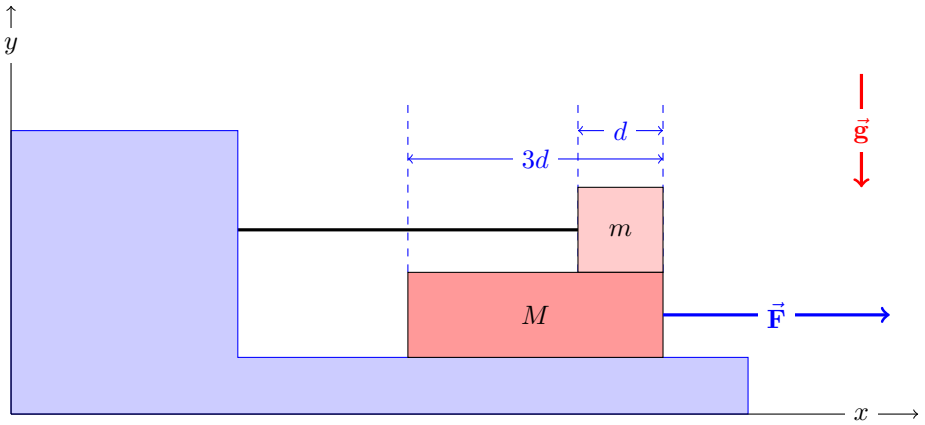
| | |
|---|---|
| **KINE11-EDPH11** | |
| **Août 2017** | *Introduction à la mécanique* |
| **IEPR 1011 -Bleu-** | *Vous pouvez conserver cet énoncé !* |

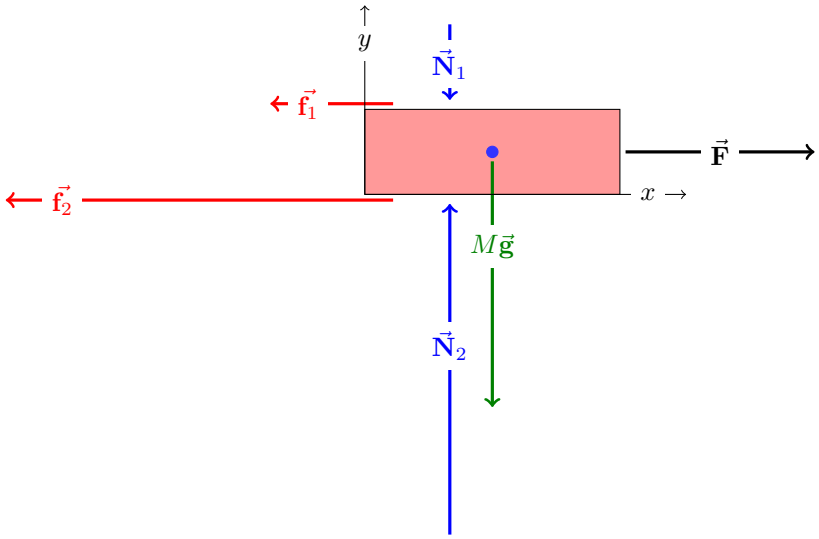
# 1 Deux blocs superposés...

Relié au mur par une corde, un bloc de masse $m = 2$ kg est posé sur un bloc de masse $M = 6$ kg.
A l'instant $t = 0$, on applique une force constante $F = 24$ N sur le bloc inférieur.
On observe alors que ce bloc acquiert une accélération constante $a = 3$ m/s$^2$.
Le bloc supérieur retenu par la corde reste immobile, du moins tant que le bloc inférieur le soutient :-)
En $t = 0$, les deux blocs sont alignés à droite et leurs longueurs sont $d = 10$ cm et $3d = 30$ cm.
Comme toutes les surfaces sont identiques, les coefficients $\mu_c$ et $\mu_s$ sont uniques.
Dans les calculs, on utilisera $g = 10$ m/s$^2$.




1. Dessiner l'ensemble des forces sur le bloc inférieur pendant le début de son mouvement.
   Y indiquer clairement le nom et la notation habituelle pour chacune des forces.

   *Les forces qui agissent sont les réactions normales (du sol et du bloc supérieur), les frottements (avec le sol et le bloc supérieur), la gravité et la force de traction.*



*Il faut donc citer :*

- *Force de gravité :* $m\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix}$
- *Force normale du bloc supérieur :* $\vec{\mathbf{N}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$
- *Force normale du sol :* $\vec{\mathbf{N}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ (M+m)g \end{bmatrix}$
- *Force due au frottement avec le bloc supérieur :* $\vec{\mathbf{f}}_1 = \begin{bmatrix} -\mu_c mg \\ 0 \end{bmatrix}$
- *Force due au frottement avec le sol :* $\vec{\mathbf{f}}_2 = \begin{bmatrix} -\mu_c (M+m)g \\ 0 \end{bmatrix}$
- *Force de traction :* $\vec{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \end{bmatrix}$

*Cette première question n'est pas du tout triviale. Il est essentiel de bien comprendre la présence de deux forces de frottement qui s'opposent toutes deux au mouvement du bloc. Bien voir aussi que ces forces de frottement sont proportionnelles aux forces normales correspondantes. Une fois que cette partie de l'énoncé est compris, tout le reste est vraiment de l'algèbre assez élémentaire.*

2. Calculer la norme de la tension constante $T$ dans la corde entre le bloc supérieur et le mur, lorsque le bloc inférieur est en mouvement et que le bloc supérieur reste immobile.

3. Quel est le coefficient de frottement cinétique $\mu_c$ ?

   *Le long de l'axe $x$, on obtient l'expression de $T$ en écrivant la loi de Newton pour le bloc supérieur :*

$$\begin{aligned} 0 &= T - \mu_c mg \\ &\downarrow \\ T &= \mu_c mg \end{aligned}$$

*Ensuite, pour obtenir la valeur numérique de $T$, il faut déduire $\mu_c$ en écrivant la loi de Newton pour le bloc inférieur le long de l'axe $x$ :*

$$\begin{aligned} Ma &= F - \mu_c mg - \mu_c (m+M)g \\ &\downarrow \\ \mu_c &= \frac{F - Ma}{(2m+M)g} \end{aligned}$$

*Et on déduit les deux valeurs numériques demandées :*

$$\begin{aligned} \mu_c &= \frac{24-18}{(4+6)\times 10} = 0.06 \\ T &= 0.06 \times 2 \times 10 = 1.2 \text{ Newton} \end{aligned}$$

*On observe bien la force $F$ contribue à s'opposer aux deux forces de frottement et à créer le mouvement du bloc inférieur. De manière un peu taquine, on observe que l'obtention de la réponse de la sous-question deux fournit comme résultat annexe la réponse de la sous-question trois : cela a créé une certaine perplexité à certains étudiants : mais rien ne mentionnait dans l'énoncé qu'on pouvait obtenir la valeur numérique de $T$ sans obtenir la valeur numérique de $\mu_c$ :-) Evidemment, on aurait pu permuter les deux sous-questions, mais il faut aussi tenir compte de l'esprit taquin de l'enseignant qui apprécie parfois de brouiller les pistes !*

4. Quelle est la valeur maximale possible du coefficient de frottement statique $\mu_s$ ?

   *Il suffit d'écrire la loi de Newton pour le bloc inférieur le long de l'axe $x$ en supposant qu'il reste immobile (et donc que $a = 0$ !) :*

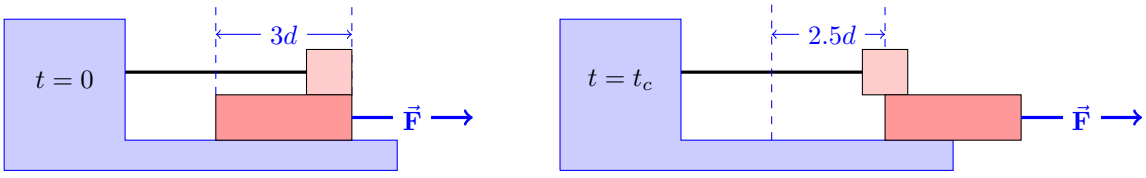
$$\begin{aligned} 0 &= F - \mu_s mg - \mu_s(m+M)g \\ &\downarrow \\ \mu_s &= \frac{F}{(2m+M)g} \end{aligned}$$

*Et on déduit la valeur numérique de $\mu_s$ :* $\boxed{\mu_s = \frac{24}{(4+6)\times 10} = 0.24}$

*On observe bien que $\mu_s > \mu_c$ : obtenir une résultat inverse serait évidemment anormal et devrait vous alerter qu'une erreur de calcul ou de logique s'est glissée dans vos développements !*

5. A quel instant $t_c$, le bloc supérieur va-t-il se mettre en mouvement ?

   *Le bloc supérieur se mettra en mouvement lorsque son centre de gravité ne sera plus au dessus du bloc inférieur. Plus précisément, il va commencer à basculer sur la gauche à l'instant $t = t_c$. Cela arrivera lorsque le bloc inférieur aura parcouru une distance égale à 25 cm !*




*On obtient alors immédiatement la valeur numérique de $t_c$ en utilisant la cinématique d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA) !*

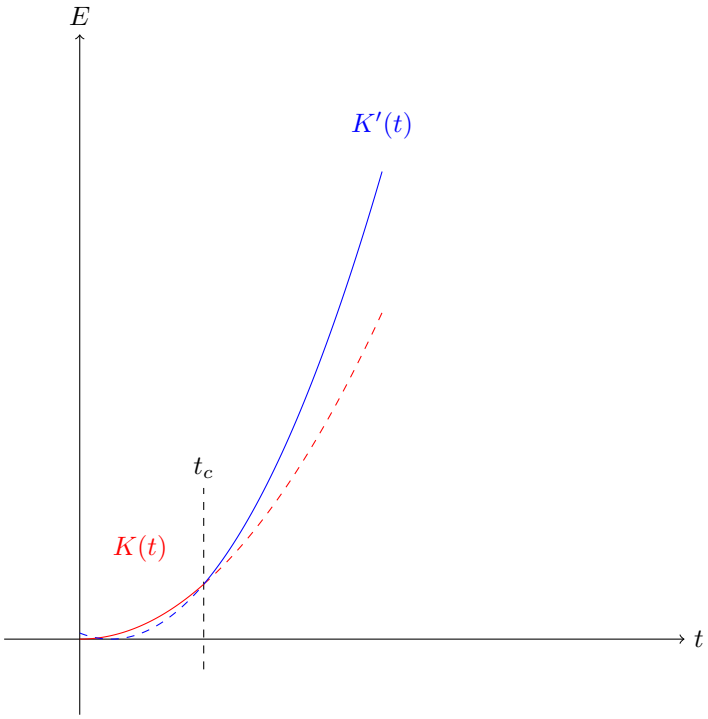
$$\begin{aligned} \frac{5d}{2} &= \frac{at_c^2}{2} \\ &\downarrow \\ t_c &= \sqrt{\frac{5d}{a}} \end{aligned}$$

*On déduit finalement :* $\boxed{t_c \;=\; \sqrt{\frac{1}{6}} \;=\; 0.408 \text{ s}}$

*Ce calcul est vraiment élémentaire !*
*Hélas, beaucoup d'étudiants oublient de convertir les centimètres en mètres (impardonnable !).*
*Hélas, beaucoup d'étudiants prennent la gravité comme accélération (impardonnable !).*
*Par contre, le correcteur était plus compréhensif pour les quelques étudiants qui ont estimé que le bloc supérieur ne chuterait que quand le bloc inférieur aurait parcouru une distance de $3d$....*

6. Dessiner la variation de l'énergie cinétique du bloc inférieur en fonction du temps.
   Indiquer clairement sur le graphe l'instant $t_c$ et comment la courbe est modifiée à cet instant !

   *L'évolution de l'énergie cinétique en fonction du temps est donnée par :*




*Tracer des droites est incorrect, car c'est alors l'évolution en fonction de la distance !*

*Il faut tracer deux paraboles : en $t = t_c$, le frottement dû au bloc supérieur disparaît et l'accélération devient plus importante : donc l'accroissement de l'énergie cinétique va devenir encore plus rapide. L'évolution de l'énergie cinétique pour $t > t_c$ doit donc se trouver au dessus de la première parabole.*

*Pour les étudiants vraiment curieux, l'expression mathématique de l'énergie cinétique pour les temps $t < t_c$ est donnée par l'expression suivante (non demandée) :*

$$K(t) = \frac{M}{2}\Big(3t\Big)^2$$

*Et pour les temps $t > t_c$, on a l'expression suivante (toujours non demandée évidemment)*

$$K'(t) = \frac{M}{2}\Big(3.2(t - t_c) + 3t_c\Big)^2 \;>\; \frac{M}{2}\Big(3t\Big)^2$$

*La figure n'est pas à l'échelle, car les deux courbes sont nettement plus proches en réalité :-)*

## 2 Questions à choix multiples

*Attention !*
*Il y a toujours une et une seule bonne réponse !*
*Une réponse correcte rapporte 4 points, une réponse erronée fait perdre 1 point.*
*Ne rien cocher ne fait rien gagner et ne fait rien perdre.*
*Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)*
*Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !*
*Gommer pour les corrections !*
*N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !*

Q1

Un canon dont l'élévation du tube est donnée par un angle $\alpha$ se trouve sur la plate-forme d'un wagon initialement au repos. La masse totale du wagon et du canon est $M$. Un obus de masse $m$ est tiré. La vitesse $v$ de cet obus par rapport au canon est connue à la sortie du tube de la pièce d'artillerie.
Tous les frottements sont négligés.
Quelle sera la vitesse $V$ de recul du wagon juste après le tir ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| **A** | $V = \dfrac{mv\cos(\alpha)}{M+m}$ | **A** | ■ |
| **B** | $V = \dfrac{mv}{M-m}$ | **B** | □ |
| **C** | $V = \dfrac{mv\cos(\alpha)}{M}$ | **C** | □ |
| **D** | $V = \dfrac{(M-m)\ v\cos(\alpha)}{M}$ | **D** | □ |
| **E** | $V = \dfrac{mv\cos(\alpha)}{M-m}$ | **E** | □ |

Q2

Un ballon de football parcourt une trajectoire parfaitement parabolique.
Quelle est l'unique affirmation qui est exacte ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| **A** | La résultante des forces qui s'exercent sur le ballon a la même direction et le même sens que le vecteur vitesse. | **A** | □ |
| **B** | La résultante des forces qui s'exercent sur le ballon a la même direction que le vecteur vitesse, mais avec un sens opposé. | **B** | □ |
| **C** | L'unique force qui agit sur le ballon est horizontale. C'est le résultat de l'impulsion initiale du joueur de football ! | **C** | □ |
| **D** | Il n'y a aucune force qui agit sur le ballon. | **D** | □ |
| **E** | L'effet du frottement de l'air sur la ballon est négligeable. | **E** | ■ |

Q3

Un phénomène se reproduit identiquement à lui-même toutes les 4 secondes.
Quelle est sa fréquence $f$ ?

| | | |
|---|---|---|
| **A** | $f = 0.25$ s$^{-1}$ | **A** ■ |
| **B** | $f = 0.25$ s | **B** □ |
| **C** | $f = 4\pi$ Hertz | **C** □ |
| **D** | $f = 4$ Hertz | **D** □ |
| **E** | $f = 4$ s | **E** □ |

Q4

En écartant les deux bras, une patineuse est en rotation autour d'un axe vertical passant par sa tête. La vitesse angulaire de rotation est constante.
Quelle est l'unique affirmation exacte ?

| | | |
|---|---|---|
| **A** | Les mains de la patineuse ne sont soumises à aucune accélération. | **A** □ |
| **B** | Les mains de la patineuse sont soumises à une accélération dont la norme est constante. | **B** ■ |
| **C** | Les mains de la patineuse sont soumises à une accélération constante. | **C** □ |
| **D** | La vitesse des mains est identique à celle des parties du corps proches de l'axe car le mouvement est uniforme. | **D** □ |
| **E** | Un mouvement circulaire ne peut jamais être uniforme. | **E** □ |

Q5

Le vent applique une force constante $F = 200$ N sur la voile d'une planche de surf. La planche est animée d'un mouvement uniforme rectiligne avec une vitesse $v =$ 10 m/s. Si le vecteur vitesse fait un angle de $60^o$ par rapport à la direction de la force, quelle est la puissance $P$ de cette force ?

| | | |
|---|---|---|
| **A** | $P = 0$ Watt | **A** □ |
| **B** | $P = 870$ Watt | **B** □ |
| **C** | $P = 1000$ Watt | **C** ■ |
| **D** | $P = 1732$ Watt | **D** □ |
| **E** | $P = 2000$ Watt | **E** □ |

Q6

On veut comparer le travail requis pour déplacer une masse $m$ d'un point $A$ à un autre point quelconque $C$ en choisissant deux trajets différents.
Aucune force n'agit sur la masse, à l'exception de la force de gravité $m\vec{\mathbf{g}}$.

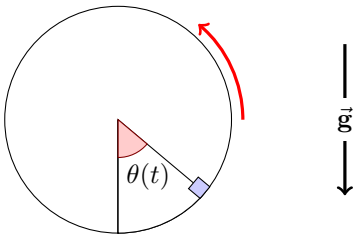
- On effectue un travail $W_1$ en effectuant rapidement un déplacement vertical $AB$ suivi d'un déplacement horizontal $BC$ de longueur $a$.
- On effectue un travail $W_2$ en se déplaçant de manière uniforme et lente le long du segment $AC$ de longueur $b$.

Faire un schéma peut être utile pour comprendre la question :-)
Quelle est l'unique relation exacte ?

| | | |
|---|---|---|
| **A** | $W_1 = W_2$ | **A** ■ |
| **B** | $W_1 = mgb$ | **B** □ |
| **C** | $W_2 = mga$ | **C** □ |
| **D** | $W_1 > W_2$ | **D** □ |
| **E** | $W_1 = W_2 - mg\sqrt{b^2 - a^2}$ | **E** □ |

Q7

Un petit bloc est placé à l'intérieur d'un cylindre de rayon $R$ qui tourne avec une vitesse angulaire $\omega$ autour d'un axe horizontal. Le coefficient de frottement statique entre le bloc et le cylindre est $\mu_s$.




Quelle relation doit être satisfaite à l'instant où le bloc commence à glisser ?

| | | |
|---|---|---|
| **A** | $g\sin(\theta) = \mu_s R\omega^2$ | **A** ☐ |
| **B** | $g\sin(\theta) + R\omega^2 = \mu_s g\cos(\theta)$ | **B** ☐ |
| **C** | $\tan(\theta) = \mu_s$ | **C** ☐ |
| **D** | $g\cos(\theta) = \mu_s\left(g\sin(\theta) + R\omega^2\right)$ | **D** ☐ |
| **E** | $\tan(\theta) = \mu_s\left(1 + \dfrac{R\omega^2}{g\cos(\theta)}\right)$ | **E** ■ |

Q8

Les normes de la vitesse et de l'accélération d'un point matériel sont constantes au cours du temps et non nulles.
Quelle est la nature du mouvement ?

| | | |
|---|---|---|
| **A** | Un mouvement rectiligne uniforme. | **A** ☐ |
| **B** | Un mouvement circulaire uniforme. | **B** ■ |
| **C** | Un mouvement rectiligne uniformément circulaire. | **C** ☐ |
| **D** | Un mouvement circulaire non-uniforme. | **D** ☐ |
| **E** | Un mouvement rectiligne uniformément accéléré. | **E** ☐ |

Q9

Une masse $m = 1000$ kg effectue un mouvement circulaire.
La norme de la vitesse est constante $v =$ 100m/s.
Le rayon du mouvement vaut $R = 1$ km.
Pour maintenir le mouvement circulaire, il faut imposer une force centripète $F$ requise pour s'opposer à l'effet de l'accélération centrifuge !

| | | |
|---|---|---|
| **A** | $F = 10$ Newton | **A** ☐ |
| **B** | $F = 100$ Newton. | **B** ☐ |
| **C** | $F = 1000$ Newton | **C** ☐ |
| **D** | $F = 10000$ Newton | **D** ■ |
| **E** | $F = 100000$ Newton | **E** ☐ |

| | | |
|---|---|---|
| Q10 | Quelles sont les unités d'une puissance ?<br><br>**A** $kg\ m^2\ /\ s$<br>**B** $kg^2\ m^2\ /\ s^2$<br>**C** $J\ /\ s$<br>**D** $J\ m\ s^2$<br>**E** $N\ m\ /\ s^2$ | **A** ☐<br>**B** ☐<br>**C** ■<br>**D** ☐<br>**E** ☐ |

*N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\left(I\ \omega\right) &= \sum M_i
\end{aligned}$$

# Formulaire

Lorsque les forces sont constantes,

$$\begin{aligned}
\Delta\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \Delta t \\
\Delta\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta \vec{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

**Mouvement d'un projectile**

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

**Mouvement circulaire uniformément accéléré :** $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire $\omega$ et accélération angulaire $\alpha$

**Bilan d'énergie**

$$\begin{aligned} \Delta\overbrace{\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2\right)}^{K} &= \sum\overbrace{\vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W} \\ &= \sum\underbrace{\vec{\mathbf{F}_{nc}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} - \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r}\Big) \end{aligned}$$

**Moment d'une force dans le plan**

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_xF_y - r_yF_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_xF_y - r_yF_x = F\ r_\perp = F_\perp\ r = Fr\sin(\theta)$$

**Ensemble de particules : un corps !**

$$\begin{aligned} m &= \sum m_i \\ m\ \vec{\mathbf{x}}(t) &= \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t)\Big) \\ m\ \vec{\mathbf{v}}(t) &= \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t)\Big) \end{aligned}$$

**Moment d'inertie**

$$I = \sum m_i\ r_i^2$$

**Rayon de giration**

$$m\ k^2 = \sum m_i\ r_i^2$$

**Théorème des axes parallèles**

$$I_h = m\ h^2 + I$$

**Moments d'inertie de corps rigides homogènes**

| | |
|---|---|
| Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution | $I = m\ R^2$ |
| Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution | $I = m\ \frac{R^2}{2}$ |
| Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central | $I = m\ \frac{L^2}{12}$ |