KINE11-EDPH11	
Août 2022	*Introduction à la mécanique*
IEPR 1011 -Rose-	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

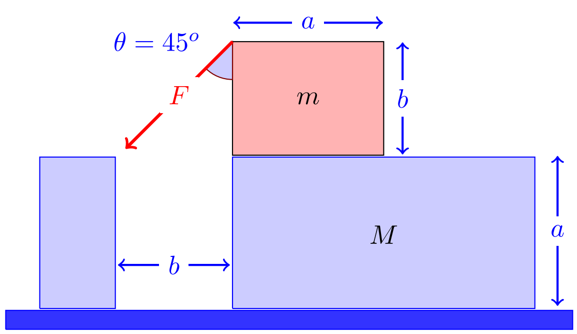
1 Encastrer une caisse entre deux blocs...

Attention ! Il faut répondre exclusivement sur l'unique feuille de réponse fournie.
Ce questionnaire peut servir de brouillon, mais ne sera jamais lu par le correcteur !

Une caisse de masse $m = 125$ kg repose sur un bloc d'une masse $M = 975$ kg.
Vous tentez de faire pivoter la caisse autour du coin inférieur gauche
en appliquant une force de traction F sur le coin supérieur gauche avec un angle $\theta = 45^o$,
afin de l'encastrer entre les deux blocs.

Après avoir très lentement pivoté la caisse d'un quart de tour, on n'exerce plus la force de traction et on laisse la caisse glisser entre les deux blocs et s'y encastrer en tombant sur le sol.

Il n'y aucun frottement pendant la chute entre les deux blocs : les surfaces sont parfaitment lisses.
En outre, on supposera que la vitesse de la caisse est totalement négligeable pendant le pivotement !



Les dimensions de la caisse sont
$a = 3.0$ m et $b = 2.0$ m.

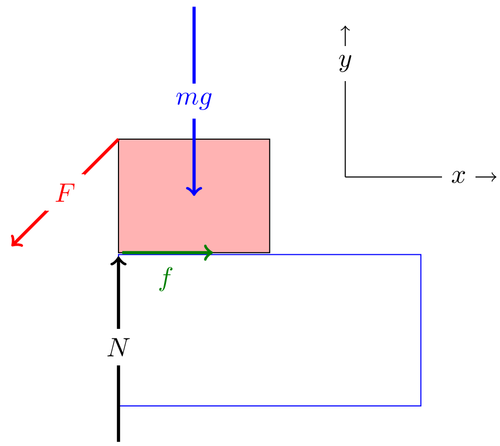
Le coefficient de frottement statique entre la caisse, le bloc et le sol est noté μ_s.

Dans les calculs, on utilisera $g = 10$ m/s^2.

1. Citer et dessiner toutes les forces qui agissent sur la caisse lorsque celle-ci commence à pivoter.

   Il faut citer la force de traction, la force de gravité et la force du bloc qui se compose d'une réaction normale et d'une composante de frottement. Comme il s'agit de faire tourner la caisse, il est impératif de bien indiquer le point d'application des 4 forces ! En outre, lorsque la caisse commence à pivoter, seul le coin inférieur gauche de la caisse est en contact avec le bloc !

- *Force de gravité :* $m\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$
- *Force de réaction normale :* $\vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0 \\ mg + F/\sqrt{2} \end{bmatrix}$
- *Force de frottement :* $\vec{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$
- *Force de traction :* $\vec{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} -F/\sqrt{2} \\ -F/\sqrt{2} \end{bmatrix}$



Noter que l'équilibre des forces permet d'obtenir immédiatement les composantes des 4 forces, même si ce n'était pas spécifiquement demandé :-)

Beaucoup d'étudiants ne mettent pas la réaction du bloc sur la caisse sur le coin inférieur gauche de la caisse : c'est pourtant essentiel ici !

Beaucoup d'étudiants ont des réponses très farfelues pour cette question élémentaire pourtant !

Beaucoup d'étudiants confondent force de frottement **f** *et coefficient de frottement* μ_s *: c'est évidemment aussi totalement impardonnable : une force est un vecteur tandis qu'un coefficient de frottement est un nombre adimensionnel !*

2. Quelle sera le temps de chute de la caisse entre les deux blocs après l'avoir pivotée ?

   Il suffit juste de calculer le temps de chute libre d'une hauteur a puisqu'on suppose que la vitesse pendant le pivotement (et donc au début de la chute libre) est supposée négligeable :

$$g\,\frac{t_*^2}{2} = a$$
$$\downarrow$$
$$t_* = \sqrt{\frac{2a}{g}}$$

Et on déduit la valeur numérique demandée : $\boxed{t_* = \sqrt{\frac{2 \times 3}{10}} = 0.77 \text{ s}}$

3. Quelle est la valeur minimale de la norme de la force F permettant à la caisse de pivoter ?

   Pour faire tourner la caisse autour de son coin inférieur gauche, il faut que la valeur absolue du moment de la force de traction soit supérieur à celui de la force de gravité qui s'y oppose !

$$b\ F\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}\ mg$$
$$\downarrow$$
$$F = \frac{mga}{\sqrt{2}b}$$

Et on déduit la valeur numérique demandée : $\boxed{F \quad = \quad \frac{1250 \times 3}{\sqrt{2} \times 2} \; = \; 1326 \text{ N}}$

Un nombre incalculable d'étudiants n'arrivent pas à se souvenir que pour analyser la rotation d'un objet, il faut regarder les moments des forces ! C'est évidemment totalement impardonnable et cela explique le nombre d'échecs élevé lors de cette dernière session !

4. Quelle est alors la valeur minimale de μ_s afin que la caisse m ne glisse pas sur le bloc M ?

   Il faut que la force de frottement soit exactement égale à la valeur obtenue par $\mu_s\ N$.

$$\mu_s \left(mg + F\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = F\frac{\sqrt{2}}{2}$$

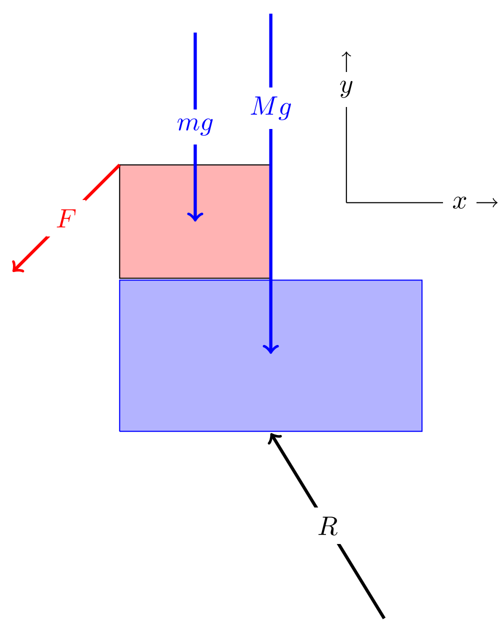
$$\downarrow$$

$$\mu_s = \frac{F}{\sqrt{2}mg + F}$$

Il suffit ensuite d'obtenir le coefficient de frottement : $\boxed{\mu_s = \frac{1326}{\sqrt{2}\times 1250 + 1326} = 0.43}$

5. Quelle est alors la norme de la force exercée par le sol sur le bloc M ?

   Il suffit simplement de faire la somme de toutes les forces externes agissant sur le bloc et la caisse pour obtenir le résultat.



$$\begin{aligned} F_x + R_x &= 0 \\ F_y + R_y - (m+M)g &= 0 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} R_x &= -F/\sqrt{2} \\ R_y &= (m+M)g + F/\sqrt{2} \end{aligned}$$

On calcule alors la norme de cette force R : $\boxed{R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 11974 \text{ N}}$

On peut aussi obtenir cette force en faisant juste le bilan de force sur le bloc : on obtiendra évidemment le même résultat en considérant la force exercée par la caisse sur le bloc !

Beaucoup d'étudiants ne tiennent pas compte de la force F et ne considèrent que la force de gravité. Observer aussi que l'on pousse les deux blocs sur le sol et que celui-ci s'oppose donc à la force de gravité des deux blocs et à la poussée exercée pour faire pivoter le bloc !

6. Esquisser l'énergie potentielle et cinétique de la caisse en fonction du temps.
   Bien indiquer les deux étapes : pivotement et chute !

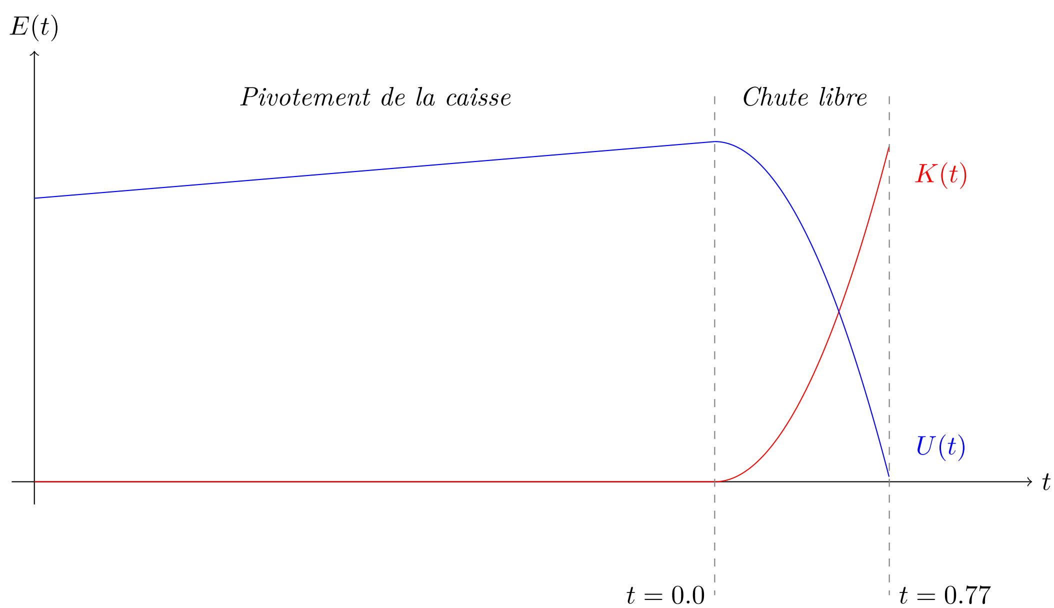
   L'expression de l'énergie cinétique pendant la chute libre est donnée par en considérant que $t = 0$ est le moment où la caisse fini dêtre pivotée :

$$
\begin{aligned}
K(t) &= \frac{mv^2(t)}{2} = \frac{mg^2}{2}t^2 = 6250t^2 && t \in [0, t_*] \\
U(t) &= mga - \frac{mg^2}{2}t^2 = 3750 - 6250t^2 && t \in [0, t_*]
\end{aligned}
$$

Il faut donc bien tracer des paraboles et pas des droites pendant la chute libre !

Pendant le pivotement, l'énergie cinétique est nulle puisqu'on pivote très lentemen. La vitesse et l'énergie cinétique sont donc supposées négligeables. Mais, l'énergie potentielle augmente très légèrement, puisque le centre de gravité s'est élevé d'une distance $a/2 - b/2$ ou plus exactement d'un demi-mètre. L'énergie potentielle avant le pivotement vaut donc seulement 3125 Joule : ce qui n'est pas si néglgeable que cela !

Nous n'avons évidemment aucune manière d'estimer le temps nécessaire pour le pivotement de la caisse, mais si cela est effectué très très très lentement, on peut se douter que le temps mis à pivoter sera très long par rapport au temps de chute ! Il faudrait donc en tenir compte dans les proportions du dessin ou l'indiquer si on veut être parfaitement rigoureux !



L'évolution de l'énergie potentielle n'est pas vraiment linéaire pendant le pivotement, mais il fallait juste indiquer qu'elle augmente suffisait amplement. Obtenir l'expression exacte de la position du centre de masse de la caisse pendant qu'on effectue la rotation est laissée au soin du lecteur particulièrement attentif :-)

A nouveau, très peu d'étudiants arrivent à dessiner quelque chose un peu proche de la réponse, mais il y a quand-même quelques résultats corrects !

2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Ne pas répondre ou cocher une réponse erronée ne fait rien perdre.
Par contre, il faut répondre correctement à six questions pour réussir cette partie.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !
Gommer pour les corrections !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Tipp-Ex) pour corriger !

Q1

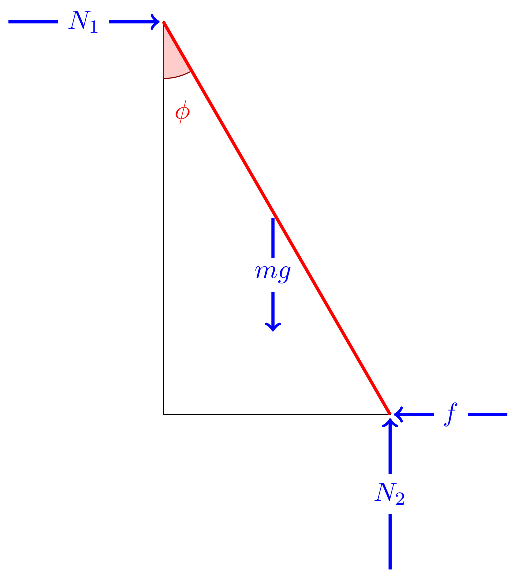
Quelles sont les unités d'un travail ?

A $N\ m$
B $N\ m^2$
C $kg\ m^2\ /\ s^3$
D $kg\ m^2\ /\ s$
E $J\ m\ s^2$

A ■
B □
C □
D □
E □

Q2

On considère une échelle de longueur L et de masse m posée contre un mur avec un angle ϕ. Toutes les forces présentes sont indiquées sur la figure : il y a uniquement du frottement sur le sol, mais pas contre le mur. Le coefficient de frottement statique est noté μ_s.



Quelle est l'unique relation qui exprime l'équilibre
des moments des quatre forces
par rapport au sommet de l'échelle ?

A $-mL\cos(\phi) + mL\sin(\phi) + mL - \mu_s 2mL\cos(\phi) = 0$ — **A** ☐

B $-mg\cos(\phi) + mg\sin(\phi) - \mu_s mg = 0$ — **B** ☐

C $-gL\sin(\phi) + 2gL\cos(\phi) - \mu_s 2gL\cos(\phi) = 0$ — **C** ☐

D $mgL\sin(\phi) + \mu_s 2mgL\cos(\phi) = 0$ — **D** ☐

E $\sin(\phi) = \mu_s 2\cos(\phi)$ — **E** ■

Q3

On étudie le mouvement d'un enfant de masse m sur un toboggan que l'on assimile à un plan incliné formant un angle θ avec l'horizontale.
A l'instant $t = 0$ s, la vitesse de l'enfant est nulle.
A l'instant $t = 1.5$ s, la vitesse de l'enfant vaut $v(t) = 1.5$ m/s.
La norme de l'accélération de la gravité est notée g.

Quel est le coefficient de frottement μ_c entre l'enfant et le toboggan ?

A $\mu_c = \dfrac{\sin(\theta) - 1}{\cos(\theta)}$ — **A** ☐

B $\mu_c = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ — **B** ☐

C $\mu_c = \dfrac{mg\sin(\theta) - 1}{mg\cos(\theta)}$ — **C** ☐

D $\mu_c = \dfrac{g\sin(\theta) - 1}{g\cos(\theta)}$ — **D** ■

E $\mu_c = \dfrac{\sin(\theta) - g}{\cos(\theta)}$ — **E** ☐

Q4

Une sphère de masse $4m$ est pendue à un crochet d'une longueur L.
Elle peut librement effectuer un mouvement circulaire complet autour du point d'attache dans un plan vertical.
Un projectile de masse m frappe la sphère horizontalement et s'encastre dans celle-ci.

Quelle est la vitesse minimale v du projectile pour que la sphère et le projectile encastré fassent un mouvement circulaire complet après la collision ?

A $v = \dfrac{25\sqrt{Rg}}{\sqrt{5}}$ — **A** ■

B $v = \dfrac{\sqrt{5Rg}}{4}$ — **B** ☐

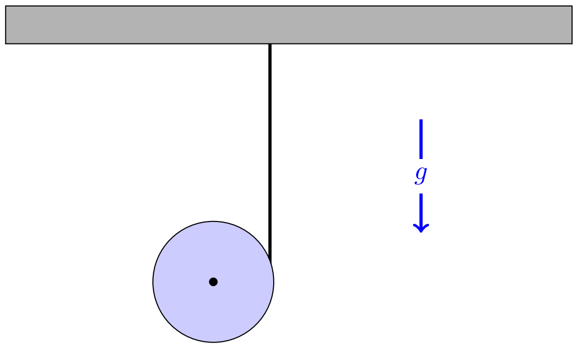
C $v = \dfrac{4\sqrt{Rg}}{5}$ — **C** ☐

D $v = \dfrac{\sqrt{Rg}}{5}$ — **D** ☐

E $v = \dfrac{\sqrt{2Rg}}{5}$ — **E** ☐

Q5

Un cylindre plein de rayon R et de masse m attaché par une corde descend.
C'est le jeu traditionnel du yoyo :-)



Quelle est l'amplitude de l'accélération a du yoyo ?

A $a = \frac{3g}{2}(1 + mR^2)$ — **A** ☐

B $a = \frac{3g}{2}(1 + mR)$ — **B** ☐

C $a = \frac{3g}{2}$ — **C** ☐

D $a = \frac{2g}{3}$ — **D** ■

E $a = \frac{g}{2}$ — **E** ☐

Q6

On étudie le mouvement d'un bloc de béton de masse m sur un monte-charge.
A l'instant $t = 0$, le monte-charge est immobile.
Ensuite on actionne le monte charge.
Pour les instants $t > 0$, la vitesse du bloc est alors donnée par :

$$v(t) = V\big(1 - \exp(-t/b)\big)$$

où V et b sont de constantes positives avec les unités adéquates.
La norme de l'accélération de la gravité est notée g.

Que vaut la force $F(t)$ exercée par le monte-charge sur le bloc pour $t > 0$?

A $F(t) = m\left(\frac{V}{b}\exp(-t/b) + g\right)$ — **A** ■

B $F(t) = m\left(\frac{b}{V}\exp(-t/b) - g\right)$ — **B** ☐

C $F(t) = m\left(\frac{V}{b}\exp(-t/b) - g\right)$ — **C** ☐

D $F(t) = m\left(g - \frac{V}{b}\exp(-t/b)\right)$ — **D** ☐

E $F(t) = mg$ — **E** ☐

Q7

Considérons un mouvement circulaire avec une vitesse angulaire constante ω.
La norme de la vitesse et de l'accélération sont notées v et a.
Quelle est l'unique paire de relations correctes ?

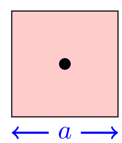
A	$v = r\ \omega^2$	$a = r\ \omega$	**A**	☐
B	$v = r\ \omega^2$	$a = r\ \omega^4$	**B**	☐
C	$v = r\ \omega$	$a = v\ \omega$	**C**	■
D	$v = r\ \omega$	$a = r^2\omega^2$	**D**	☐
E	$v = r/\omega$	$a = r/\omega^2$	**E**	☐

Q8

Le moment d'inertie pour faire tourner une plaque carrée autour d'un axe perpendiculaire à la plaque passant par le centre de gravité est donnée par l'expression :

$$I = m\ \frac{a^2}{6}$$

où a et m sont le coté et la masse de la plaque respectivement.



Quel est le moment d'inertie I_h
pour la faire tourner autour du coin inférieur droit ?

A	$I_h = m\ \frac{a^2}{3}$	**A**	☐
B	$I_h = m\ \frac{2a^2}{3}$	**B**	■
C	$I_h = m\ \frac{(6+\sqrt{2})}{6\sqrt{2}}\ a^2$	**C**	☐
D	$I_h = m\ \frac{5a^2}{6}$	**D**	☐
E	$I_h = m\ \frac{7a^2}{12}$	**E**	☐

Q9

Le temps de cuisson t d'un oeuf dans l'eau bouillante est donné par l'expression suivante :

$$t = C\ \kappa^a\ V^b$$

où κ est la diffusivité thermique de l'oeuf exprimée en m^2/s et V est le volume de l'oeuf exprimé en m^3, tandis que C, a et b sont des constantes sans dimensions.
Quelle est la valeur de b ?

A	$b = 0$	**A**	☐
B	$b = 1$	**B**	☐
C	$b = 2$	**C**	☐
D	$b = 3/2$	**D**	☐
E	$b = 2/3$	**E**	■

Q10

Un bloc de masse m est attaché par une corde à une poulie cylindrique pleine de masse M et de rayon R.
Sous l'effet de la gravité g, le bloc chute avec une accélération constante.
La masse de la corde est négligeable.
Quel vaut la norme de l'accélération a du bloc ?

A	$a = g$	**A**	☐
B	$a = \dfrac{mg}{M}$	**B**	☐
C	$a = \dfrac{2mg}{M+2m}$	**C**	■
D	$a = \dfrac{mg}{M+2m}$	**D**	☐
E	$a = \dfrac{mg}{M+m}$	**E**	☐

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) &= \sum M_i
\end{aligned}
$$

Formulaire

Lorsque les forces sont constantes,

$$
\begin{aligned}
\Delta\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t \\
\Delta\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}
\end{aligned}
$$

Mouvement d'un projectile

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$\Delta \overbrace{\left(\tfrac{1}{2} m\ v^2\right)}^{K} = \sum \overbrace{\vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W}$$

$$= \sum \underbrace{\vec{\mathbf{F}_{nc}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} - \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r} \Big)$$

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_x F_y - r_y F_x = F\ r_\perp = F_\perp\ r = F r \sin(\theta)$$

Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$

$$m\ \vec{\mathbf{x}}(t) = \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t) \Big)$$

$$m\ \vec{\mathbf{v}}(t) = \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t) \Big)$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\ r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\ k^2 = \sum m_i\ r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\ h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ \dfrac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m\ \dfrac{L^2}{12}$