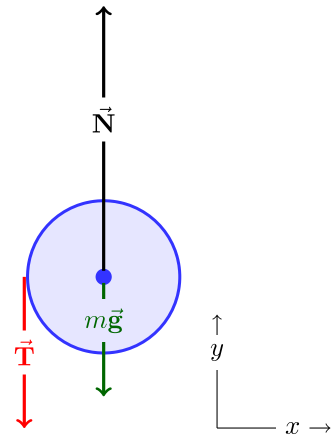
1. Quelle est la masse de la poulie ?

   Le moment d'inertie d'un cylindre creux est donné par $I = mR^2$.
   On en déduit immédiatement :

$$\boxed{m = \frac{I}{R^2} = \frac{0.1 \text{ kg m}^2}{0.1 \text{ m} \times 0.1 \text{ m}} = 10 \text{ kg}}$$

   La plupart des étudiants obtiennent cette valeur.
   L'unique difficulté consistait à exprimer correctement des centimètres en mètres !
   Attention, il faut bien distinguer la masse de la poulie et la masse de la caisse :-)

2. Dessiner l'ensemble des forces qui agissent sur la poulie pendant la descente de la caisse.



Les trois forces qui agissent sur la poulie sont :

- *Force de gravité :* $m\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$
- *Force normale du plafond :* $\vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix}$
- *Traction due à la corde :* $\vec{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -T \end{bmatrix}$

où g, T et N représentent la norme de vecteurs correspondants. Ce sont donc des nombres réels positifs.

Le plafond retient la poulie ! Le force exercée par le plafond sur la poulie doit donc compenser le poids de la poulie et la force de traction de la corde. Assez logiquement, le dessin devrait exprimer que la somme de la norme des deux forces qui tirent la poulie vers le bas est égale à la norme de la force exercée par le plafond sur la poulie !

Beaucoup d'étudiants dessinent une force du plafond qui pousse la poulie vers le bas : c'est évidemment incorrect ! D'autres donnent les forces sur la caisse : ce n'était pas ce qui était demandé !

3. Calculer l'accélération a de la masse pendant le descente.

On écrit les équations de la dynamique pour le chariot et la poulie, ainsi que la condition cinématique qui lie le mouvement de la corde et la rotation de la poulie. Il y a trois équations et trois inconnues α, a et T : il faut donc éliminer deux inconnues avec deux équations pour obtenir l'accélération...

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Ma & = & Mg - T \\ mR^2\alpha & = & TR \\ \alpha R & = & a \end{array} \right.$$

$$\downarrow$$

$$(M+m)\,a = Mg$$

$$a = \frac{M}{(M+m)}\,g$$

On obtient finalement : $\boxed{a = 8.92 \text{ m/s}^2}$

Beaucoup d'étudiants oublient de tenir compte de la rotation de la poulie et traitent le problème uniquement comme la chute libre d'un corps : c'est une erreur, même si l'impact de la rotation de la poulie est modeste sur les résultats finaux. Il faut bien observer que la rotation de la poulie diminue l'accélération de la caisse par rapport à une chute libre de celle-ci. Noter au passage que cet exercice était une copie simplifiée de l'examen de juin : les étudiants qui avaient bien compris la solution de l'examen de juin devaient être capables de faire celui-ci : c'est quasiment le même exercice en plus simple !

4. Déterminer la tension T dans la corde pendant la descente.

La dynamique de la caisse permet immédiatement de déduite : $\boxed{T \;=\; M(g-a) \;=\; 89.2 \text{ N}}$

La tension dans la corde est modeste, puisqu'elle ne sert plus qu'à faire tourner la poulie.
Ecrire que $T = Mg$ pendant la descente est donc vraiment une grosse bêtise !
Par contre, on peut aussi observer que $T = ma$ et en déduire la même valeur numérique...

5. Quel sera le temps t^* nécessaire pour que la masse située à une hauteur h touche le sol ?

Le calcul du temps de descente est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{at_*^2}{2} &= h \\ &\downarrow \\ t_* &= \sqrt{\frac{2h}{a}} \end{aligned}$$

Et ensuite comme $a = 8.92 \text{ m/s}^2$, on obtient immédiatement : $\boxed{t_* \;=\; 1.06 \text{ s}}$

6. Que vaut le travail effectué par la force de gravité à cet instant t^* ?

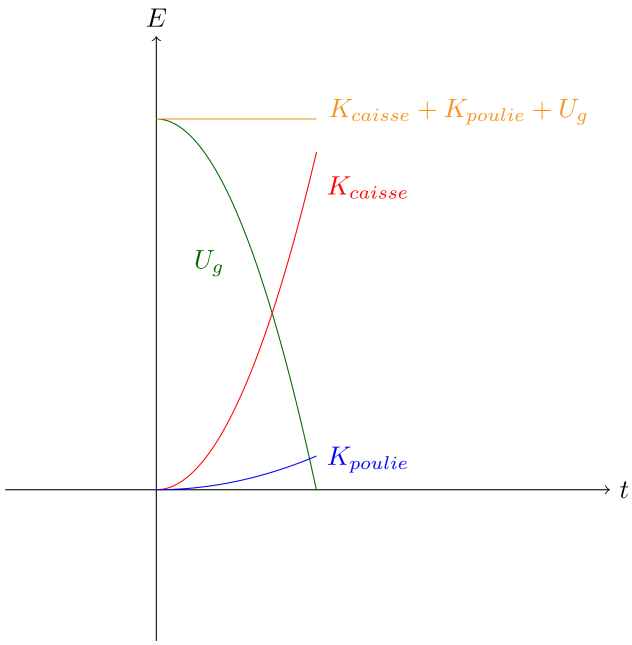
Le travail effectué par la force de gravité pendant la descente de la caisse est obtenue immédiatement puisque la force est constante et le déplacement connu.

$$\boxed{W \;=\; Mgh \;=\; 4905 \text{ J}}$$

Attention, le travail d'une force s'effectue sur un laps de temps et n'est pas instantané. Il s'agit donc bien du travail qu'a effectué la gravité depuis l'instant $t = 0$ jusqu'à l'instant $t = t_*$! Ceci ne dépendait en rien des sous-questions précédentes et pouvait être immédiatement obtenu.

7. Dessiner l'évolution de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique de la caisse en fonction du temps pendant la descente. On pose que l'énergie potentielle est nulle au niveau du sol.

   L'évolution de l'énergie potentielle et cinétique de la caisse en fonction du temps est donnée par :



   Tracer des droites est incorrect, car c'est alors l'évolution en fonction de la distance !
   Tracer l'énergie cinétique globale du système n'est pas correct !
   Une partie de l'énergie potentielle est transformée en énergie cinétique de rotation de la poulie.
   Pour réussir cette question, il est donc vraiment indispensable que l'énergie cinétique de la caisse à la fin de la descente soit inférieure à l'énergie potentielle initiale.
   Par contre, il n'était pas requis de tracer la courbe bleue K_{poulie}

   Globalement, le bilan d'énergie s'écrit :

$$\frac{Mv_*^2}{2} + \frac{I\omega_*^2}{2} = Mgh$$

En y substituant les valeurs numériques avec $v_* = at_*$ *et* $\omega_* = v_*/R$

$$4459 \text{ J} + 446 \text{ J} = 4905 \text{ J}$$

   Au passage, c'est exactement le même graphe que celui demandé en juin : pour une fois, reproduire servilement le graphe était une bonne idée : mais si c'était l'unique contribution correcte de votre copie, cela ne démontre malheureusement pas une très grande compréhension de la matière. Malgré la très grande similitude entre les questions de juin et de septembre, les performances des étudiants ont été assez décevantes au grand dam du correcteur.... et vraisemblablement des étudiants.

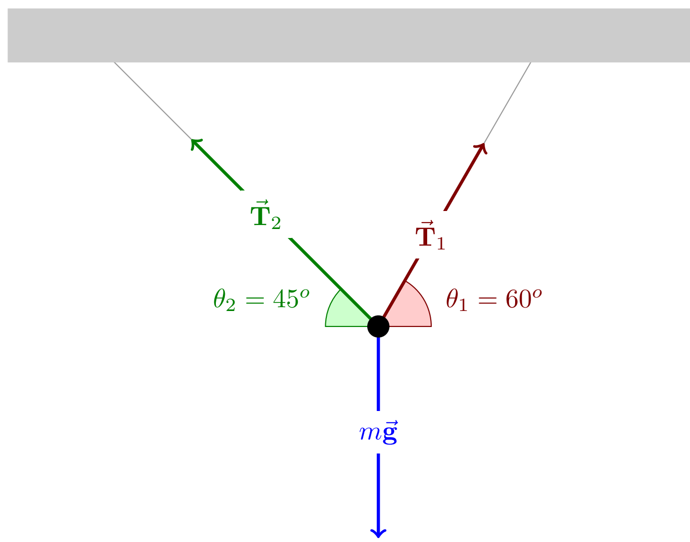
Répondez à chaque sous-question et uniquement à ce qui est demandé.
Faites des dessins distincts pour chaque sous-question.
Soyez précis dans les graphes.
Chaque sous-question peut être résolue de manière symbolique, si les résultats précédents font défaut !
Détaillez vos calculs afin de clairement montrer votre démarche.
Pensez à encadrer les résultats principaux pour les mettre en évidence.

2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Une réponse correcte rapporte 4 points, une réponse erronée en fait perdre 1 point.
Ne rien cocher ne fait rien gagner et ne fait rien perdre.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !
Gommer pour les corrections !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

Q1

Une sphère de masse m est suspendue par deux cordes de masse négligeable.



Quelle est l'unique équation correcte parmi les cinq relations ?

A $T_2 = \sqrt{3}\, T_1$ ☐
B $2\sqrt{3}\, mg = T_1(3+\sqrt{3})$ ■
C $mg = T_1(1+\sqrt{3})$ ☐
D $2T_1 = mg(1+\sqrt{3})$ ☐
E $T_1 = 2mg(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ ☐

Q2

Une voiture roule à une vitesse constante de 164 km/h, tandis que son moteur développe une puissance de 60000 Watt
Quel est la valeur de la force f (frottement au sol et trainée de l'air) s'opposant au déplacement de la voiture ?

A $f = 423\ N$ ☐
B $f = 578\ N$ ☐
C $f = 820\ N$ ☐
D $f = 1317\ N$ ■
E $f = 2321\ N$ ☐

Q3

Si la somme de forces sur un corps est nulle, que peut-on déduire ?
Une seule affirmation est correcte !

A	Ce corps reste au repos dans un repère inertiel.	**A**	☐
B	Ce corps reste au repos ou en mouvement à vitesse constante.	**B**	☐
C	L'accélération de ce corps est nulle.	**C**	■
D	La vitesse de ce corps est égale à la vitesse du repère mobile	**D**	☐
E	Ce corps a une vitesse constante dans un repère mobile.	**E**	☐

Q4

Un cylindre plein de masse m et de rayon R subit en son centre une force de traction horizontale F et roule sans glisser sur une surface horizontale.
Quelle condition doit satisfaire le coefficient de frottement μ_s pour empêcher le glissement ?

A	$\mu_S > \dfrac{F}{mg}$	**A**	☐
B	$\mu_S > \dfrac{mg}{F}$	**B**	☐
C	$3\mu_S > F$	**C**	☐
D	$F\mu_S < 3mg$	**D**	☐
E	$3mg\ \mu_S > F$	**E**	■

Q5

Quelles sont les unités d'un travail ?

A	$N\ m^2$	**A**	☐
B	$kg\ m^2\ /\ s^3$	**B**	☐
C	$kg\ m^2\ /\ s^2$	**C**	■
D	$J\ s$	**D**	☐
E	$J\ m\ s^2$	**E**	☐

Q6

La masse de Jacques est m_1 tandis que la masse de Pierre est m_2. Ils se trouvent à une distance de L l'un de l'autre sur un lac gelé où ils peuvent glisser sans aucun frottement. Ils sont initialement immobiles. Ensuite, ils tirent chacun sur une même corde tendue entre eux de sorte que la vitesse de Pierre est v_2. La longueur de la corde entre eux se réduit donc progressivement.
Quelle est la distance d entre leur point de rencontre et la position initiale de Jacques ?

A $d = \frac{m_2}{m_1} L$ — **A** ☐

B $d = \frac{m_1}{m_2} L$ — **B** ☐

C $d = \frac{m_2}{m_1 + m_2} L$ — **C** ■

D $d = \frac{m_1}{m_1 + m_2} L$ — **D** ☐

E $d = \frac{m_1 + m_2}{m_2 - m_1} L$ — **E** ☐

Q7

Un canon dont l'élévation du tube est donnée par un angle α se trouve sur la plate-forme d'un wagon initialement au repos. La masse totale du wagon et du canon est M. Un obus de masse m est tiré. La vitesse v de cet obus par rapport au canon est connue à la sortie du tube de la pièce d'artillerie. Tous les frottements sont négligés.
Quelle sera la vitesse V de recul du wagon juste après le tir ?

A $V = \frac{mv\cos(\alpha)}{M + m}$ — **A** ■

B $V = \frac{mv}{M - m}$ — **B** ☐

C $V = \frac{mv\cos(\alpha)}{M}$ — **C** ☐

D $V = \frac{(M - m)\ v\cos(\alpha)}{M}$ — **D** ☐

E $V = \frac{mv\cos(\alpha)}{M - m}$ — **E** ☐

Q8

Pour modéliser la chute d'un parachutiste, on introduit une force de trainée définie par :

$$F_D = kv^2$$

Quelle est l'unique affirmation incorrecte ?

A	La vitesse limite du parachutiste est $\sqrt{mg/k}$	**A**	☐
B	La constante k dépend de la masse volumique de l'air.	**B**	☐
C	La force de trainée ralentit la chute du parachutiste.	**C**	☐
D	A basse vitesse, la force de trainée s'écrit plutôt $F_D = \gamma v$	**D**	☐
E	La force de trainée est une force conservative.	**E**	■

Q9

Un camion de masse m descend en roue libre une pente avec une inclinaison α à vitesse constante. On a coupé le moteur et débrayé. Tous les effets de frottement sont supposés constants : la force de frottement ne change pas !
Quelle doit être la force F fournie par le moteur pour que la camion puisse remonter cette pente avec la même vitesse ?

A	$F = \dfrac{mg\tan(\alpha)}{2}$	**A**	☐
B	$F = 2mg\sin(\alpha)$	**B**	■
C	$F = \dfrac{mg\cos(\alpha)}{2}$	**C**	☐
D	$F = \dfrac{mg\cos(\alpha)}{2\sin(\alpha)}$	**D**	☐
E	$F = \dfrac{mg}{2\sin(\alpha)}$	**E**	☐

Q10

Une voiture d'une masse m atteint une vitesse v en partant du repos en un temps t. Pendant ce démarrage, son accélération est constante.
Quelle est la distance d parcourue par la voiture dans ce laps de temps t ?

A	$d = \dfrac{tv}{2}$	**A**	■
B	$d = \dfrac{\sqrt{mv^2}}{2}$	**B**	☐
C	$d = \dfrac{mv^2}{2}$	**C**	☐
D	$d = \sqrt{\dfrac{tv}{2}}$	**D**	☐
E	$d = \dfrac{2tv}{3}$	**E**	☐

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\left(I\ \omega\right) &= \sum M_i
\end{aligned}$$

Formulaire

Lorsque les forces sont constantes,

$$\begin{aligned}
\Delta\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t \\
\Delta\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

Mouvement d'un projectile

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$\Delta\overbrace{\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2\right)}^{K} = \sum\overbrace{\vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W}$$

$$= \sum\underbrace{\vec{\mathbf{F}_{nc}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} - \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r}\Big)$$

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_xF_y - r_yF_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_xF_y - r_yF_x = F\ r_\perp = F_\perp\ r = Fr\sin(\theta)$$

Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$

$$m\ \vec{\mathbf{x}}(t) = \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t)\Big)$$

$$m\ \vec{\mathbf{v}}(t) = \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t)\Big)$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\ r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\ k^2 = \sum m_i\ r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\ h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ \frac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m\ \frac{L^2}{12}$