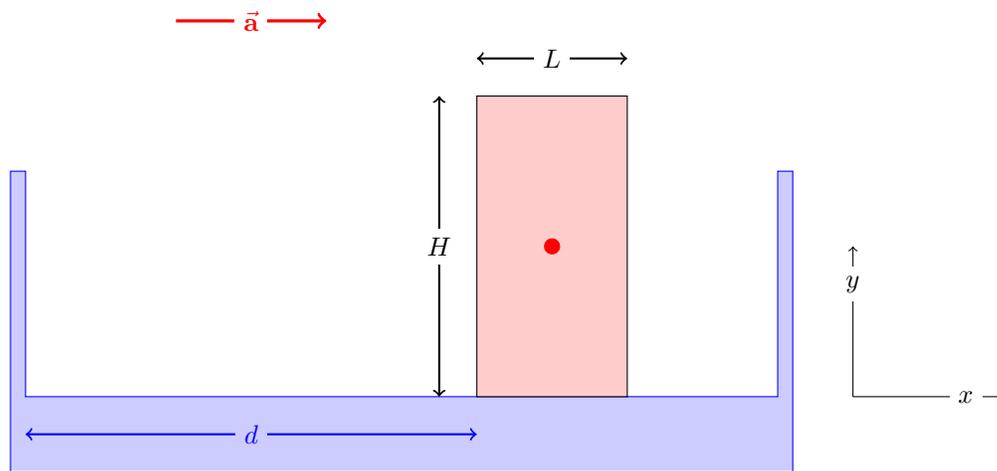


KINE11-EDPH11	
Août 2024	Introduction à la mécanique
IEPR 1011 -Bleu-	Vous pouvez conserver cet énoncé !

## 1 Un gros bloc dans un camion...

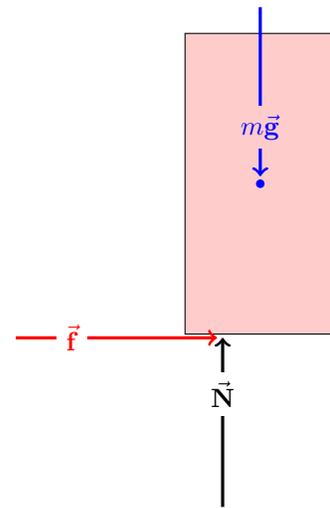
Un bloc de pierre avec une masse  $m = 30 \text{ kg}$  est posé sur la benne d'un camion à l'arrêt. Le bloc est situé à une distance  $d = 0.60 \text{ m}$  de l'extrémité arrière de la benne. A l'instant  $t = 0$ , la camion démarre avec une accélération constante  $a = 10 \text{ m/s}^2$ . Ensuite, sous l'effet de l'accélération du camion, le bloc va glisser (sans basculer !) sur la benne. Les coefficients de frottement statique entre le bloc et la benne du camion est  $\mu_s = 0.8$ , tandis que le coefficient dynamique est  $\mu_c = 0.7$ . La hauteur  $H$  et la base  $L$  du bloc sont inconnus.



1. Dessiner l'ensemble des forces qui s'appliquent sur le bloc pendant son déplacement sur la benne. Y indiquer clairement le nom et la notation habituelle pour chacune des forces.

Il faut donc citer :

- Force de gravité :  $m\vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$
- Force normale du sol :  $\vec{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix}$
- Force de frottement dynamique :  $\vec{f} = \begin{bmatrix} \mu_c mg \\ 0 \end{bmatrix}$



Attention, *il n'y a pas de force horizontale qui pousse le bloc*. Le bloc a une accélération dans la direction du camion, mais de norme plus modeste : il y a une uniquement la force de frottement qui induit le mouvement du bloc pour qu'il reste en contact avec le camion, alors qu'initialement, ce pauvre bloc n'avait aucune envie de bouger. C'est une variante de l'exemple 6.3 du livre de référence

: le frottement entre le bloc et la benne induit le mouvement du bloc et a tendance à ralentir le camion. Faire avancer le camion à vide ou avec le bloc n'est pas équivalent : le frottement s'oppose au mouvement du camion :-). Inclure une force motrice additionnelle est donc une erreur assez impardonnable qui a malheureusement été faite par beaucoup d'étudiants. Finalement, toutes les forces sont constantes et donc il s'agit à nouveau d'un simple MRUA : si, si !

Dans la réponse, on peut supposer que le bloc ne glisse pas et indiquer une force de frottement statique. Ou bien on peut aussi supposer que le bloc glisse et indiquer une force de frottement dynamique : ce qui est bien le cas ici comme cela était indiqué dans l'énoncé. En conséquence, indiquer les deux forces simultanément est aussi une erreur impardonnable : en particulier si on les indique en sens opposé !

Beaucoup d'étudiants se trompent dans le sens du frottement en pensant qu'il doit automatiquement s'opposer au mouvement : ce qui est presque toujours le cas, mais pas ici ! Toutefois, le correcteur a souvent fait preuve d'une indulgence (coupable ?) à l'égard de ces étudiants... surtout si la suite des calculs était cohérent :-)

- Calculer la valeur maximale possible pour la force de frottement statique entre le bloc et la benne. En déduire que le bloc doit glisser dans la benne du camion.

D'une part, la force de frottement statique maximale est donnée par :

$$\begin{array}{l} f_{s,max} = \mu_s mg \\ \downarrow \\ f_{s,max} = 240 \text{ N} \end{array}$$

D'autre part, si le bloc ne glisse pas dans le camion, l'accélération du bloc doit être égale à celle du camion. La loi de Newton impose que :

$$\begin{array}{l} ma = f_s \\ \downarrow \\ 300 \text{ N} = f_s \end{array}$$

On observe que  $f_s$  devrait être supérieure à  $f_{s,max}$  : ce qui est impossible. Le bloc doit glisser et la force de frottement doit être calculée avec le coefficient dynamique.

On conclut donc :  $f = \mu_c mg = 210 \text{ N}$

- Calculer l'accélération (par rapport à un repère fixe) du bloc pendant son déplacement.

En utilisant les axes définis sur la figure, on obtient immédiatement l'accélération demandée en écrivant la loi de Newton :  $ma = \mu_c mg$ .

L'accélération du bloc par rapport à la route est :  $a = 7 \text{ m/s}^2$

Cette accélération du bloc va dans la même direction que celle du camion, mais la norme de cette accélération est inférieure à celle du camion. Bien que cela ne soit pas demandé, on pourrait ensuite déduire l'accélération relative du bloc par rapport au camion vaut :  $7 - 10 = -3 \text{ m/s}^2$  : c'est bien ce qu'on observe le bloc est projeté sur l'arrière du camion et va donc reculer dans la benne :-)

4. A quel instant  $t_c$ , la malle va-t-elle entrer en contact avec l'extrémité arrière de la benne ?

On calcule tout d'abord le temps nécessaire *en utilisant l'accélération relative* :

$$(a_{\text{bloc}} - a_{\text{camion}}) \frac{t_c^2}{2} = -d$$

$$t_c = \sqrt{\frac{2d}{3}}$$

On conclut :

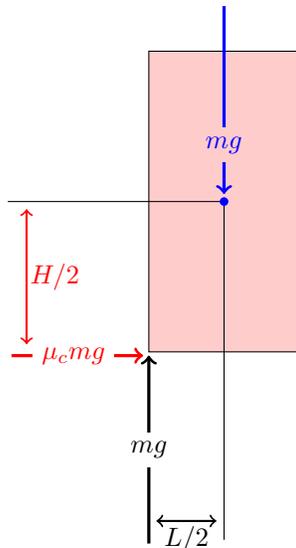
$$t_c = \sqrt{\frac{12}{30}} = \sqrt{\frac{2}{5}} = 0.63 \text{ s}$$

*Quasiment tous les étudiants ont bêtement et mécaniquement utilisé l'accélération absolue calculée plus haut et n'ont donc pas obtenu le bon résultat !*

*Evidemment, les quelques étudiants qui avaient fourni l'accélération relative à la question précédente, fournissent -ici- la bonne réponse... Mais ces étudiants qui semblent avoir mieux compris ce qui se passait, semblent refuser de me fournir l'accélération absolue dans la question précédente. En conclusion, les très rares étudiants qui ont bien répondu aux deux questions provoquaient une grande joie chez le correcteur dans un désespoir persistant qui l'habitait pendant la lecture des nombreuses copies assez surréalistes...*

5. Calculer le rapport entre  $H$  et  $L$  afin que le bloc ne bascule pas sur la benne. Justifier votre réponse.

*Pour éviter que le bloc ne bascule, il faut que l'équilibre de rotation soit satisfait et donc calculer le point d'application de la force de réaction du sol (composante frottement et composante normale) afin d'obtenir cet équilibre. Le cas le plus critique avant le basculement se produit lorsque la réaction s'effectue sous le coin gauche du bloc : le frottement a tendance à faire pivoter le bloc autour du centre de masse dans le sens horlogique, tandis que la réaction normale a un effet inverse.*



*Pour obtenir le résultat en exigeant l'équilibre des moments des deux composantes de la réaction du sol par rapport au centre de gravité du bloc.*

$$\mu_c mg \frac{H}{2} = mg \frac{L}{2}$$

$$\mu_c H = L$$

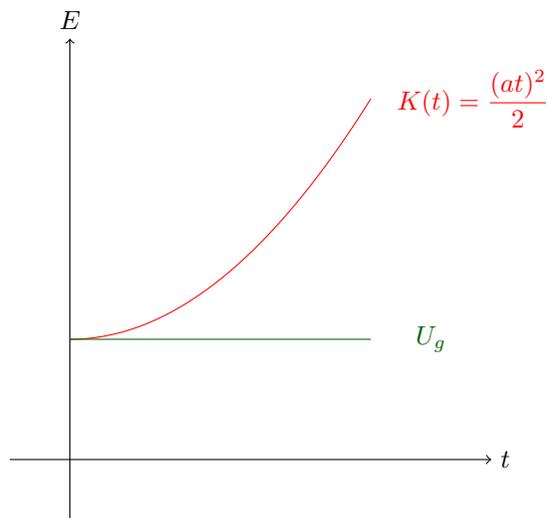
On conclut :  $\frac{H}{L} \leq \frac{1}{0.70} = 1.43$

*Cela correspond bien à l'intuition : le bloc ne doit pas être trop haut et il vaut mieux le coucher sur le flanc dans le camion :-)*

On pourrait aussi considérer la rotation du bloc autour du coin inférieur gauche et considérer un repère mobile : cette approche plus rigoureuse nécessiterait d'introduire une pseudo-force correspondant à l'accélération du camion et le poids du bloc : l'application de l'équilibre de rotation autour du coin inférieur gauche fournit la même condition.

6. Dessiner l'évolution de l'énergie cinétique et potentielle du bloc en fonction du temps entre les instants  $t = 0$  et  $t = t_c$ .

L'évolution de l'énergie potentielle et cinétique *en fonction du temps* est donnée par :



L'énergie potentielle reste constante puisque le bloc reste à la même hauteur puisque la route est horizontale. L'énergie cinétique est une parabole puisqu'elle s'écrit comme un polynôme du second degré par rapport au temps.

*Un nombre vraiment très élevé d'étudiants dessinent vraiment n'importe quoi pour cette question... Finalement, observons qu'après le choc avec l'arrière du camion, le bloc aura exactement la même vitesse que le camion : en d'autres mots, il ira plus vite et donc son énergie cinétique fera un bon pour rejoindre un parabole qui grandit plus vite. Et pourtant, beaucoup d'étudiants disent qu'à ce moment, l'énergie cinétique s'annule car la vitesse relative entre le camion et le bloc s'annule : et beh non :-)*

Répondez à chaque sous-question et uniquement à ce qui est demandé.

Soyez précis dans les graphes.

Chaque sous-question peut être résolue de manière symbolique, si les résultats précédents font défaut !

Détaillez vos calculs afin de clairement montrer votre démarche.

Pensez à encadrer les résultats principaux pour les mettre en évidence.

On utilisera  $g = 10\text{m/s}^2$  dans les calculs.

## 2 Questions à choix multiples

Attention !

Il y a toujours une et une seule bonne réponse !

Ne pas répondre ou cocher une réponse erronée ne fait rien perdre.

Par contre, il faut répondre correctement à six questions pour réussir cette partie.

Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)

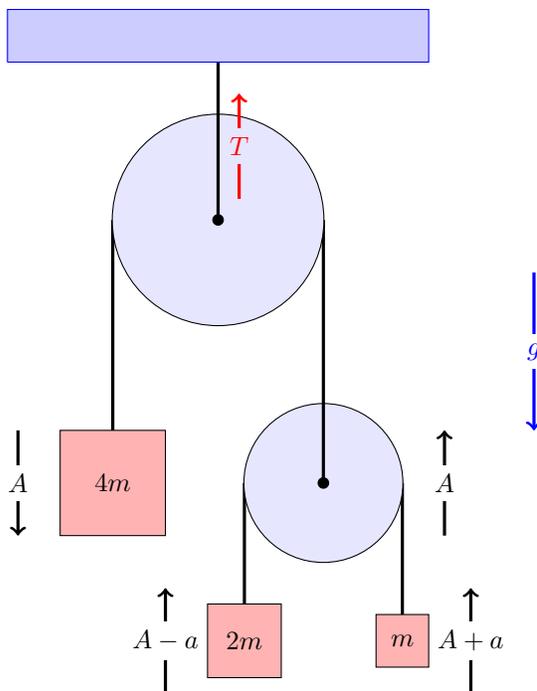
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !

Gommer pour les corrections !

N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

Q1

Trois masses sont suspendues à deux poulies supposées de masse et d'inertie négligeable. Il n'y a aucun frottement dans les poulies. On note  $A$  l'accélération de la plus grosse masse et  $a$  l'accélération de la plus petite masse par rapport à la poulie qui la retient. La plus grosse masse descend et la plus petite remonte.



Quelle est la force  $T$  qui retient la première poulie ?

A  $T = \frac{64mg}{7}$

B  $T = \frac{32mg}{5}$

C  $T = \frac{30mg}{5}$

D  $T = \frac{21mg}{4}$

E  $T = \frac{16mg}{5}$

A

B

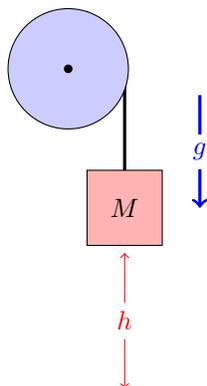
C

D

E

Q2	<p>En partant du repos, un coureur de 70 kg parcourt une distance de six mètres en une seconde. En une approximation un peu rapide, on suppose que les jambes du coureur produisent une force horizontale constante <math>F</math>.</p> <p>Que vaudrait cette force ?</p> <p><b>A</b> <math>F = 840</math> N  <b>B</b> <math>F = 700</math> N  <b>C</b> <math>F = 420</math> N  <b>D</b> <math>F = 350</math> N  <b>E</b> <math>F = 70</math> N</p>	<p><b>A</b> <input checked="" type="checkbox"/>  <b>B</b> <input type="checkbox"/>  <b>C</b> <input type="checkbox"/>  <b>D</b> <input type="checkbox"/>  <b>E</b> <input type="checkbox"/></p>
Q3	<p>Un bloc de masse <math>m</math> est attaché par une corde à une poulie cylindrique pleine de masse <math>M</math> et de rayon <math>R</math>.  Sous l'effet de la gravité <math>g</math>, le bloc chute avec une accélération constante.  La masse de la corde est négligeable.  Quel vaut la norme de l'accélération <math>a</math> du bloc ?</p> <p><b>A</b> <math>a = g</math>  <b>B</b> <math>a = \frac{mg}{M}</math>  <b>C</b> <math>a = \frac{2mg}{M + 2m}</math>  <b>D</b> <math>a = \frac{mg}{M + 2m}</math>  <b>E</b> <math>a = \frac{mg}{M + m}</math></p>	<p><b>A</b> <input type="checkbox"/>  <b>B</b> <input type="checkbox"/>  <b>C</b> <input checked="" type="checkbox"/>  <b>D</b> <input type="checkbox"/>  <b>E</b> <input type="checkbox"/></p>
Q4	<p>A l'instant <math>t = 0</math>, un bloc a une énergie cinétique <math>K_0</math> et une masse <math>m</math>.  Ensuite, il subit une accélération <math>a</math> pendant un intervalle de temps <math>\Delta t</math>.  On observe que sa quantité de mouvement a doublé.  Que vaut son énergie cinétique <math>K</math> à l'instant <math>t = \Delta t</math> ?</p> <p><b>A</b> <math>K = K_0 + 4m(a\Delta t)^2</math>  <b>B</b> <math>K = K_0 + 2m(a\Delta t)^2</math>  <b>C</b> <math>K = K_0</math>  <b>D</b> <math>K = 2K_0</math>  <b>E</b> <math>K = 4K_0</math></p>	<p><b>A</b> <input type="checkbox"/>  <b>B</b> <input type="checkbox"/>  <b>C</b> <input type="checkbox"/>  <b>D</b> <input type="checkbox"/>  <b>E</b> <input checked="" type="checkbox"/></p>
Q5	<p>Une bouteille a été couchée sur le plancher d'un compartiment de train lorsque celui-ci était à l'arrêt. La bouteille y restait alors au repos.  Quand le train se met en marche, quel mouvement fait la bouteille ?</p> <p><b>A</b> Elle ne bouge pas.  <b>B</b> Elle ne bouge pas par rapport au train.  <b>C</b> Elle roule vers l'avant du compartiment.  <b>D</b> Elle roule vers l'arrière du compartiment.  <b>E</b> Elle s'envole verticalement.</p>	<p><b>A</b> <input type="checkbox"/>  <b>B</b> <input type="checkbox"/>  <b>C</b> <input type="checkbox"/>  <b>D</b> <input checked="" type="checkbox"/>  <b>E</b> <input type="checkbox"/></p>

Un bloc de masse  $M$  est suspendu à une poulie pleine de masse  $m$  et de rayon  $R$ . A l'instant  $t = 0$ , le bloc a une vitesse nulle et est lâché à une hauteur  $h$  du sol.



Q6

Quelle est l'amplitude de la vitesse  $v$  de la masse lorsqu'elle touche le sol ?

**A**  $v = \sqrt{\frac{4Mgh}{2M + m}}$

**B**  $v = \sqrt{\frac{2Mgh}{2M + m}}$

**C**  $v = \sqrt{\frac{2mghR}{2MR^2 + mR^2}}$

**D**  $v = \sqrt{\frac{4Mgh^2}{2MR + mR}}$

**E**  $v = \sqrt{\frac{4Mgh}{2M - m}}$

**A**

**B**

**C**

**D**

**E**

La masse de Jacques est  $m_1$  tandis que la masse de Pierre est  $m_2$ . Ils se trouvent à une distance de  $L$  l'un de l'autre sur un lac gelé où ils peuvent glisser sans aucun frottement. Ils sont initialement immobiles. Ensuite, ils tirent chacun sur une même corde tendue entre eux de sorte que la vitesse de Pierre est  $v_2$ . La longueur de la corde entre eux se réduit donc progressivement. Quelle est la distance  $d$  entre leur point de rencontre et la position initiale de Jacques ?

Q7

**A**  $d = \frac{m_2}{m_1} L$

**B**  $d = \frac{m_1}{m_2} L$

**C**  $d = \frac{m_2}{m_1 + m_2} L$

**D**  $d = \frac{m_1}{m_1 + m_2} L$

**E**  $d = \frac{m_1 + m_2}{m_2 - m_1} L$

**A**

**B**

**C**

**D**

**E**

<p>Q8</p> <p>Une balle est lancée vers le haut. On néglige les frottements de l'air. Quelles sont les forces agissant sur la balle lors de sa montée ?</p> <p><b>A</b> La force de gravité. <b>B</b> La force verticale qui pousse vers le haut. <b>C</b> La force de gravité et une force verticale décroissante qui pousse vers le haut. <b>D</b> La force de gravité et une force verticale constante qui pousse vers le haut. <b>E</b> La force de gravité et une force verticale croissante qui pousse vers le haut.</p>	<p><b>A</b> <input checked="" type="checkbox"/> <b>B</b> <input type="checkbox"/> <b>C</b> <input type="checkbox"/> <b>D</b> <input type="checkbox"/> <b>E</b> <input type="checkbox"/></p>
---	---

<p>Q9</p> <p>Quelles sont les unités d'une puissance ?</p> <p><b>A</b> <math>kg\ m^2 / s^4</math> <b>B</b> <math>N\ m / s^2</math> <b>C</b> <math>kg^2\ m^2 / s^2</math> <b>D</b> <math>J\ s</math> <b>E</b> <math>J / s</math></p>	<p><b>A</b> <input type="checkbox"/> <b>B</b> <input type="checkbox"/> <b>C</b> <input type="checkbox"/> <b>D</b> <input type="checkbox"/> <b>E</b> <input checked="" type="checkbox"/></p>
---	---

<p>Q10</p> <p>Une voiture effectue un virage circulaire de rayon <math>R</math> sur une route dont le côté extérieur est relevé d'un angle <math>\theta</math> par rapport à l'horizontale. Les coefficients de frottement statique et dynamique entre les pneus de la voiture et le sol sont notés <math>\mu_s</math> et <math>\mu_c</math>. L'accélération de la gravité est notée <math>g</math>.</p> <p>Quelle est la vitesse maximale <math>v</math> pour que la voiture ne dérape pas ?</p> <p><b>A</b> <math>v = \sqrt{Rg \frac{\sin(\theta) + \mu_c \cos(\theta)}{\cos(\theta)}}</math> <b>B</b> <math>v = \sqrt{Rg \frac{\sin(\theta) + \mu_s \cos(\theta)}{\mu_c \sin(\theta)}}</math> <b>C</b> <math>v = \sqrt{Rg \frac{\mu_s \sin(\theta)}{\sin(\theta) - \mu_s \cos(\theta)}}</math> <b>D</b> <math>v = \sqrt{Rg \frac{\sin(\theta) + \mu_s \cos(\theta)}{\cos(\theta) - \mu_s \sin(\theta)}}</math> <b>E</b> <math>v = \sqrt{Rg \frac{\sin(\theta) + \mu_c \cos(\theta)}{\cos(\theta) - \mu_c \sin(\theta)}}</math></p>	<p><b>A</b> <input type="checkbox"/> <b>B</b> <input type="checkbox"/> <b>C</b> <input type="checkbox"/> <b>D</b> <input checked="" type="checkbox"/> <b>E</b> <input type="checkbox"/></p>
---	---

*N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.*

# Formulaire

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(m \vec{v}) &= \sum \vec{F}_i \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}I \omega^2\right) &= \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \\ \frac{d}{dt}(I \omega) &= \sum M_i\end{aligned}$$

Lorsque les forces sont **constantes**,

$$\begin{aligned}\Delta(m \vec{v}) &= \sum \vec{F} \Delta t \\ \Delta\left(\frac{1}{2}m v^2\right) &= \sum \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}\end{aligned}$$

## Mouvement d'un projectile

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\ \vec{v}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\ \vec{a}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)  
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

**Mouvement circulaire uniformément accéléré** :  $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\ \vec{a}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Vitesse :  $v = r\omega$

Accélération :  $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire  $\omega$  et accélération angulaire  $\alpha$

### Bilan d'énergie

$$\begin{aligned}\Delta \overbrace{\left(\frac{1}{2} m v^2\right)}^K &= \sum \overbrace{\vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta \vec{\mathbf{x}}}^W \\ &= \underbrace{\sum \vec{\mathbf{F}}_{nc} \cdot \Delta \vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} - \Delta \left( \underbrace{mg h}_{U_g} + \underbrace{\frac{1}{2} k x^2}_{U_r} \right)\end{aligned}$$

### Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_x F_y - r_y F_x = F r_{\perp} = F_{\perp} r = F r \sin(\theta)$$

### Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$

$$m \vec{\mathbf{x}}(t) = \sum (m_i \vec{\mathbf{x}}_i(t))$$

$$m \vec{\mathbf{v}}(t) = \sum (m_i \vec{\mathbf{v}}_i(t))$$

### Moment d'inertie

$$I = \sum m_i r_i^2$$

### Rayon de giration

$$m k^2 = \sum m_i r_i^2$$

### Théorème des axes parallèles

$$I_h = m h^2 + I$$

### Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution  $I = m R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution  $I = m \frac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central  $I = m \frac{L^2}{12}$