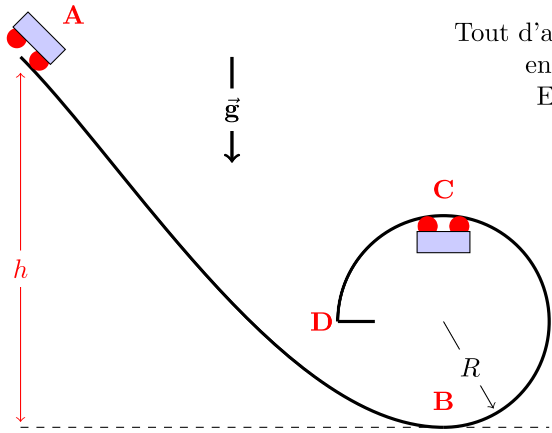
KINE11-EDPH11	
Août 2019	*Introduction à la mécanique*
IEPR 1011 -Rose-	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

1 Une nouvelle attraction pour la foire de la Gare du Midi...

Un petit chariot de masse $m = 500$ kg est lâché avec une vitesse nulle d'un point A situé à une hauteur h. A mi-parcours au point C, il se retrouve au sommet d'une boucle circulaire de rayon R. Ensuite, le chariot rebondit au point D et inverse sa trajectoire.



Tout d'abord, nous allons analyser le mouvement de ce petit chariot en négligeant tous les effets liés à la rotation des quatre roues. En d'autres mots, on suppose que l'inertie des roues est nulle et que le chariot glisse parfaitement sur les rails.

L'ingénieur chargé de la conception a choisi une hauteur h comme le double de la hauteur minimale h_* requise pour que le chariot ne chute pas au point C.

Le rayon de la boucle est $R = 10$ m.

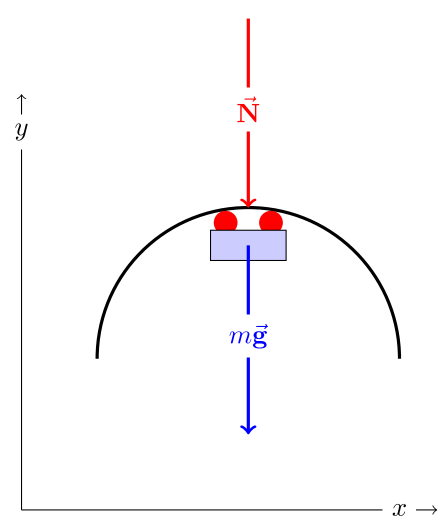
Dans les calculs, on utilisera $g = 10$ m/s^2.

1. Citer et dessiner l'ensemble de toutes les forces sur le bloc lorsqu'il se trouve au point C. Y indiquer clairement le nom et la notation habituelle pour chaque force.

   Il faut juste considérer la gravité et la force normale de réaction du sol sur le chariot ! Il n'y a pas de frottement puisque l'énoncé indique que le chariot glisse parfaitement sur les rails. Attention, la gravité et la force de réaction agissent toutes les deux vers le bas et leur somme vaudra l'accélération centripète du chariot. Il est évidemment essentiel de dessiner les forces correctement. Il n'y a pas de colle entre le sol et le chariot : le sol ne peut donc pas exercer une force qui retient le chariot ! Dessiner une force de réaction qui s'oppose à la gravité est une erreur impardonnable et fait perdre la totalité des points pour cette question qui n'est pas aussi simple qu'habituellement:-)

Il faut donc uniquement dessiner et citer :

- *Force de gravité :* $m\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$
- *Force de réaction normale du sol :* $\vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -N \end{bmatrix}$



2. Quelle devrait être la hauteur h_* minimale requise pour éviter le chute du chariot au point C ?

Cela sera le cas si l'accélération centripète est exactement l'accélération de la gravité.
ce qui est presque la même condition que celle obtenue plus haut !

$$\begin{aligned}
\frac{v^2}{R} &= g \\
v_*^2 &= Rg
\end{aligned}$$

$\Big\downarrow$ *En vertu de la conservation de l'énergie, on peut écrire :* $\frac{1}{2}mv_*^2 = mg(h_* - 2R)$

$$2g(h_* - 2R) = Rg$$

On déduit donc : $\boxed{\begin{aligned} h_* &= \tfrac{5}{2}R = 25 \text{ m} \\ h &= 5R = 50 \text{ m} \end{aligned}}$

3. Quelle est la force exercée par la piste sur le chariot au point C lorsque $h = 2h_*$?

Il suffit d'écrire que l'accélération centripète vaut
la somme des deux forces s'appliquant sur le chariot :

$$mg + N = m\frac{v^2}{R}$$

$\Big\downarrow$ *A nouveau, on observe :* $\frac{1}{2}mv^2 = mg(h - 2R) = mg(5R - 2R)$

$$\begin{aligned}
mg + N &= \frac{2mg(5R - 2R)}{R} \\
mg + N &= 6mg
\end{aligned}$$

On déduit donc : $\boxed{N = 5mg = 25000 \text{ Newton}}$

4. Quelle est la vitesse du chariot lorsqu'il atteint le point D lorsque $h = 2h_*$?

On écrit la conservation de l'énergie pour le point D dont la hauteur est égale au rayon R :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h - R)$$

On utilise le résultat précédent : $h = 5R$

$$v^2 = 2g(5R - R)$$

$$v = \sqrt{8gR}$$

On déduit donc : $\boxed{v = \sqrt{800} = 28.28 \text{ m/s}}$

5. Comment doit se produire la collision en D pour que le chariot revienne à sa position initiale A ?

Il faut conserver l'énergie lors de la collision pour le chariot puisse revenir au point de départ.

Donc, il suffit simplement d'écrire : **La collision doit être parfaitement élastique :-)**

6. Dessiner l'évolution de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique en fonction de la hauteur pendant la chute du chariot entre les points A et B.
On pose que l'énergie potentielle est nulle au niveau du sol.

L'évolution de l'énergie potentielle en fonction de y est donnée par :

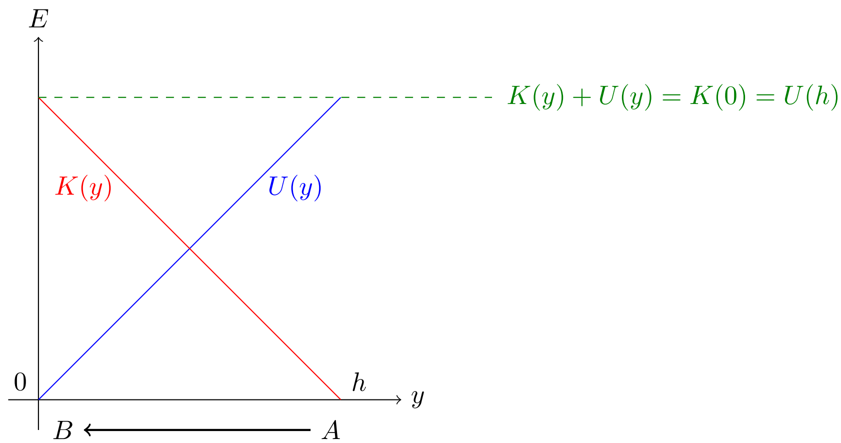
$$U(y) = \frac{1}{2}\, mg\, y = 2500\, y$$

Comme l'énergie mécanique est conservée, l'énergie cinétique se déduit de

$$K(y) + \underbrace{U(y)}_{\frac{1}{2}mgy} = \underbrace{K(h)}_{0} + \underbrace{U(h)}_{\frac{1}{2}mgh}$$

$$K(y) = \frac{1}{2}\, mg\, (h - y)$$

L'énergie potentielle est donc transformée de manière strictement égale en énergie cinétique. Il faut donc simplement tracer le graphe habituel du livre avec deux droites qui se croisent. C'est difficile de faire plus simple ! Il donc assez impardonnable de ne pas obtenir l'allure correcte des deux droites. Tracer des paraboles est évidemment impardonnable. Tracer des choses bizarres qui ne sont ni des droites, ni des paraboles est une stratégie risquée qui a tendance à bêtement énerver le correcteur : c'est donc une stratégie à proscrire. Au passage, c'était presque le même graphe que celui demandé lors de l'examen de septembre 2018, mais en inversant les deux courbes !



7. A présent, considérons que chacune des quatre roues du chariot a un moment d'inertie $I = 0.25$ kg m^2 et un rayon $r = 0.1$ m. Le roulement des roues sur le rail se fait sans glissement. La masse totale du chariot (roues comprises) est toujours $m = 500$ kg. Avec ces nouvelles hypothèses, re-calculer la valeur de h^*.

   Une partie de l'énergie potentielle de gravité sera maintenant utilisée pour faire tourner les roues et donc la vitesse du chariot pour une même hauteur sera plus faible. La conservation de l'énergie s'écrit maintenant :

$$
\begin{aligned}
\frac{mv_*^2}{2} + 4\frac{I\omega_*^2}{2} &= mg(h_* - 2R) \\
\frac{mv_*^2}{2} + 2\frac{Iv_*^2}{r^2} &= mg(h_* - 2R) \\
\left(\frac{m}{2} + 2\frac{I}{r^2}\right) v_*^2 &= mg(h_* - 2R) \\
&\Big\downarrow \quad \textit{Afin de ne pas tomber au point } C : v_*^2 = Rg \\
\left(\frac{m}{2} + 2\frac{I}{r^2}\right) Rg &= mg(h_* - 2R) \\
\frac{5R}{2} + \frac{2RI}{mr^2} &= h_*
\end{aligned}
$$

On déduit donc : $\boxed{h_* = \frac{5R}{2} + \frac{2RI}{mr^2} = 25 + 1 \text{ m}}$

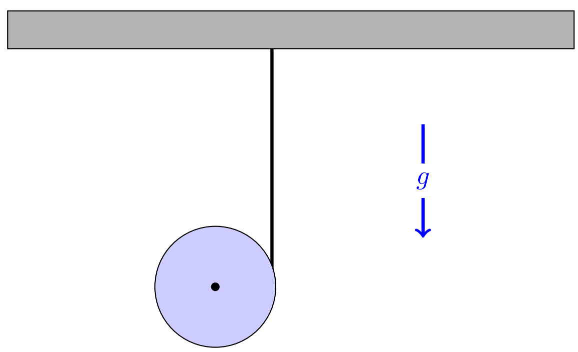
Il est bien logique d'avoir une hauteur un peu plus élevée, puisqu'il faut maintenant un peu plus d'énergie potentielle à convertir en énergie cinétique de rotation pour les 4 roues du chariot !

2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Une réponse correcte rapporte 4 points, une réponse erronée fait perdre 1 point.
Ne rien cocher ne fait rien gagner et ne fait rien perdre.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un bic ou un crayon noir bien taillé !
Gommer pour les corrections !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

Q1

Un cylindre plein de rayon R et de masse m attaché par une corde descend.
C'est le jeu traditionnel du yoyo :-)



Quelle est l'amplitude de l'accélération a du yoyo ?

A $a = \frac{3g}{2}(1 + mR^2)$ — **A** ☐

B $a = \frac{3g}{2}(1 + mR)$ — **B** ☐

C $a = \frac{3g}{2}$ — **C** ☐

D $a = \frac{2g}{3}$ — **D** ■

E $a = \frac{g}{2}$ — **E** ☐

Q2

On considère les oscillations d'une bille attachée à un ressort ou à un pendule. k est la constante de raideur d'un ressort, L la longueur d'un pendule, m la masse de la bille, T la période et ω la fréquence angulaire.
Quelle expression n'est pas correcte ?

A $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ — **A** ☐

B $T = \frac{2\pi}{\omega}$ — **B** ☐

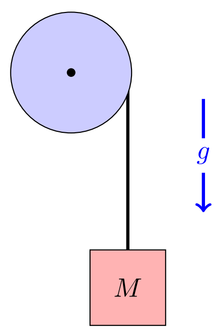
C $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ — **C** ☐

D $\omega = \sqrt{\frac{m}{k}}$ — **D** ■

E $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ — **E** ☐

Q3

Un cylindre plein de masse m et de rayon r peut tourner autour d'un axe fixe. Une masse M attachée à une corde de masse négligeable le fait tourner.



Quelle est l'amplitude de l'accélération a de la masse ?

A $a = g\,\frac{2M}{2M - m}$ — **A** ☐

B $a = g\,\frac{2M}{2M + m}$ — **B** ■

C $a = g\,\frac{M + m}{M}$ — **C** ☐

D $a = g\,\frac{M}{M + m}$ — **D** ☐

E $a = g$ — **E** ☐

Q4

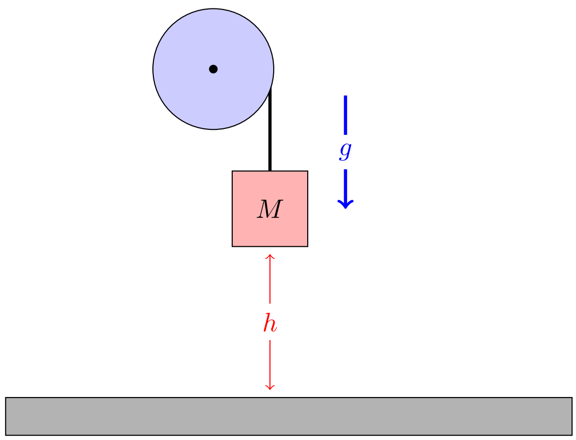
Un wagon de 10 tonnes avance à une vitesse de 5 m/s lorsqu'il rejoint un autre wagon de 20 tonnes se déplaçant dans le même sens à une vitesse de 2 m/s.
La voie ferrée est parfaitement rectiligne et horizontale.
On néglige tous les frottements entre la voie ferrée et les wagons.
Les deux wagons restent accrochés entre eux après la collision.
Est-ce que le choc est élastique ou inélastique ?
Quelle est la vitesse v de deux wagons après la collision ?

A Le choc est inélastique et $v = 3$ m/s.
B Le choc est élastique et $v = 3$ m/s.
C Le choc est inélastique et $v = 4$ m/s.
D Le choc est élastique et $v = 4$ m/s.
E Pour un élastique $v = 3$ m/s, mais pour un choc inélastique, $v = 4$ m/s.

A ■ **B** □ **C** □ **D** □ **E** □

Q5

Un bloc de masse M est suspendu à une poulie pleine de masse m et de rayon R. A l'instant $t = 0$, le bloc a une vitesse nulle et est lâché à une hauteur h du sol.



Quelle est l'amplitude de la vitesse v de la masse lorsqu'elle touche le sol ?

A $v = \sqrt{\dfrac{4Mgh}{2M + m}}$

B $v = \sqrt{\dfrac{2Mgh}{2M + m}}$

C $v = \sqrt{\dfrac{2mghR}{2MR^2 + mR^2}}$

D $v = \sqrt{\dfrac{4Mgh^2}{2MR + mR}}$

E $v = \sqrt{\dfrac{4Mgh}{2M - m}}$

A ■ **B** □ **C** □ **D** □ **E** □

Q6

Un homme est assis les bras croisés sur un tabouret tournant sans frottement.
Que se passe-t-il lorsqu'il étend les bras ?

A Il tourne moins vite et le moment cinétique diminue. **A** ☐
B Il tourne moins vite et le moment cinétique augmente. **B** ☐
C Il tourne moins vite et le moment cinétique reste constant. **C** ■
D Il tourne à la même vitesse et le moment cinétique augmente. **D** ☐
E Il tourne à la même vitesse et le moment cinétique diminue. **E** ☐

Q7

Estimer le temps t de chute d'une pomme qui se détache d'un arbre avec une vitesse initiale nulle une hauteur de 5 mètres.
La norme de l'accélération de la gravité est $g = 10\ m/s^2$.

A $t = 20$ s **A** ☐
B $t = 1$ s **B** ■
C $t = 2$ s **C** ☐
D $t = \sqrt{2}$ s. **D** ☐
E $t = 10$ s **E** ☐

Q8

A l'instant $t = 0$, un bloc a une énergie cinétique K_0 et une masse m.
Ensuite, il subit une accélération a pendant un intervalle de temps Δt.
On observe que sa quantité de mouvement a doublé.
Que vaut son énergie cinétique K à l'instant $t = \Delta t$?

A $K = K_0 + 4m(a\Delta t)^2$ **A** ☐
B $K = K_0 + 2m(a\Delta t)^2$ **B** ☐
C $K = K_0$ **C** ☐
D $K = 2K_0$ **D** ☐
E $K = 4K_0$ **E** ■

Q9

Quelles sont les unités d'une puissance ?

A $kg\ m^2\ /\ s^4$ **A** ☐
B $N\ m\ /\ s^2$ **B** ☐
C $kg^2\ m^2\ /\ s^2$ **C** ☐
D $J\ s$ **D** ☐
E $J\ /\ s$ **E** ■

Q10

Une pierre avec une masse $m = 1$ kg est propulsée verticalement avec une vitesse initiale $v_0 = 5$ m/s. Il faut tenir compte de l'action de la résistance de l'air et supposer que l'accélération de la gravité est $g = 10$ m/s^2.
Que vaut la norme F de la résultante de toutes les forces agissant sur la pierre lorsqu'elle atteint son point le plus élevé et va inverser son mouvement ?

A $F > 10$ N
B $F = 10$ N
C $F = 5$ N
D $F = 1$ N
E $F = 0$ N

A ☐
B ■
C ☐
D ☐
E ☐

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) &= \sum M_i
\end{aligned}$$

Formulaire

Lorsque les forces sont constantes,

$$\begin{aligned}
\Delta\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t \\
\Delta\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

Mouvement d'un projectile

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$\Delta\overbrace{\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2\right)}^{K} = \sum\overbrace{\vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W}$$
$$= \sum\underbrace{\vec{\mathbf{F}_{nc}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} - \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r}\Big)$$

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_xF_y - r_yF_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_xF_y - r_yF_x = F\ r_\perp = F_\perp\ r = Fr\sin(\theta)$$

Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$
$$m\ \vec{\mathbf{x}}(t) = \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t)\Big)$$
$$m\ \vec{\mathbf{v}}(t) = \sum\Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t)\Big)$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\ r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\ k^2 = \sum m_i\ r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\ h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ \dfrac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m\ \dfrac{L^2}{12}$