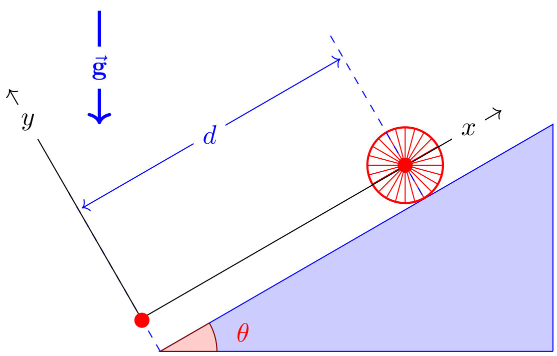
KINE11-EDPH11	
Août 2023	*Introduction à la mécanique*
IEPR 1011 -Bleu-	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

1 Roue qui roule n'amasse pas mousse...

A l'instant $t = 0$, on pose une roue avant usuelle de vélo de rayon $R = \frac{1}{3}$ m
et de masse $m = 1.5$ kg sur une pente de $\theta = 30^o$, avec une vitesse initiale nulle.
Pour atteindre le bas de la pente, la roue doit parcourir une distance $d = 100$ m.
Sous l'effet de la gravité, la roue va se mettre à rouler sans glissement.
L'accélération de la translation du centre de la roue sera constante !



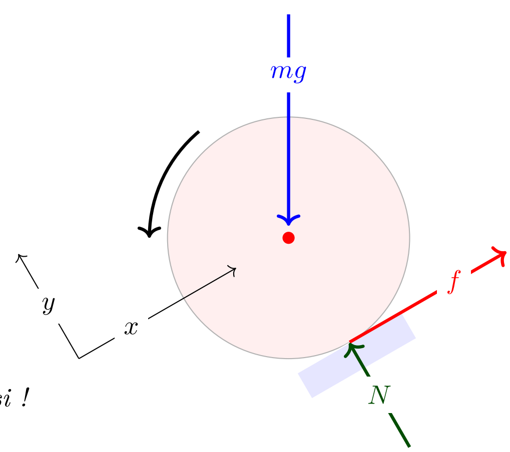
On utilisera un repère aligné le long de la pente et centré sur la position qu'occupera le centre de masse de la roue en bas de la pente.

On utilisera $g = 10$ m/s^2 pour effectuer tous les calculs.

1. Citer et dessiner l'ensemble de toutes les forces agissant sur la roue lorsqu'elle descend.
   Il y a la gravité, la force de réaction normale et la force de frottement qui fait tourner la roue.

Il faut donc dessiner et citer :

- *Force de gravité :* $m\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} -mg\sin\theta \\ -mg\cos\theta \end{bmatrix}$
- *Force de réaction normale :* $\vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0 \\ mg\cos\theta \end{bmatrix}$
- *Force de frottement :* $\vec{\mathbf{f}}(t) = \begin{bmatrix} -f(t) \\ 0 \end{bmatrix}$



Ici, le point d'application des forces est important aussi !

La force de gravité fait descendre la route :-)
La force de frottement fait tourner la roue et s'oppose par contre à la translation du centre du masse vers le bas : l'effet de la force de frottement est contradictoire pour la rotation et la translation, puisqu'elle transforme ici une énergie cinétique de translation en énergie cinétique de rotation. Une roue qui tourne sans glissement descendra donc bien plus lentement qu'une roue qui glisse sans rouler : on descend plus vite en dérapant qu'en roulant, si, si !

Dessiner correctement la force de frottement est indispensable pour valider cette sous-question.
Les deux autres forces sont évidentes à tracer (quoique :-) !
Il est aussi admis d'écrire une unique force de réaction avec des composantes tangentielle et normale.

Cette question semblait très élémentaire,
mais c'était déjà souvent la descente aux enfers pour beaucoup d'étudiants !

2. Calculer le moment d'inertie I de la roue de vélo.

   Il faut utiliser l'expression du moment d'inertie d'un cylindre creux et écrire simplement.

$$\boxed{I \;=\; mR^2 \;=\; \frac{3}{2} \times \frac{1}{9} \;=\; \frac{1}{6}\ \mathrm{kg\ m^2}}$$

   Noter au passage que cette formule était fournie dans le formulaire annexé au questionnaire.
   Il était donc vraiment impardonnable de ne pas obtenir cette valeur.
   Oui : il faut la valeur numérique exacte pour valider votre réponse.

3. Ecrire l'énergie cinétique de la roue[1] en fonction de la vitesse v du centre de masse.

   Il faut tenir de l'énergie cinétique de translation et de rotation de la roue !

$$K \;=\; \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{Sachant que } \omega = \frac{v}{R} \textit{ et } I = mR^2$$

$$K \;=\; \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2}{2}\,\frac{v^2}{R^2} \;=\; mv^2$$

On peut alors conclure : $\boxed{K(v) \;=\; mv^2}$

Oublier l'énergie de rotation est impardonnable !
La question était à nouveau très simple !

4. En faisant un bilan d'énergie, obtenir l'expression de la vitesse v du centre de masse de la roue en fonction de la position x du centre de masse de la roue.

   Le bilan d'énergie s'écrit simplement :

$$m\ v^2(x) + mgx\sin(\theta) \;=\; mgd\sin(\theta)$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En utilisant les valeurs numériques fournies,}$$

$$\frac{3}{2}\ v^2(x) + \frac{15\ x}{2} \;=\; 750$$

On obtient alors l'expression demandée : $\boxed{v(x) \;=\; \sqrt{500 - 5x}}$

Obtenir l'expression sous forme symbolique était admis :-)
Toutefois, il faut calculer les coefficients pour obtenir la réponse suivante !

[1] Oui, il faut tenir compte de la rotation de la roue et exprimer ω en fonction de v !

5. En déduire la vitesse lorsque la roue atteint le base de la pente ?
   Il suffit donc simplement d'évaluer la vitesse $v(x)$ pour $x = 0$:

$$v = \sqrt{gd\sin(\theta)}$$
$$\downarrow$$
$$v = \sqrt{500} = 22.36$$

On conclut donc : $\boxed{v = 22.36 \text{ m/s}}$

6. Combien de temps faudra-t-il pour la roue pour atteindre le bas de la pente ?
   L'accélération est constante, la vitesse initiale est nulle, on peut donc écrire :

$$\begin{cases} d = \dfrac{at^2}{2} \\ v = at \end{cases}$$

On peut directement en déduire que $at^2 = vt$ *et obtenir :*

$$d = \frac{vt}{2}$$
$$2d = = \sqrt{gd\sin(\theta)}\ t$$
$$\downarrow$$
$$t = \frac{2d}{\sqrt{gd\sin(\theta)}} = \frac{200}{\sqrt{500}} \approx 9$$

On conclut donc : $\boxed{t = 9 \text{ s}}$

7. Combien de temps faudrait-t-il pour la roue pour atteindre le bas de la pente,
   si elle glissait sur la pente au lieu de rouler sans glisser ?
   Est-ce que la roue qui dérape descendra plus vite que celle qui roule sans glisser ?
   Lorsque la roue dérape, il n'y a plus d'énergie de rotation à lui fournir, le bilan d'énergie devient :

$$\frac{m\ v_*^2}{2} = mgd\sin(\theta)$$
$$\downarrow$$
$$v_*^2 = 1000$$

On peut en déduire donc le temps en cas de dérapage...

$$t_* \;=\; \frac{2d}{\sqrt{2gd\sin(\theta)}} \;=\; \frac{200}{\sqrt{1000}} \;\approx\; 6.3$$

La roue qui dérape descendra donc plus vite que celle qui roule !
C'est d'ailleurs ce qui est usuellement connu par la plupart des gens !

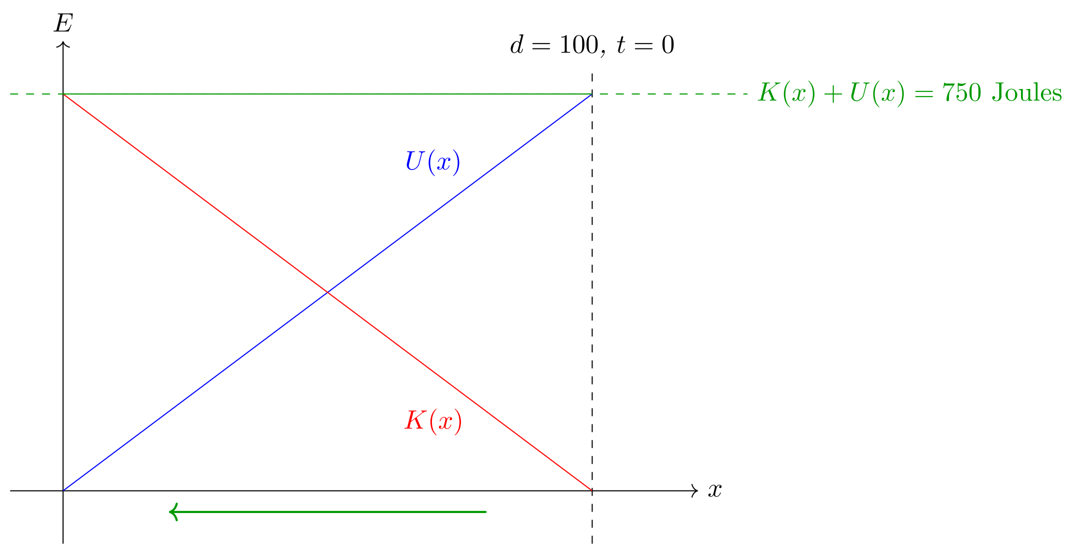
$$\boxed{t_* \;=\; 6.3 \text{ s}}$$

8. Esquisser l'évolution de l'énergie potentielle[2] et de l'énergie cinétique en fonction de $x \in [0, d]$.
L'expression des deux énergies en fonction de x est particulièrement simple !

$$U(x) \;=\; mgx\sin(\theta) \;=\; \frac{15x}{2}$$

$$K(x) \;=\; mgd\sin(\theta) - U(x) \;=\; 750 - \frac{15x}{2}$$

Il est alors élémentaire d'esquisser les courbes demandées ! La somme des deux énergies est une constante, car le frottement n'agit que sur le point de contact de la roue avec le sol où la vitesse est nulle : il n'y a donc aucun travail effectué par cette force !



Attention, le point de départ se trouve en $x = d$ à droite et le point d'arrivée en $x = 0$ à gauche : il faut donc simplement tracer deux droites, mais sans les inverser !
L'énergie cinétique est nulle en $x = d$ et maximale en $x = 0$: ce qui est perturbant, car le temps va dans le sens inverse de l'exe des x... Beaucoup d'étudiants se trompent malencontreusement !

[2] L'énergie potentielle gravitationnelle sera nulle en $x = 0$

2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Ne pas répondre ou cocher une réponse erronée ne fait rien perdre.
Par contre, il faut répondre correctement à six questions pour réussir cette partie.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !
Gommer pour les corrections !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

Q1

Considérons un ressort avec une constante de rigidité $k = 100$ N/m.
On y attache une petite masse de 100 grammes.
On suppose que l'accélération de la gravité vaut $g = 10$ m/s^2.

De quelle longueur h, le ressort va-t-il s'allonger ?

A $d = 0.1$ cm
B $d = 1$ cm
C $d = 2$ cm
D $d = 3$ cm
E $d = 10$ cm

A ☐ B ■ C ☐ D ☐ E ☐

Q2

On lance une balle avec une vitesse initiale v et un angle θ avec l'horizontale.
La résistance de l'air est négligeable.

Que vaudra la vitesse v_* de la balle au sommet de la trajectoire ?

A $v_* = 0$
B $v_* = v$
C $v_* = v \cos\theta$
D $v_* = v \sin\theta$
E $v_* = v \tan\theta$

A ☐ B ☐ C ■ D ☐ E ☐

Q3

Une cycliste roule à une vitesse de $v = 5$ m/s

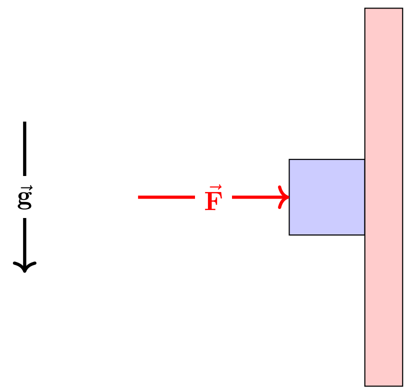
Quelle est l'unique affirmation correcte ?

A Sa vitesse est approximativement 1.4 km/h
B Sa vitesse est approximativement 10 km/h
C Sa vitesse est approximativement 18 km/h
D Sa vitesse est approximativement 36 km/h
E Sa vitesse est approximativement 180 km/h

A ☐ B ☐ C ■ D ☐ E ☐

Q4

On applique une force horizontale $F = 12$ N sur un bloc contre un mur vertical. La masse du bloc est 0.5 kg et le coefficient de frottement statique est $\mu_s = 0.6$. Que peut-on déduire ?



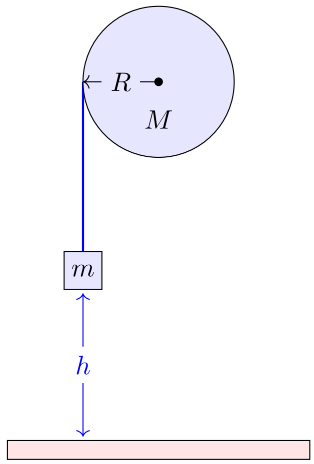
Une seule affirmation est correcte !

A La force de frottement est exactement égale à la force de gravité.
B La force de frottement et la force de gravité sont des forces conservatives.
C La force de frottement est supérieure à la force de gravité.
D La force de frottement est inférieure à la force de gravité.
E Le bloc glisse le long du mur sous l'action de la gravité.

A	■
B	☐
C	☐
D	☐
E	☐

Q5

Un fin cable est enroulé autour d'un cylindre de masse M et de rayon R.
Le cylindre tourne sans friction autour d'un axe horizontal fixe.
Nous relions l'extrémité libre du cable à un bloc de masse m.
Nous lâchons le bloc avec une vitesse initiale nulle d'une distance h du sol.
Lors de la chute du bloc, le cable se déroule sans s'allonger et sans glisser.



Quelle est la vitesse v du bloc lorsqu'il atteint le sol ?

A $v = \sqrt{\frac{4mgh}{M}}$ — **A** ☐

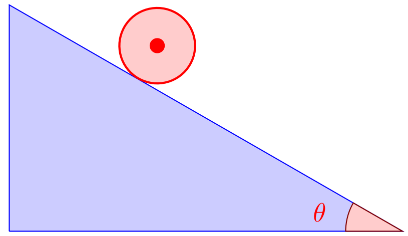
B $v = \sqrt{\frac{4mgh}{m+2M}}$ — **B** ☐

C $v = \sqrt{\frac{4mgh}{2m+M}}$ — **C** ■

D $v = \sqrt{\frac{2mgh}{2m+M}}$ — **D** ☐

E $v = \sqrt{\frac{2mgh}{m+2M}}$ — **E** ☐

Un cylindre plein roule sans glisser sur une route en pente avec un angle θ.
La masse du cylindre est m et son rayon est R.
Les coefficients de frottement statique et dynamique entre l'asphalte de la route et l'acier du cylindre sont notés μ_s et μ_c.



Q6 Que vaut la force de frottement exercée par le sol sur la roue ?

A $f = 0$ — **A** ☐

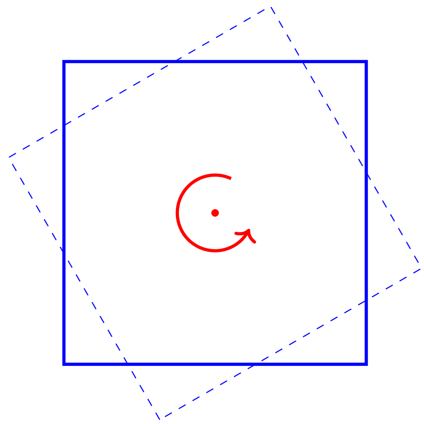
B $f = \mu_s mg \cos\theta$ — **B** ☐

C $f = \mu_c mg \cos\theta$ — **C** ☐

D $f = \dfrac{2mg\sin\theta}{3}$ — **D** ☐

E $f = \dfrac{mg\sin\theta}{3}$ — **E** ■

Une barre de longueur $4a$ et de masse m est est pliée (ou plus exactement cintrée) pour former une figure de forme carrée de côté a.



Q7 Il s'agit de calculer le moment d'inertie I qu'il faut utiliser lorsqu'on souhaite faire tourner ce carré autour de son centre. L'axe de rotation est évidemment perpendiculaire au plan du carré.

Quelle est la bonne expression pour ce moment d'inertie I ?

A $I = \frac{ma^2}{12}$ — **A** ☐

B $I = \frac{ma^2}{6}$ — **B** ☐

C $I = \frac{ma^2}{4}$ — **C** ☐

D $I = \frac{ma^2}{3}$ — **D** ■

E $I = \frac{ma^2}{2}$ — **E** ☐

Le rayon de la Terre vaut approximativement 6350 kilomètres et il faut 24 heures pour que notre planète effectue une rotation autour de son axe.

Quelle est la meilleure estimation de l'accélération centripète a due à la rotation de la Terre pour un point situé sur l'Equateur ?

Q8

A $a = 0.00335$ m/s^2 — **A** ☐
B $a = 0.0335$ m/s^2 — **B** ■
C $a = 0.335$ m/s^2 — **C** ☐
D $a = 3.35$ m/s^2 — **D** ☐
E $a = 9.81$ m/s^2 — **E** ☐

Q9

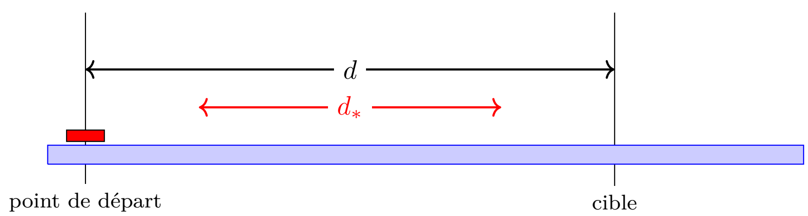
Afin de soulever une caisse et de la mettre en mouvement,
un déménageur excerce sur cette caisse une force.

Quelle est l'unique affirmation correcte ?

A Cette force est plus grande que celle que la caisse exerce sur lui. — A ☐
B Cette force est plus petite que celle que la caisse exerce sur lui. — B ☐
C Cette force est égale au produit de la masse par l'accélération de la caisse. — C ☐
D Cette force s'oppose au mouvement de la caisse. — D ☐
E Cette force est exactement égale à la force que la caisse exerce sur lui. — E ■

Q10

Le *curling* est un sport de précision pratiqué sur la glace avec des pierres en granite. Le but est de placer la pierre le plus près possible d'une cible appelée la maison. Les joueurs ont un balai de curling qui permet de modifier localement le frottement devant la pierre afin d'y créer des effets complexes permettant d'obtenir une trajectoire courbée. C'est l'origine du nom de ce sport !



Ici, nous considérons une version très simplifiée où la pierre de masse m suit une trajectoire rectiligne, sans aucun mouvement de rotation. La cible est à une distance d, la vitesse initiale de la pierre est v et le coefficient de frottement cinétique entre la pierre et la glace est μ_c. Afin que la pierre puisse atteindre la cible, les joueurs vont frotter la glace afin de réduire le coefficient de frottement à une valeur $\mu_* < \mu_c$, sur une section d_* de la trajectoire.

Quelle doit être la distance d_* ?

A $d_* = \dfrac{2\mu_c g d - v^2}{2(\mu_c - \mu_*)g}$ — A ■

B $d_* = \dfrac{2\mu_c g d - v^2}{2\mu_* g}$ — B ☐

C $d_* = \dfrac{2\mu_* g d - v^2}{2\mu_c g}$ — C ☐

D $d_* = \dfrac{v^2}{2(\mu_c - \mu_*)g}$ — D ☐

E $d_* = \dfrac{mv^2}{2(\mu_c - \mu_*)g}$ — E ☐

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) &= \sum M_i
\end{aligned}$$

Formulaire

Lorsque les forces sont constantes,

$$\begin{aligned}
\Delta\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t \\
\Delta\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

Mouvement d'un projectile

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$\Delta \overbrace{\left(\tfrac{1}{2} m\ v^2\right)}^{K} = \sum \overbrace{\vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W}$$
$$= \sum \underbrace{\vec{\mathbf{F}_{nc}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} - \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r}\Big)$$

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_x F_y - r_y F_x = F\ r_\perp = F_\perp\ r = F r \sin(\theta)$$

Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$
$$m\ \vec{\mathbf{x}}(t) = \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t)\Big)$$
$$m\ \vec{\mathbf{v}}(t) = \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t)\Big)$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\ r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\ k^2 = \sum m_i\ r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\ h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ \dfrac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m\ \dfrac{L^2}{12}$