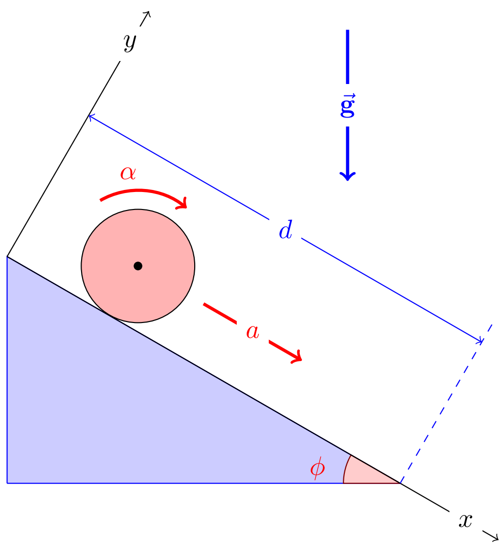
KINE11-EDPH11	
Août 2018	*Introduction à la mécanique*
IEPR 1011 -Rose-	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

1 Une roue descend en roulant sans glisser...



On considère une roue qui est un cylindre plein de rayon $R = 0.5$ m et de masse $m = 2$ kg. Cette roue descende en roulant sans glisser sur un plan incliné avec un angle $\theta = 30^o$ avec l'horizontale.

A l'instant $t = 0$, la roue se met en mouvement.
En $t = t_*$, la roue a parcouru une distance $d = 8$ m.

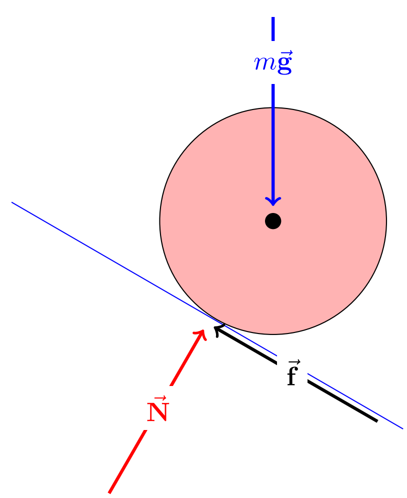
Dans les calculs, on utilisera $g = 10$ m/s^2.
Tous les frottements avec l'air sont négligés.

1. Citer et dessiner l'ensemble de toutes les forces sur la roue pour $t > 0$.
   Y indiquer clairement le nom et la notation habituelle pour chacune des forces.

   Il faut juste considérer la gravité et la force normale de réaction du sol sur la roue et le frottement. Il est admis de considérer une seule force de réaction globalisant la composante normale et le frottement et d'effectuer la suite de l'exercice en utilisant les deux composantes de la réaction globale du sol sur la roue.
   Toutes les forces sont constantes car il s'agit d'un simple MRUA : si, si !

   Il faut donc citer :

   - *Force de gravité :* $m\vec{g} = mg \begin{bmatrix} sin(\theta) \\ -cos(\theta) \end{bmatrix}$
   - *Force de réaction normale du sol :* $\vec{N} = mg \begin{bmatrix} 0 \\ cos(\theta) \end{bmatrix}$
   - *Force de frottement :* $\vec{f} = \begin{bmatrix} -f \\ 0 \end{bmatrix}$



2. Calculer le moment d'inertie de la roue.

   Il faut utiliser l'expression du moment d'inertie d'un cylindre plein et on conclut donc.

$$\boxed{I \;=\; \frac{MR^2}{2} \;=\; 0.25 \text{ kg m}^2}$$

   Noter au passage que cette formule était directement fournie dans le formulaire annexé au questionnaire. En outre, noter que la même question avait été posée en juin et que la solution vous était fournie... Il était donc vraiment impardonnable de ne pas obtenir cette valeur.

3. Obtenir l'accélération a du centre de masse de la roue pour $t > 0$.

   Il y a deux inconnues a et f dans ce problème : il faudra donc considérer deux équations pour obtenir la solution. Plus concrètement, on considèrera la translation et la rotation de la roue. On considère les vecteurs tels que défini lors du dessin pour la première question. Tout d'abord, on obtient l'expression de f en écrivant la conservation de la quantité de mouvement dans l'axe des x :

$$ma \;=\; mg \underbrace{sin(\theta)}_{\frac{1}{2}} - f$$

$$\downarrow$$

$$f \;=\; \frac{m(g-2a)}{2}$$

   Ensuite, on écrit la conservation du moment cinétique, en tenant compte que $\alpha R = a$:

$$\begin{aligned} I\alpha &= fR \\ \frac{mR^2}{2}\,\frac{a}{R} &= \frac{m(g-2a)}{2}\,R \\ a &= g - 2a \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$a \;=\; \frac{g}{3}$$

   Et on déduit la valeur numérique demandée : $\boxed{a \;=\; \frac{10}{3} \;=\; 3.33 \text{ m s}^2}$

   On observe bien que l'accélération de la roue est inférieure à g puisque la force de gravité doit aussi servir à générer une accélération angulaire pour la roue....

4. Combien de tours[1] a effectué la roue à l'instant t_* ?

   Il suffit de considérer le déplacement de la roue pour connaître le nombre de tours n_* :-)

$$2\pi\ n_*\ R = d$$

$$\downarrow$$

$$n_* = \frac{d}{2\pi R}$$

On conclut donc : $\boxed{n_* = \frac{d}{\pi} = 2.54 \text{ tours}}$

Le nombre de tours n_* peut être obtenu directement en tenant compte du déplacement de la roue, même si aucun des résultats précédents n'a été obtenu. Bien observer qu'il n'est pas nécessaire de connaître la vitesse pour résoudre cette question ! Beaucoup d'étudiants s'égarent dans des calculs inutiles et incohérents, alors que cette question est une copie conforme de ce qui a été demandé en juin : à nouveau, il est impardonnable de ne pas obtenir ce résultat !

5. Quelle est la vitesse de la roue à cet instant t_* ?

   Comme l'énergie mécanique est conservée dans un roulement sans glissement : la force de frottement ne travaille pas et ne génère donc aucune dissipation d'énergie. La force de frottement sert uniquement à transformer de l'énergie cinétique de translation en énergie de rotation :-)

   Le bilan d'énergie est donné par

$$mgd\ \sin(\theta) = \frac{1}{2}\ mv_*^2 + \frac{1}{2}\ I\omega_*^2$$

$$mgd\ \sin(\theta) = \frac{1}{2}\ \left(mv_*^2 + \frac{mR^2}{2}\frac{v_*^2}{R^2}\right)$$

$$\downarrow$$

$$gd\ \underbrace{sin(\theta)}_{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\ v_*^2$$

On conclut donc : $\boxed{v_* = \sqrt{\frac{40 \times 4}{3}} = 7.3 \text{ m/s}^2}$

[1] On s'attend donc à une valeur non entière en tenant compte des tours partiellement effectués :-)

6. Quelle serait cette vitesse si toute la masse de roue était concentrée sur la circonférence ?

   On refait exactement le même calcul qui dans la question précédente, mais l'inertie de la roue s'écrit maintenant sous la forme : $I = mR^2$

   Le bilan d'énergie est maintenant donné par

$$mgd\ \sin(\theta) = \frac{1}{2}\ mv_*^2 + \frac{1}{2}\ I\omega_*^2$$

$$mgd\ \sin(\theta) = \frac{1}{2}\ \left(mv_*^2 + mR^2\,\frac{v_*^2}{R^2}\right)$$

$$\big\downarrow$$

$$gd\ \underbrace{sin(\theta)}_{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\ v_*^2$$

   On conclut donc : $\boxed{v_* = \sqrt{40} = 6.3\ \mathrm{m/s^2}}$

   On constate donc que la roue dont la masse est concentrée autour de la circonférence aura une vitesse plus faible : c'est logique, car pour une même vitesse, son énergie cinétique de rotation est plus importante. Pour une masse constante, il est donc plus intéressant de répartir la masse sur l'ensemble de la roue : c'est par exemple ce qui est réalisé pour certaines roues de vélo de sprinters (et aussi pour des raisons d'aérodynamique). Par contre, pour une roue usuelle de vélo, la technique de rayons permet de réduire la masse de roue et c'est cela qui explique le choix du designer :-)

7. Quel est le coefficient de frottement statique μ_s minimal nécessaire
   pour que la roue puisse rouler sans glisser ?

   Il faut comparer l'expression de la force de frottement avec la force de frottement statique maximale possible $\mu_s mg\ \cos(\theta)$ *!*

$$f = m(g-2a)\sin(\theta) = \frac{mg}{3}\sin(\theta) < \mu_s mg\ \cos(\theta)$$

$$\big\downarrow$$

$$\frac{mg}{3}\sin(\theta) < \mu_s mg\ \cos(\theta)$$

   On conclut donc : $\boxed{\underbrace{\frac{\tan(\theta)}{3}}_{0.19} < \mu_s}$

Indiquer uniquement la valeur de $\tan(\theta)$
qui est le cas du bloc qui glisse sur plan incliné est évidemment incorrect :-)
On note au passage que l'angle limite pour le roulement sans glissement est plus élevé
que pour le glissement d'un bloc sur un plan incliné !
Pourquoi ?

8. Dessiner l'énergie cinétique et potentielle de la roue en fonction de la position $x \in [0, d]$.
   Par convention, l'énergie potentielle finale de la roue sera considérée comme nulle.

   L'évolution de l'énergie potentielle en fonction de x est donnée par :

$$U(x) \quad = \quad \frac{1}{2}\, mg\, (x_* - x) \; = \; 20\, (x_* - x)$$

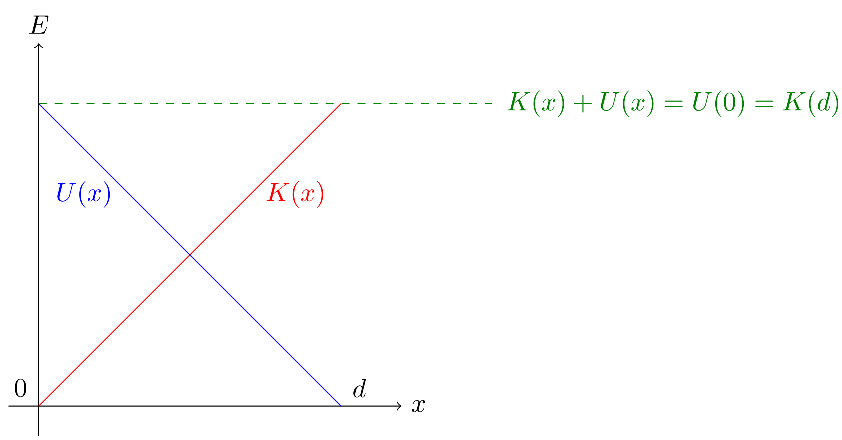
   Comme l'énergie mécanique est conservée, l'énergie cinétique se déduit de

$$K(x) + U(x) \quad = \quad \underbrace{K(0)}_{0} + U(0)$$

$$\downarrow$$

$$K(x) \quad = \quad \frac{1}{2}\, mgx$$

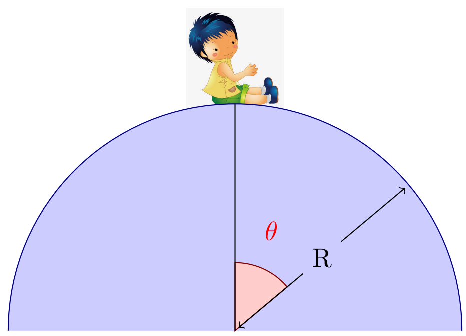
   L'énergie potentielle est donc transformée de manière strictement égale en énergie cinétique. Il faut donc tracer le graphe habituel de deux droites qui se croisent : c'est difficile de faire plus simple ! Il donc assez impardonnable de ne pas obtenir l'allure correcte des deux droites. Tracer des paraboles est évidemment impardonnable. Tracer des choses bizarres qui ne sont ni des droites, ni des paraboles est une stratégie risquée qui a tendance à bêtement énerver le correcteur : c'est donc une stratégie à proscrire. Eviter de bêtement recopier le graphe de l'examen précédent : c'est très rarement la bonne solution :-(Enfin, on sait jamais : cela dépend de l'humeur volatile de l'enseignant...



2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Une réponse correcte rapporte 4 points, une réponse erronée en fait perdre 1 point.
Ne rien cocher ne fait rien gagner et ne fait rien perdre.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !
Gommer pour les corrections !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

Q1



Un enfant glisse sans frottement sur un igloo verglacé de rayon R.
Il part du sommet avec une vitesse négligeable.
L'enfant cesse de toucher la butte pour un angle θ entre la verticale et la droite reliant le centre et sa position.
Trouver la relation que doit satisfaire l'angle θ ?

A $2\sin(\theta) = \sqrt{2}$
B $3\cos(\theta) = 2$
C $3\sin(\theta) = 2$
D $4R\sin(\theta) = 3R$
E Il est impossible d'obtenir θ car il dépend du poids de l'enfant.

A ☐
B ■
C ☐
D ☐
E ☐

Q2

Un cylindre plein de masse m et rayon R roule sans glisser sur un plan incliné. Ensuite, on refait l'expérience avec un cylindre de même dimension mais avec une masse deux fois plus importante. Finalement, on prend un troisième cylindre de même masse mais dont le rayon est double.
Quelle est l'unique affirmation correcte ?

A Le cylindre de masse $2m$ roulera plus vite.
B Le cylindre de masse $2m$ roulera moins vite.
C Le cylindre de rayon $2R$ roulera plus vite.
D Le cylindre de rayon $2R$ roulera moins vite.
E Le comportement des trois cylindres est identique.

A ☐
B ☐
C ☐
D ☐
E ■

Q3

Une balançoire sur laquelle est assise une personne de 60 kg a une période d'oscillation T. Par contre, on observe une période d'oscillation T^* lorsque la personne prend sur ses genoux un enfant de 30 kg.
Quelle est l'unique affirmation exacte ?

A $T^* = T$
B $T^* = T/2$
C $T^* = 2T/3$
D $T^* = 3/2$
E $T^* = T/3$

A ■ **B** □ **C** □ **D** □ **E** □

Q4

Considérons la chute libre d'un objet de masse m. Cet objet rencontre le sol avec une vitesse v lorsqu'on le lâche d'une hauteur h. Par contre, il atteint une vitesse $2v$, lorsqu'on le lâche d'une hauteur h^*.
Quelle est l'unique affirmation exacte ?

A $h^* = h/2$
B $h^* = h$
C $h^* = 2h$
D $h^* = 4h$
E $h^* = 2mh$

A □ **B** □ **C** □ **D** ■ **E** □

Q5

Une bouteille a été couchée sur le plancher d'un compartiment de train lorsque celui-ci était à l'arrêt. La bouteille y restait alors au repos.
Quand le train se met en marche, quel mouvement fait la bouteille ?

A Elle ne bouge pas.
B Elle ne bouge pas par rapport au train.
C Elle roule vers l'avant du compartiment.
D Elle roule vers l'arrière du compartiment.
E Elle s'envole verticalement.

A □ **B** □ **C** □ **D** ■ **E** □

Q6

Notons θ l'angle entre un mur parfaitement lisse et une échelle de masse m et de longueur L posée contre celui-ci. Quel est le coefficient minimal de frottement statique requis μ_s entre le sol et l'échelle pour que celle ne glisse pas ?

A $2\mu_s = mg\tan(\theta)/L$
B $2\mu_s = \cos(\theta)$
C $2\mu_s = L\tan(\theta)$
D $2\mu_s = \sin(\theta) - \cos(\theta)$
E $2\mu_s = \tan(\theta)$

A □ **B** □ **C** □ **D** □ **E** ■

Q7

Quelles sont les unités d'un travail ?

A $N\ m$
B $N\ m^2$
C $kg\ m^2\ /\ s^3$
D $kg\ m^2\ /\ s$
E $J\ m\ s^2$

A ■ **B** □ **C** □ **D** □ **E** □

Q8

Un objet de masse m n'est soumis qu'à des forces dont le travail est nul.
Quelle est l'unique affirmation qui sera toujours exacte ?

A La vitesse de l'objet est constante.
B L'énergie cinétique de l'objet est constante.
C L'objet est au repos.
D L'accélération de l'objet est nulle.
E La vitesse angulaire de l'objet est nulle.

A ☐
B ■
C ☐
D ☐
E ☐

Q9

Sur Terre, un cosmonaute pèse 600 N.
Que pèse-t-il sur une planète dont la masse est 16 fois plus petite que celle de la Terre et dont le rayon est deux fois plus petit que celui de la Terre ?

A 75 N
B 150 N
C 300 N
D 600 N
E 2400 N

A ☐
B ■
C ☐
D ☐
E ☐

Q10

Un bras mécanisé est utilisé pour déplacer des objets.

A l'instant $t = 0$, le bras a une longueur de de 0.7 m et est aligné avec l'axe Ox. Ensuite, le bras s'allonge avec une vitesse de 0.1 m/s et tourne horlogiquement autour de son point d'attache avec une vitesse angulaire $\omega = \pi/6$ rad/s dans le plan Oxy.

A l'instant $t = t_*$, le bras forme un angle de 90° avec l'horizontale et on mesure le vecteur vitesse de l'extrémité mobile du bras.

Quelles sont les deux composantes en m/s de ce vecteur vitesse en $t = t_*$?
Il est utile de faire un dessin pour trouver la solution !

A $v_x = 7\pi/60,\ v_y = 0.1$
B $v_x = 0.1,\ v_y = 0.1$
C $v_x = 0.1,\ v_y = 7\pi/60$
D $v_x = 0.1,\ v_y = \pi/3$
E $v_x = \pi/6,\ v_y = 0.1$

A ☐
B ☐
C ☐
D ☐
E ■

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) &= \sum M_i
\end{aligned}
$$

Formulaire

Lorsque les forces sont constantes,

$$
\begin{aligned}
\Delta\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t \\
\Delta\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}
\end{aligned}
$$

Mouvement d'un projectile

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$\Delta\overbrace{\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2\right)}^{K} = \sum\overbrace{\vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W}$$
$$= \sum\underbrace{\vec{\mathbf{F}}_{nc}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} - \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r}\Big)$$

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_xF_y - r_yF_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_xF_y - r_yF_x = F\ r_\perp = F_\perp\ r = Fr\sin(\theta)$$

Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$
$$m\ \vec{\mathbf{x}}(t) = \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t)\Big)$$
$$m\ \vec{\mathbf{v}}(t) = \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t)\Big)$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\ r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\ k^2 = \sum m_i\ r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\ h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ \dfrac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m\ \dfrac{L^2}{12}$