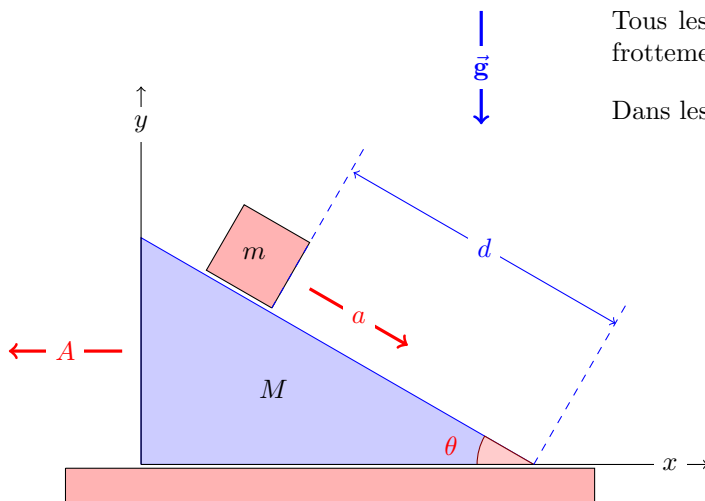


KINE11-EDPH11	
Août 2021	Introduction à la mécanique
IEPR 1011 -Rose-	Vous pouvez conserver cet énoncé !

1 Un petit bloc sur un coin !

Un bloc de masse $m = 1$ kg est placé sur un coin de section triangulaire de masse $M = 10$ kg. On note a la norme de l'accélération relative du bloc par rapport au coin triangulaire tandis que A est la norme de l'accélération du coin triangulaire avec un angle $\theta = 30^\circ$. Dans ce problème, nous souhaitons obtenir a , A et la force normale N exercée par le petit bloc sur le coin triangulaire.



Tous les mouvements entre les surfaces se font sans frottement : les corps glissent parfaitement.

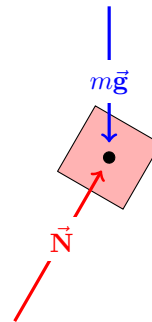
Dans les calculs, on utilisera $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1. Citer et dessiner l'ensemble de toutes les forces agissant sur le bloc.

Il faut uniquement citer :

- Force de gravité : $m\vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$
- Force de réaction du triangle : $\vec{N} = \begin{bmatrix} N \sin(\theta) \\ N \cos(\theta) \end{bmatrix}$

Dans l'énoncé, il est indiqué qu'il n'y a pas de frottement. Et donc, il ne faut pas citer de forces de frottement !

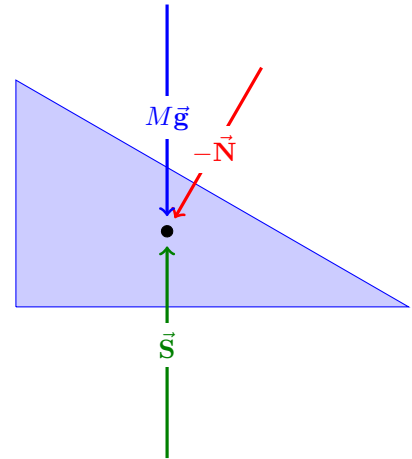


2. Citer et dessiner l'ensemble de toutes les forces agissant sur le coin triangulaire.

Il faut citer trois forces.

- Force de gravité : $m\vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix}$
- Force de réaction du bloc : $-\vec{N} = \begin{bmatrix} -N \sin(\theta) \\ -N \cos(\theta) \end{bmatrix}$
- Force de réaction du sol : $\vec{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ S \end{bmatrix}$

Evidemment, il y a action-réaction entre le bloc et le triangle.
C'est pourquoi, on écrit directement $-\vec{N}$!



3. Ecrire les trois équations qui permettent d'obtenir les trois inconnues a , A et N .

Il suffit d'écrire les équations du mouvement pour les deux corps :

$$\begin{aligned} m(a \cos(\theta) - A) &= N \sin(\theta) \\ m(-a \sin(\theta) - A) &= -mg \\ -MA &= -N \sin(\theta) \\ 0 &= -Mg - N \cos(\theta) + S \end{aligned}$$

Attention, l'accélération du petit bloc est obtenue en additionnant les composantes de l'accélération du triangle A avec l'accélération *relative* a du petit bloc par rapport au triangle !

Les trois premières équations permettent d'obtenir les 3 inconnues a , A et N .

La quatrième et dernière équation permettrait de déduire S : ce qui n'était pas demandé :-)

4. Obtenir l'expression de l'accélération A du coin par rapport au sol en fonction de la masse m , de la masse M , de l'angle θ et de la gravité.
5. Calculer l'accélération relative de a par rapport au bloc triangulaire.

C'est l'unique partie un peu mathématique de la question.

Il faut prendre les 3 équations et éliminer successivement N et a pour obtenir la valeur demandée.

Une manière¹ d'obtenir la valeur de A est de procéder comme suit :

$$\begin{aligned} m(a \cos(\theta) - A) &= N \sin(\theta) \\ -ma \sin(\theta) &= N \cos(\theta) - mg \\ -MA &= -N \sin(\theta) \end{aligned}$$

↓ *En éliminant N à partir de la troisième équation :-)*

$$\begin{aligned} m(a \cos(\theta) - A) &= MA \\ -ma \sin(\theta) &= MA \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} - mg \end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned} ma \cos(\theta) &= (M + m)A \\ ma \sin(\theta) &= mg - MA \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \end{aligned}$$

↓ *En éliminant a de la première équation à partir de la seconde équation :-)*

$$(M + m)A \sin(\theta) = mg \cos(\theta) - MA \frac{\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)}$$

↓

$$A = \frac{mg \cos(\theta) \sin(\theta)}{(M + m) \sin^2(\theta) + M \cos^2(\theta)}$$

On calcule ensuite :

$A = \frac{10\sqrt{3}}{41} = 0.4224 \text{ m/s}^2$

Il y a un peu d'algèbre un ffrelin calculatoire : c'est vrai.

Mais, c'est la reproduction exacte et strictement identique d'un des exercices des séances !

L'exercice est compliqué, mais ne devrait pas être une découverte pour un étudiant qui a révisé :-)

Finalement, on déduit immédiatement :

$$a = \frac{M + m}{m \cos(\theta)} A$$

Et on obtient l'accélération relative du petit bloc :

$a = \frac{22}{\sqrt{3}} \frac{10\sqrt{3}}{41} = \frac{220}{41} = 5.366 \text{ m/s}^2$

¹Il existe d'autres options possibles, si vous obtenez la bonne valeur numérique finale, une approche alternative est évidemment parfaitement correcte aussi :-)

6. Obtenir la vitesse du petit bloc lorsqu'il atteint le sol si $d = 1$ m.

Il faut tout d'abord calculer le temps de chute:

$$\begin{array}{ccc} a \frac{t_c^2}{2} & = & d \\ \downarrow & & \\ t_c & = & \sqrt{\frac{2d}{a}} \end{array}$$

*Et ensuite calculer **les deux composantes de la vitesse absolue** du petit bloc !*

Eh oui, il n'est pas possible d'obtenir directement la vitesse ici en faisant un bilan d'énergie :-)

$$v_x = (a \cos(\theta) - A)t_c$$

$$v_y = -a \sin(\theta)t_c$$

On peut alors calculer la vitesse atteinte par le petit bloc :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5.366 \text{ m/s}$$

7. Esquisser l'évolution de l'énergie cinétique et potentielle du petit bloc en fonction de sa hauteur.

L'évolution de l'énergie potentielle grandit linéairement avec la hauteur du petit bloc, tandis que les énergies cinétiques du petit bloc et du bloc triangulaires diminuent linéairement avec la hauteur et sont donc maximales lorsque le petit bloc a fini son mouvement.

Attention, la conservation d'énergie mécanique est valable pour le système entier ! Le petit bloc ne récupère en énergie cinétique d'une portion de l'énergie potentielle perdue.

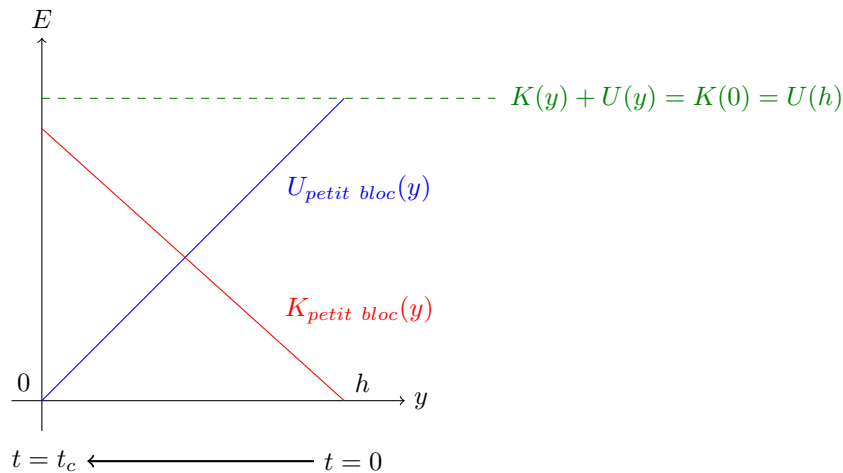
$$U(h) = U_{\text{petit bloc}}(h) = mgd \sin(\theta) = 5 \text{ Joule}$$

$$K_{\text{petit bloc}}(0) = \frac{mv^2}{2} = 4.667 \text{ Joule}$$

$$K_{\text{coin triangulaire}}(0) = 5 - \frac{mv^2}{2} = 0.333 \text{ Joule}$$

faut donc simplement tracer le graphe habituel du livre avec deux droites qui se croisent, mais avec des hauteurs différentes.

C'est difficile de faire plus simple ! Il donc assez impardonnable de ne pas obtenir l'allure correcte des deux droites. Tracer des paraboles est évidemment impardonnable. Tracer des choses bizarres qui ne sont ni des droites, ni des paraboles est une stratégie risquée qui a tendance à bêtement énerver le correcteur : c'est donc une stratégie à proscrire. Au passage, c'était presque le même graphe que celui demandé lors de l'examen de septembre 2019 !



2 Questions à choix multiples

Attention !

Il y a toujours une et une seule bonne réponse !

Ne pas répondre ou cocher une réponse erronée ne fait rien perdre.

Par contre, il faut répondre correctement à six questions pour réussir cette partie.

Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)

Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !

Gommer pour les corrections !

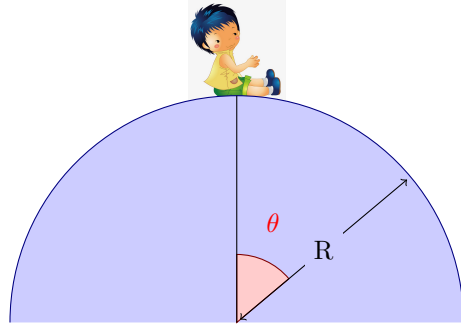
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique

Q1	Un disque <i>vinyl 33 tours</i> placé sur une platine effectue un mouvement de rotation uniforme de 33 tours par minute. Quelle est sa vitesse angulaire ω ? A $\omega = 7 \text{ rad s}^{-1}$ B $\omega = 3.5 \text{ rad s}^{-1}$ C $\omega = 3.14 \text{ rad s}^{-1}$ D $\omega = 1.8 \text{ rad s}^{-1}$ E $\omega = 0.55 \text{ rad s}^{-1}$	A ☐ B ☒ C ☐ D ☐ E ☐
Q2	On considère le vecteur accélération $\vec{a}$ d'un point se déplaçant sur une trajectoire courbe. Quelle est l'unique affirmation exacte ? A Le vecteur $\vec{a}$ est tangent à la trajectoire. B Le vecteur $\vec{a}$ est dirigé vers l'extérieur de la trajectoire. C Le vecteur $\vec{a}$ est dirigé vers l'intérieur de la trajectoire. D Le vecteur $\vec{a}$ est nul si la vitesse est constante. E Le vecteur $\vec{a}$ est perpendiculaire au vecteur vitesse.	A ☐ B ☐ C ☒ D ☐ E ☐
Q3	Notons θ l'angle entre un mur parfaitement lisse et une échelle de masse m et de longueur L posée contre celui-ci. Quel est le coefficient minimal de frottement statique requis μ_s entre le sol et l'échelle pour que celle ne glisse pas ? A $2\mu_s = mg \tan(\theta)/L$ B $2\mu_s = \cos(\theta)$ C $2\mu_s = L \tan(\theta)$ D $2\mu_s = \sin(\theta) - \cos(\theta)$ E $2\mu_s = \tan(\theta)$	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E ☒

Q4	Sur une route rectiligne, une voiture avec une vitesse v et une longueur l double un autocar de longueur L qui circule avec une vitesse $V < v$. En face, arrive une voiture identique qui arrive à la même vitesse v. Lorsque l'avant de la voiture qui dépasse atteint l'arrière de l'autocar, le facteur critique à considérer est la distance d entre les avants des deux voitures à cet instant évidemment ! Quelle est la distance minimale d pour que la voiture puisse effectuer le dépassement sans percuter l'autre véhicule? A $d = \frac{2v(L+l)}{v-V}$ B $d = \frac{v(L-l)}{v-V}$ C $d = \frac{2v(L-l)}{v-V}$ D $d = \frac{(v-V)(L+l)}{v+V}$ E $d = \frac{(v-V)(L+l)}{2v}$	A ☒ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐
Q5	Considérons la chute libre d'un objet de masse m. Cet objet rencontre le sol avec une vitesse v lorsqu'on le lâche d'une hauteur h. Par contre, il atteint une vitesse $2v$, lorsqu'on le lâche d'une hauteur h^*. Quelle est l'unique affirmation exacte ? A $h^* = h/2$ B $h^* = h$ C $h^* = 2h$ D $h^* = 4h$ E $h^* = 2mh$	A ☐ B ☐ C ☐ D ☒ E ☐

Q6



Un enfant glisse sans frottement sur un igloo verglacé de rayon R .
 Il part du sommet avec une vitesse négligeable.
 L'enfant cesse de toucher la butte pour un angle θ entre la verticale et la droite
 reliant le centre et sa position.
 Trouver la relation que doit satisfaire l'angle θ ?

- A $2 \sin(\theta) = \sqrt{2}$
- B $3 \sin(\theta) = 2$
- C $3 \cos(\theta) = 2$
- D $4R \sin(\theta) = 3R$
- E Il est impossible d'obtenir θ car il dépend du poids de l'enfant.

- A ☐
- B ☐
- C ☒
- D ☐
- E ☐

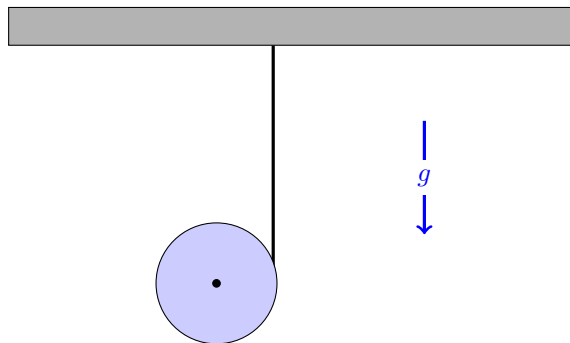
Q7

Une balançoire sur laquelle est assise une personne de 60 kg a une période
 d'oscillation T . Par contre, on observe une période d'oscillation T^* lorsque la
 personne prend sur ses genoux un enfant de 30 kg.
 Quelle est l'unique affirmation exacte ?

- A $T^* = T$
- B $T^* = T/2$
- C $T^* = 2T/3$
- D $T^* = 3/2$
- E $T^* = T/3$

- A ☒
- B ☐
- C ☐
- D ☐
- E ☐

Un cylindre plein de rayon R et de masse m attaché par une corde descend.
C'est le jeu traditionnel du yoyo :-)



Q8

Quelle est l'amplitude de l'accélération a du yoyo ?

A $a = \frac{3g}{2}(1 + mR^2)$

A ☐

B $a = \frac{3g}{2}(1 + mR)$

B ☐

C $a = \frac{3g}{2}$

C ☐

D $a = \frac{2g}{3}$

D ☒

E $a = \frac{g}{2}$

E ☐

Un mobile se déplace sur l'axe Ox et se trouve à l'origine en $t = 0$.
A tout instant, la vitesse $v(t)$ du mobile est liée à sa position par la relation suivante :

$$x(t) = av^2(t)$$

avec a qui est une constante positive.

Quelle est sa trajectoire $x(t)$?

A $x(t) = \frac{t^2}{4a}$

A ☒

B $x(t) = \frac{2t^2}{a}$

B ☐

C $x(t) = \frac{t^2}{2a}$

C ☐

D $x(t) = \frac{t^2}{a^2}$

D ☐

E $x(t) = \frac{t}{4a}$

E ☐

Q9

Q10

Un bras mécanisé est utilisé pour déplacer des objets.

A l'instant $t = 0$, le bras a une longueur de 0.7 m et est aligné avec l'axe Ox . Ensuite, le bras s'allonge avec une vitesse de 0.1 m/s et tourne horlogiquement autour de son point d'attache avec une vitesse angulaire $\omega = \pi/6 \text{ rad/s}$ dans le plan Oxy .

A l'instant $t = t_*$, le bras forme un angle de 90° avec l'horizontale et on mesure le vecteur vitesse de l'extrémité mobile du bras.

Quelles sont les deux composantes en m/s de ce vecteur vitesse en $t = t_*$?
Il est utile de faire un dessin pour trouver la solution !

- A** $v_x = 7\pi/60, v_y = 0.1$
- B** $v_x = 0.1, v_y = 0.1$
- C** $v_x = 0.1, v_y = 7\pi/60$
- D** $v_x = 0.1, v_y = \pi/3$
- E** $v_x = \pi/6, v_y = 0.1$

- A** ☐
- B** ☐
- C** ☐
- D** ☐
- E** ☒

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(m \vec{v}) &= \sum \vec{F}_i \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}I \omega^2\right) &= \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \\ \frac{d}{dt}(I \omega) &= \sum M_i\end{aligned}$$

Formulaire

Lorsque les forces sont **constantes**,

$$\begin{aligned}\Delta(m \vec{v}) &= \sum \vec{F} \Delta t \\ \Delta\left(\frac{1}{2}m v^2\right) &= \sum \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}\end{aligned}$$

Mouvement d'un projectile

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\ \vec{v}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\ \vec{a}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\ \vec{a}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$\begin{aligned}\Delta \left(\overbrace{\frac{1}{2} m v^2}^K \right) &= \sum \overbrace{\vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta \vec{\mathbf{x}}}^W \\ &= \sum \underbrace{\vec{\mathbf{F}}_{nc} \cdot \Delta \vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} - \Delta \left(\underbrace{mg h}_{U_g} + \underbrace{\frac{1}{2} k x^2}_{U_r} \right)\end{aligned}$$

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_x F_y - r_y F_x = F r_{\perp} = F_{\perp} r = Fr \sin(\theta)$$

Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$

$$m \vec{\mathbf{x}}(t) = \sum \left(m_i \vec{\mathbf{x}}_i(t) \right)$$

$$m \vec{\mathbf{v}}(t) = \sum \left(m_i \vec{\mathbf{v}}_i(t) \right)$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i r_i^2$$

Rayon de giration

$$m k^2 = \sum m_i r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

$$\text{Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution} \quad I = m R^2$$

$$\text{Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution} \quad I = m \frac{R^2}{2}$$

$$\text{Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central} \quad I = m \frac{L^2}{12}$$