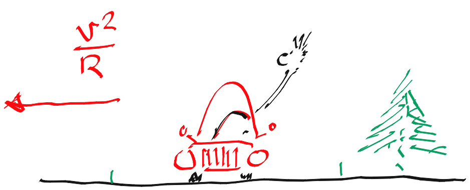
- **Le moment est le produit du bras de levier par la force.**
- **L'énergie cinétique d'un corps est la somme de l'énergie du mouvement du centre de masse et de l'énergie de la rotation du corps autour de ce point.**
- **Pour la rotation d'un corps autour de son centre de masse, les moments de force, le moment cinétique et le moment d'inertie du corps sont l'équivalent des forces, de la quantité de mouvement et de la masse pour le mouvement de ce point !**
- **Un corps est à l'équilibre si la somme des forces et des moments est nulle : c'est l'équilibre statique.**

$$\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(I\ \omega\right) = \sum M_i$$

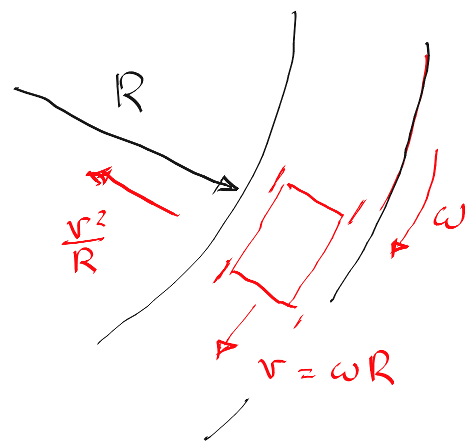
A quelle vitesse la voiture fera-t-elle un tonneau ?



Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$0 = \sum M_i$$

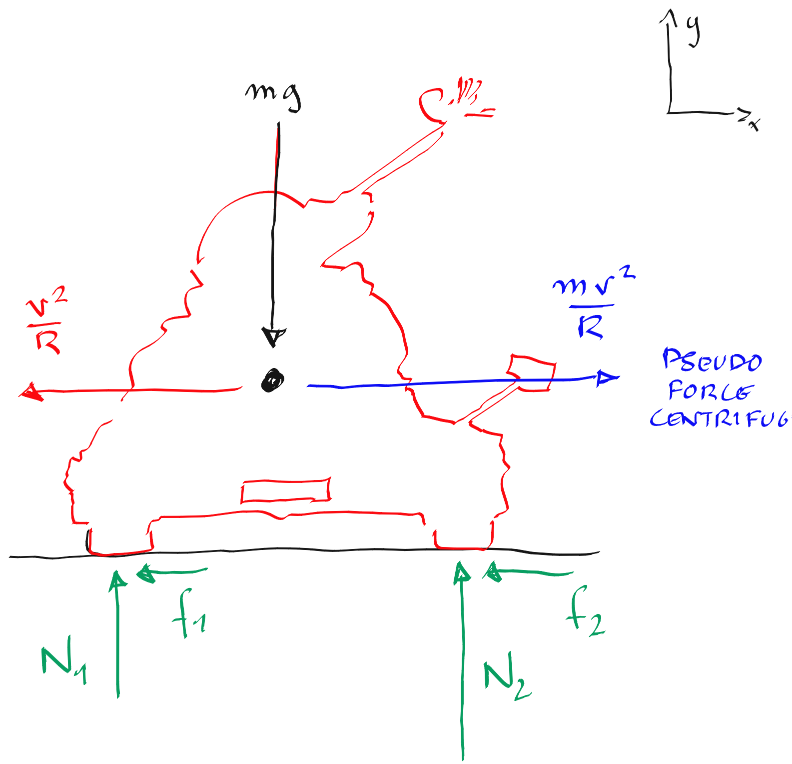


3 EQUATIONS
3 INCONNUES

$$\sum F_x = -m\frac{v^2}{R}$$

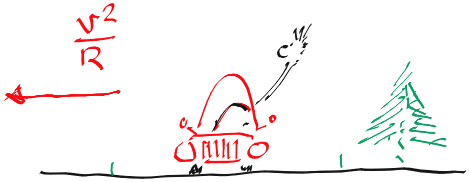
$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M = 0$$

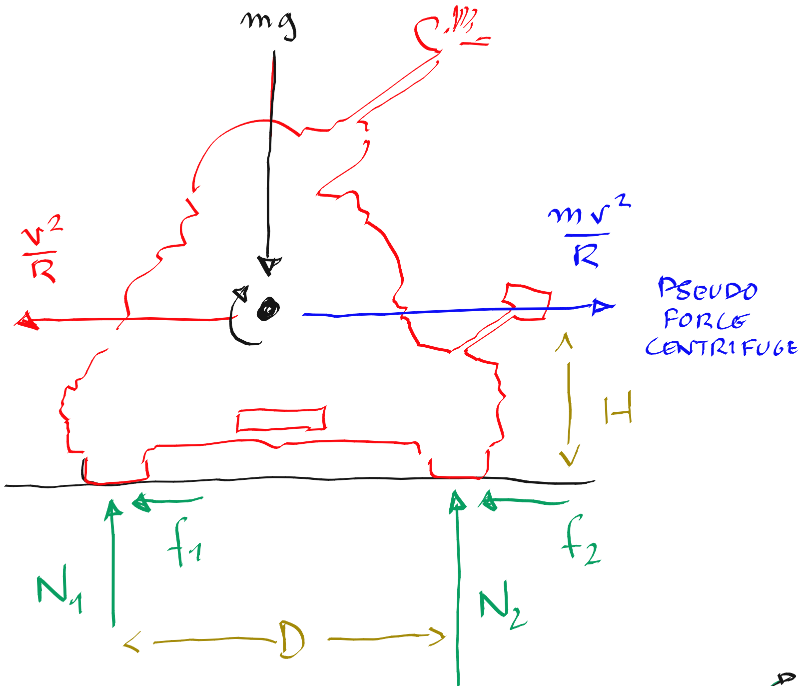


3 INCONNUES

$\boxed{f_1 + f_2}$ $\boxed{N_1}$ $\boxed{N_2}$



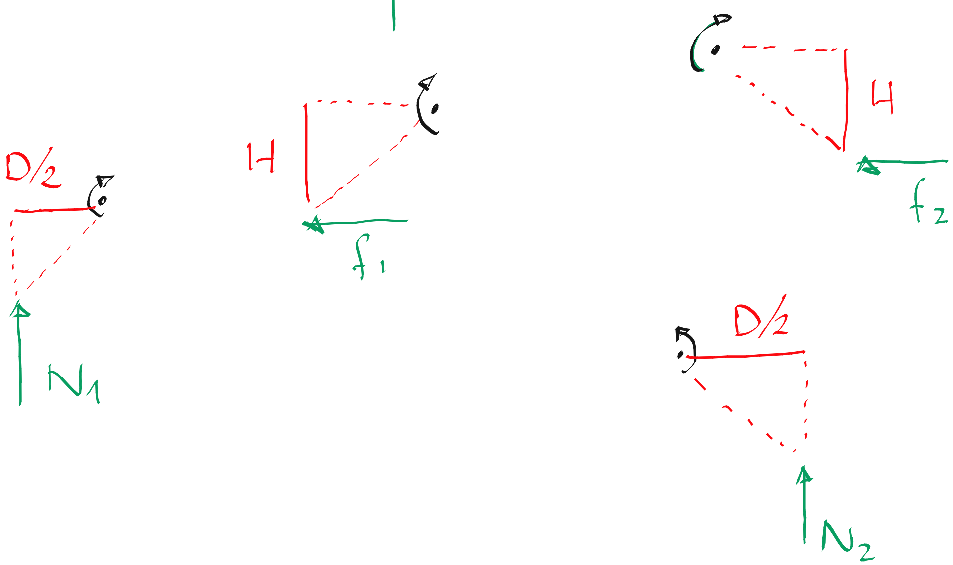
Trois équations !
Trois inconnues !



$$f_1 + f_2 = m\frac{v^2}{R}$$

$$N_1 + N_2 - mg = 0$$

$$\underbrace{f_1 H + f_2 H}_{(f_1+f_2)H} + N_1\frac{D}{2} - N_2\frac{D}{2} = 0$$



Trois équations !

Trois inconnues !

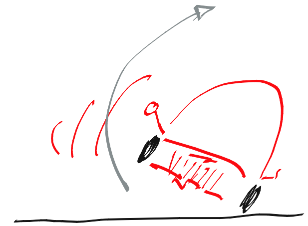
$$\cancel{f_1} + f_2 = m\frac{v^2}{R}$$

$$\cancel{N_1} + N_2 - mg = 0$$

$$\underbrace{f_1 H + f_2 H}_{(\cancel{f_1}+f_2)H} + \cancel{N_1}\frac{D}{2} - \underbrace{N_2}_{mg}\frac{D}{2} = 0$$

$$(\cancel{f_1}+f_2)H = \frac{mv^2}{R}H$$

$$\frac{\cancel{m}v^2}{R}H = \cancel{m}g\frac{D}{2}$$



$$v^2 = \frac{RgD}{2H}$$

$[m/s^2]$

$$\boxed{v = \sqrt{g\frac{RD}{2H}}}$$

$$\frac{[m][m]}{[m]}$$

$$\sqrt{\frac{[m^2]}{[s^2]}} = \frac{[m]}{[s]}$$

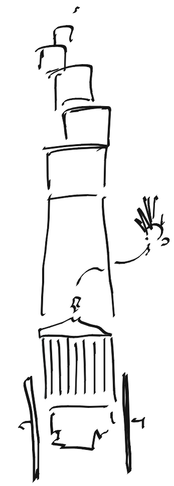
Calcul de la vitesse critique !

C’est indépendant du coefficient de frottement !

$$\boxed{v = \sqrt{\underbrace{g}_{[m/s^2]} \underbrace{\frac{RD}{2H}}_{\frac{[m][m]}{[m]}}}}$$

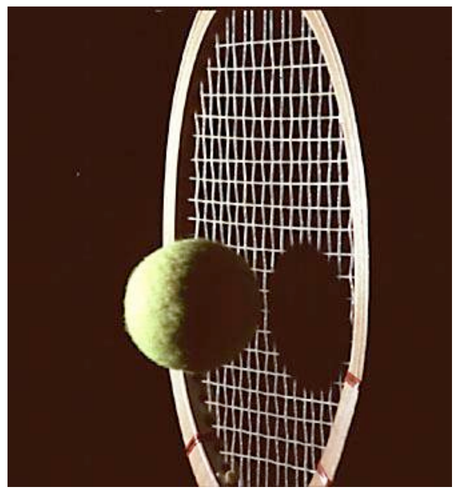
$$\sqrt{\frac{[m^2]}{[s^2]}} = \frac{[m]}{[s]}$$

$D \nearrow \quad H \searrow \quad \Rightarrow \quad v \nearrow$



Concevoir une voiture
qui ne fera pas trop vite un tonneau !

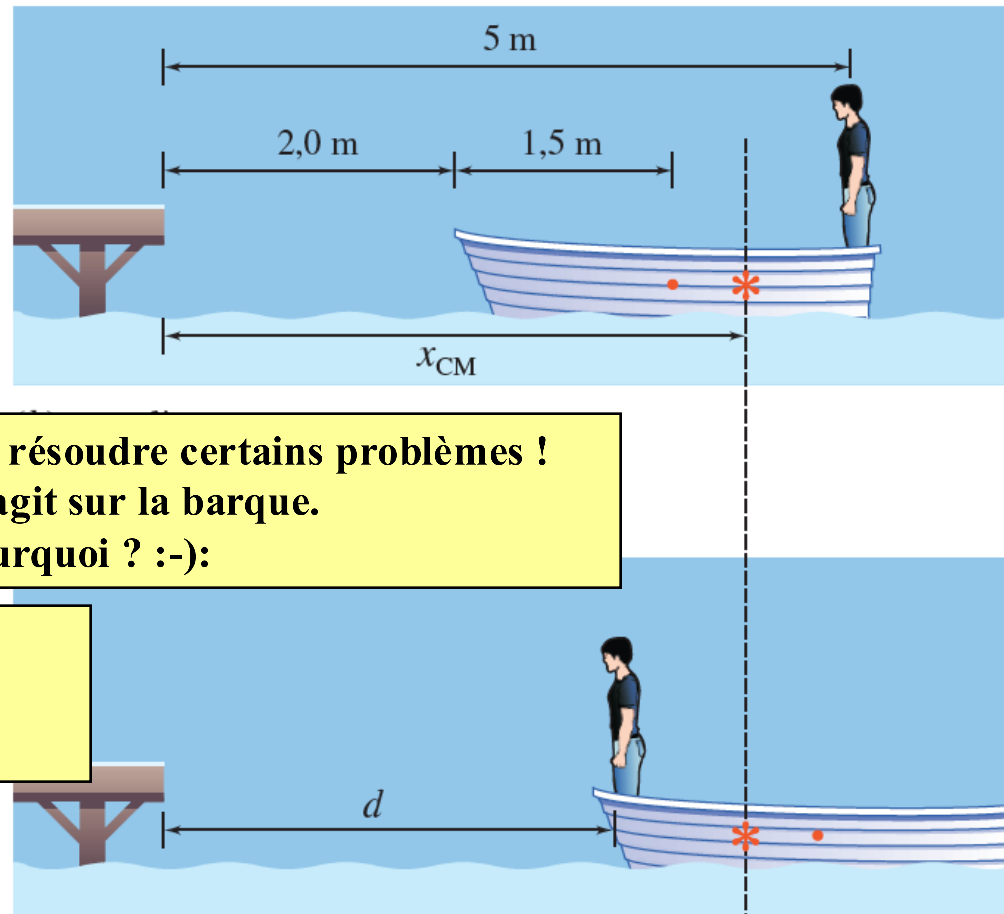
Un corps, cela peut aussi être un paquet de corps !



On peut appliquer la conservation
de la quantité de mouvement ou de l’énergie
pour l’ensemble du système.

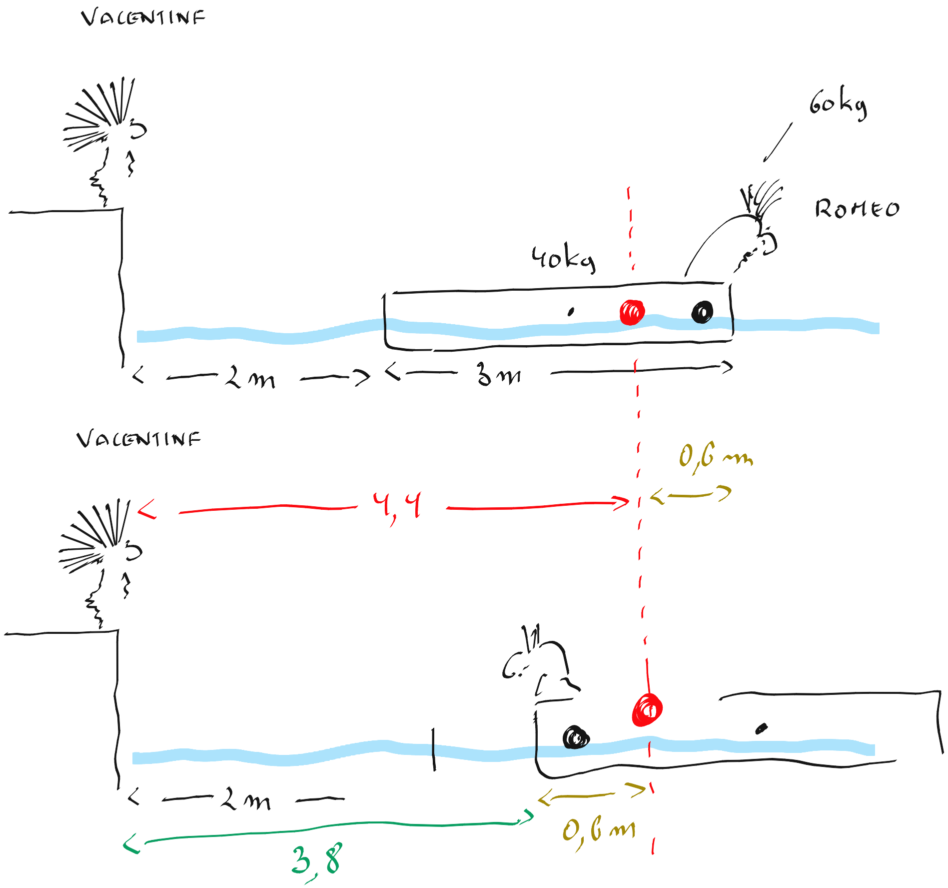
C’est ce qu’on a fait pour analyser les chocs !

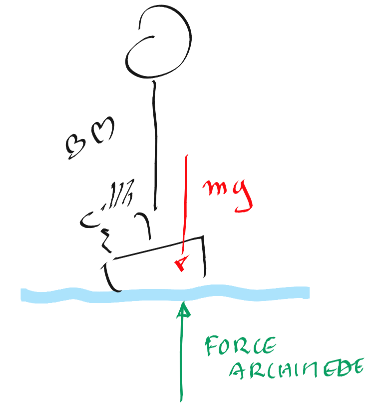
Deux corps comme un unique système...



C'est vraiment une manière très efficace de résoudre certains problèmes !
Ici, on suppose qu'aucune force extérieure agit sur la barque.
C'est une approximation un peu fausse (pourquoi ? :-):

Ensuite, on peut appliquer la conservation de la quantité de mouvement pour l'ensemble du système.



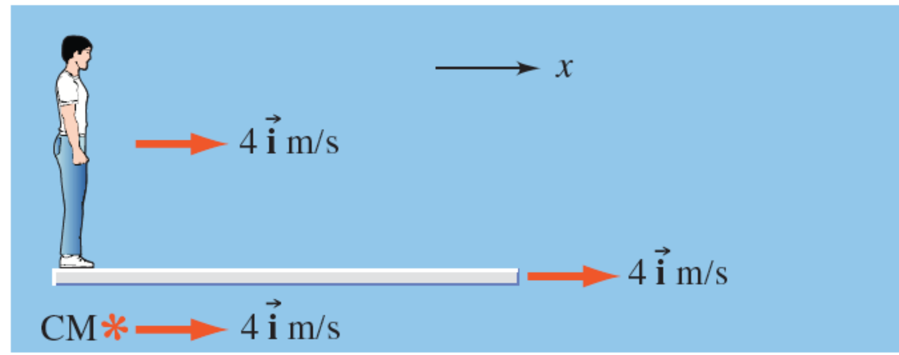


$$\vec{x} = \underbrace{\frac{m_{CANOT}}{m}}_{0.4}\ 3,5 + \underbrace{\frac{m_{ROMEO}}{m}}_{0,6}\ 5 = 1,4 + 3 = 4,4$$

Un passager sur une barque

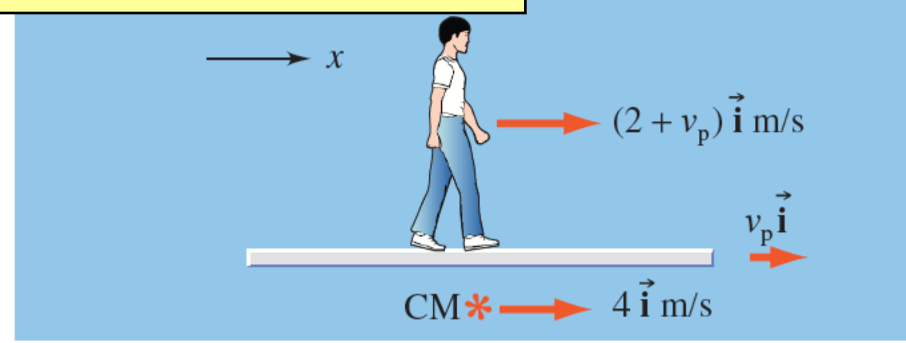
Deux corps comme un unique système...

Planche = 25 kg
Passager = 75 kg



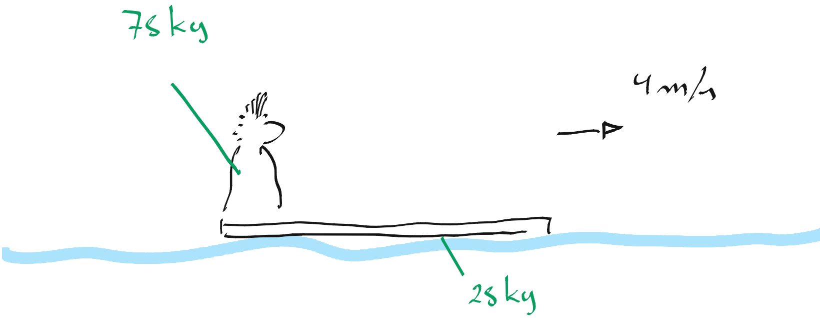
Ici, on suppose à nouveau qu'aucune force extérieure agit sur la planche.
On la dépose sur un lac gelé :-)

Ensuite, on peut appliquer la conservation
de la quantité de mouvement
pour l'ensemble du système.



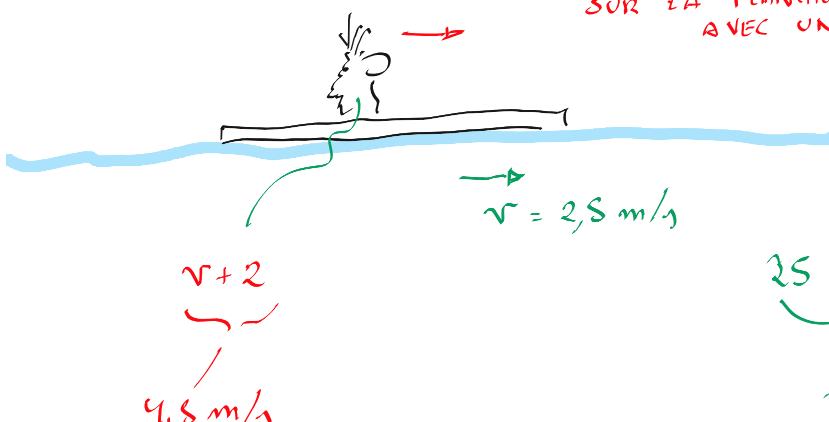
LA QUANTITÉ DE MVT

EST CONSERVÉE !



$$\underbrace{100 \times 4 = 400 \text{ kg m/s}}_{\text{QUANTITÉ DE MVT}}$$

SE DÉPLACE SUR LA PLANCHE AVEC UNE VITESSE RELATIVE DE 2 m/s



$$25\,v + (2+v)\,75$$

$$100\,v + 150 = 400$$

$$100\,v = 250$$

$$v = 2{,}5$$

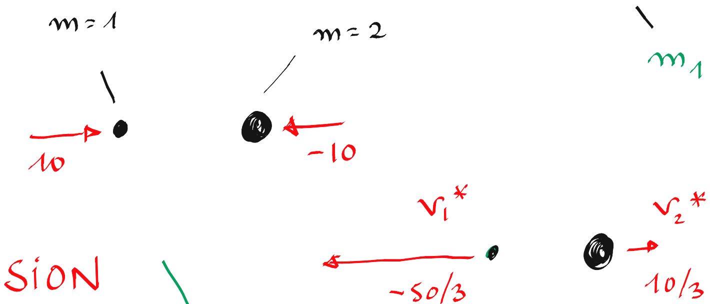
Une planche sur un lac gelé

Un obus qui explose en deux parties...

On peut déduire le mouvement d'un des morceaux à partir du mouvement de l'autre fragment !

Le centre de masse poursuit la trajectoire parabolique initiale…

... et la collision tout-à-fait inélastique entre deux voitures !



$$\overset{1}{m_1}\overset{10}{v_1} + \overset{2}{m_2}\overset{-10}{v_2} = m_1 v_1^* + m_2 v_2^*$$

$$\underbrace{m_1(v_1 - v_1^*)}_{\alpha} + \underbrace{m_2(v_2 - v_2^*)}_{-\alpha} = 0$$

COLLISION ELASTIQUE

CONSERVATION QUANTITE DE MVT

$\underbrace{\text{COLLISION ELASTIQUE}}$ CONSERVATION ENERGIE CINETIQUE

$$\left\{\begin{array}{l} -10 = v_1^* + 2v_2^* \\ 20 = v_2^* - v_1^* \end{array}\right.$$

$$3v_2^* = 10$$

$$\boxed{\begin{array}{l} v_2^* = 10/3 \\ v_1^* = -50/3 \end{array}}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) = \cancel{\frac{1}{2}}(m_1 v_1^{*2} + m_2 v_2^{*2})$$

$$m_1(v_1^2 - v_1^{*2}) + m_2(v_2^2 - v_2^{*2}) = 0$$

$$\underbrace{m_1(v_1 - v_1^*)}_{\alpha}(v_1 + v_1^*) + \underbrace{m_2(v_2 - v_2^*)}_{-\alpha}(v_2 + v_2^*) = 0$$

$$v_1 + v_1^* = v_2 + v_2^*$$

$$v_1 - v_2 = v_2^* - v_1^*$$

Collision de deux objets

$m = 1$ $\qquad$ $m = 2$

10 $\qquad$ -10

$K = 2 \, \frac{1}{2} \left(m v^2 \right) = 100$

CHOC ELASTIQUE

$K = 100$

-10 $\qquad$ 10

CHOC INELASTIQUE

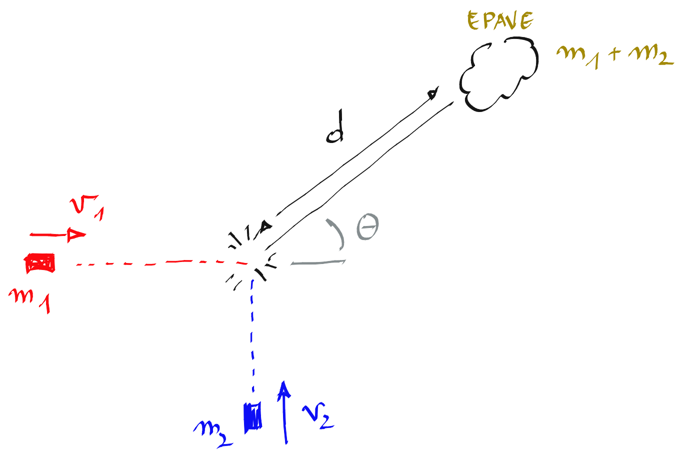
$v = 0$

-20 $\qquad$ 20

$K = 2 \frac{1}{2} \left(m v^2 \right) = 400$!!

IMPOSSIBLE !

Collision élastique de deux objets



DONNEES

$m_1 \quad m_2 \quad d \quad \theta \quad \mu_c$

2 INCONNUES

$v_1 \quad v_2$

$$\overbrace{\frac{1}{2}\cancel{m}\, v^2}^{\text{APRES LE CHOC}} = \underbrace{\mu_c\, \cancel{(m_1+m_2)}\, g\, d}_{\text{TRAVAIL DE LA FORCE DE FROTTEMENT}}$$

$$v = \sqrt{2 \mu_c g d}$$

CHOC

$$\begin{bmatrix} m_1 v_1 \\ m_2 v_2 \end{bmatrix} = (m_1 + m_2)\, \underbrace{v}_{\text{VITESSE EPAVE APRES LE CHOC}} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$v_1 \quad v_2$

Autopsie d'un accident

La mécanique d'un corps...

Trois principes fondamentaux !

Conservation de la quantité de mouvement
Conservation de l'énergie
Conservation du moment de la quantité de mouvement

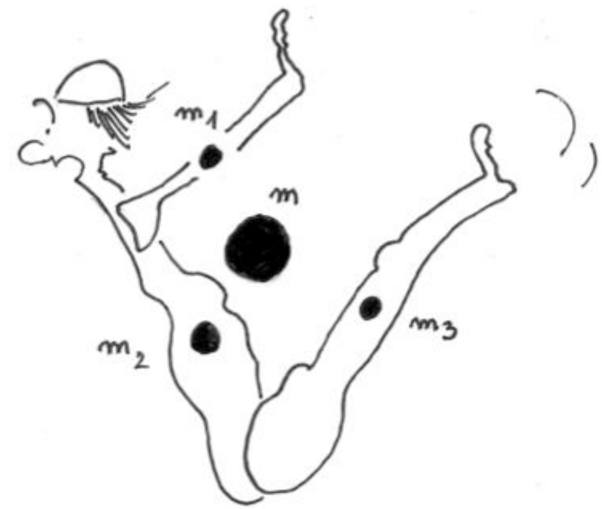
$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2 + \tfrac{1}{2}I\,\omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) = \sum M_i$$

La somme de moments de forces de gravité...

$$\begin{aligned}\sum m_i\,\vec{\mathbf{x}}(t) &= \sum m_i\,\vec{\mathbf{x}}_i(t)\\ 0 &= \sum m_i\left(\vec{\mathbf{x}}_i(t)-\vec{\mathbf{x}}(t)\right)\\ 0 &= \sum m_i\vec{\mathbf{g}}\times\underbrace{\left(\vec{\mathbf{x}}_i(t)-\vec{\mathbf{x}}(t)\right)}_{\vec{\mathbf{r}}_i(t)}\end{aligned}$$

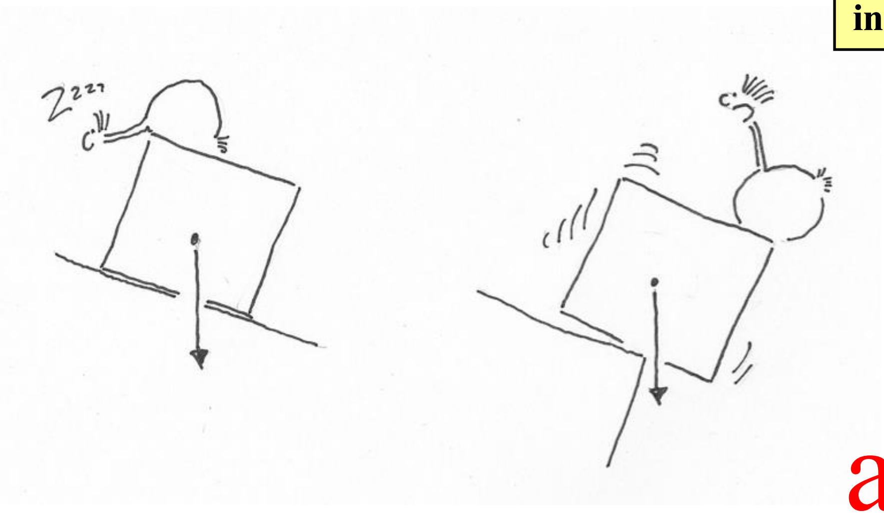


... par rapport au centre de gravité est nulle

La somme de moments de forces de gravité...

Le centre de gravité est le point d'application
de la résultante des forces de gravité !

La connaissance de la position du centre de gravité est indispensable pour déterminer la stabilité d'un objet !



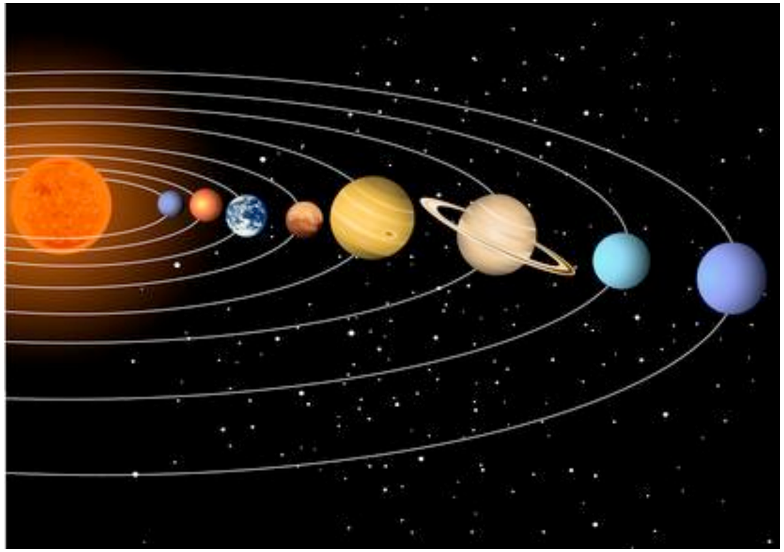
... par rapport au centre de gravité est nulle

Centre de gravité...

$$0 \;=\; \sum m_i \vec{\mathbf{g}}_i \;\times\; \left(\vec{\mathbf{x}}_i - \vec{\mathbf{x}}_{\text{gravité}}\right)$$

C'est différent uniquement si l'accélération de la gravité n'est pas constante !

Pour prédire le mouvement des planètes, c'est important !
Pour prédire le mouvement du corps humain, ce n'est vraiment pas bien important !



$$0 \;=\; \sum m_i \left(\vec{\mathbf{x}}_i - \vec{\mathbf{x}}_{\text{masse}}\right)$$

... et centre de masse

Moments

$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) = \sum M_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

Forces

Bilan de la quantité de mouvement

La cause : la force !

Résistance au mouvement = masse

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right)} = \boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}_i}$$

La conséquence : l'accélération !

Quelle est la voiture qui va accélérer le plus vite pour la même force motrice ?

La cause :
le moment de force !

Résistance à la rotation
= moment d'inertie

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right)} = \boxed{\sum M_i}$$

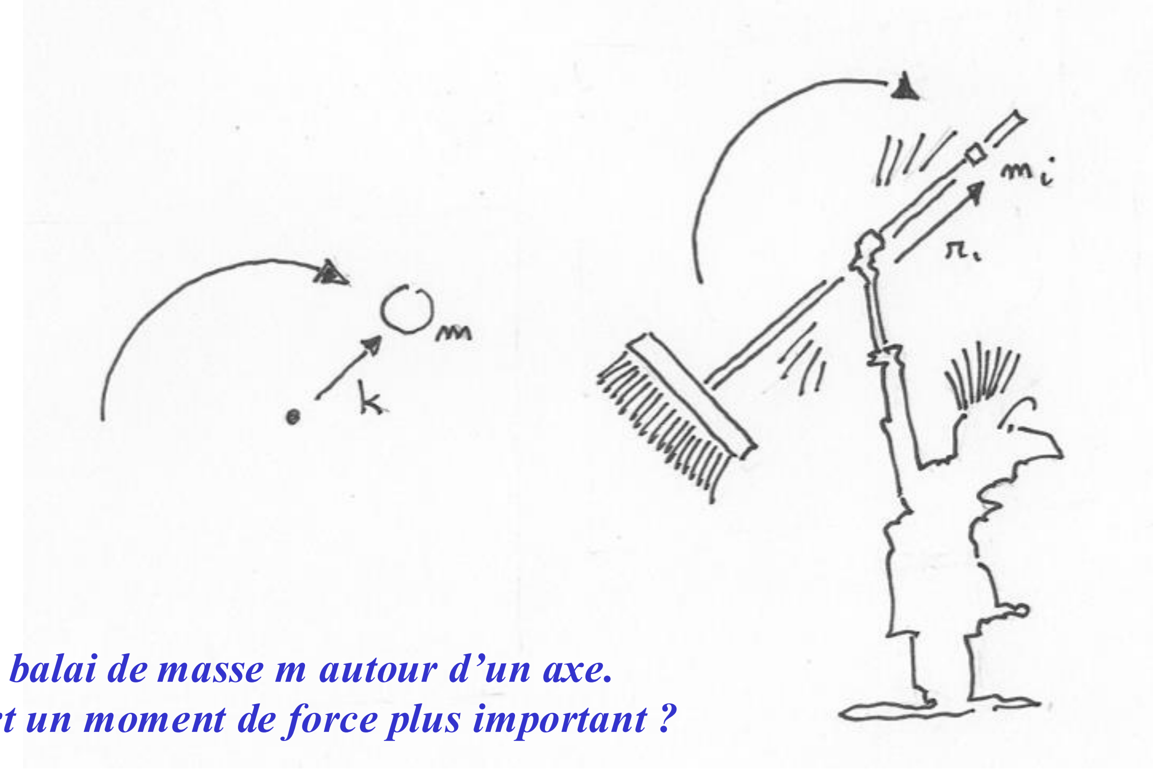
La conséquence :
l'accélération angulaire !

Bilan du moment cinétique

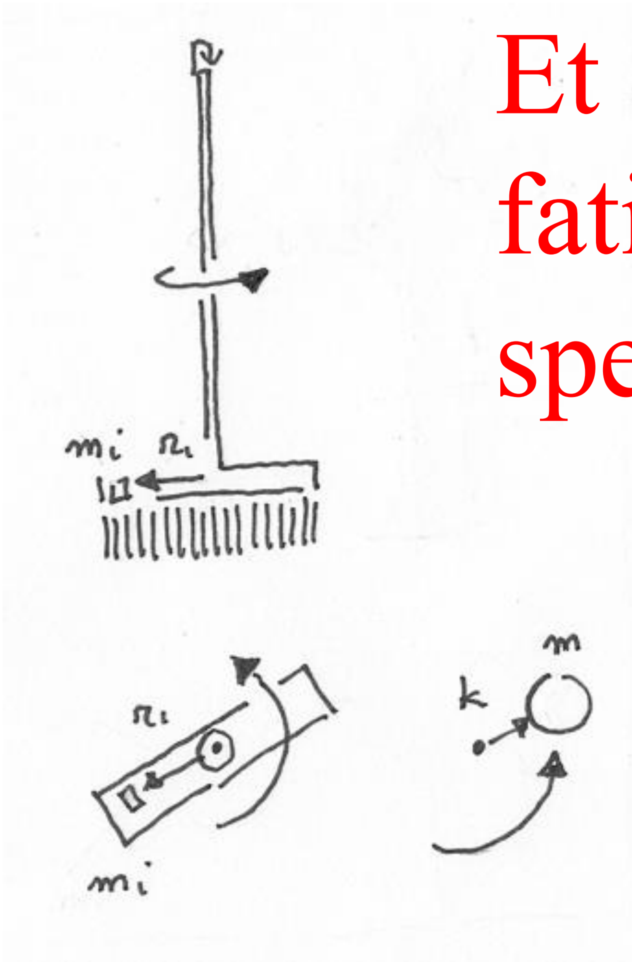
Que fait la danseuse pour tourner plus vite sur elle-même ?

Qu'est ce qui influence le moment d'inertie ?

Le moment d'inertie dépend de :
- **la masse du balai**
- **la distribution de la masse par rapport à l'axe de rotation**



On veut faire tourner un balai de masse m autour d'un axe.
Quel mouvement requiert un moment de force plus important ?



Et ceci est moins fatiguant et moins spectaculaire !

On veut faire tourner un balai de masse m autour d'un axe.
Quel mouvement requiert un moment de force plus important ?

Le moment d'inertie dépend de :
- la masse du balai
- la distribution de la masse par rapport à l'axe de rotation

Moment d'inertie

$$\boxed{I} = \sum m_i\, r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\,\boxed{k^2} = \sum m_i\, r_i^2$$

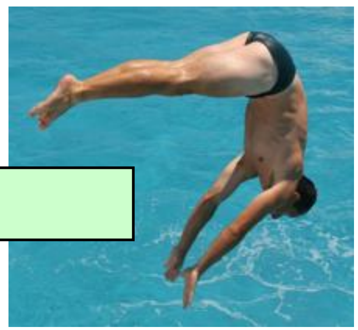
Inertie - rayon de giration

Le moment d'inertie dépend de :

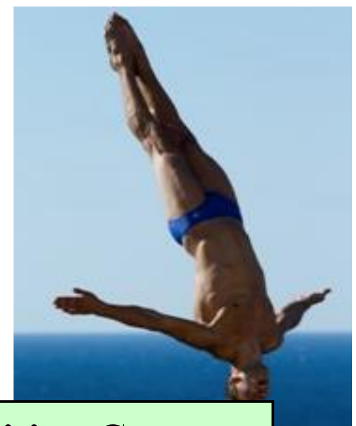
- **la masse du plongeur**
- **la distribution de la masse par rapport à l'axe de rotation**

Position A

Position B



Position C



Pour quelles positions, le plongeur a le plus grand moment d'inertie et le plus petit moment d'inertie ?

Rayon de giration

$$m\,k^2 \;=\; \sum m_i\, r_i^2$$

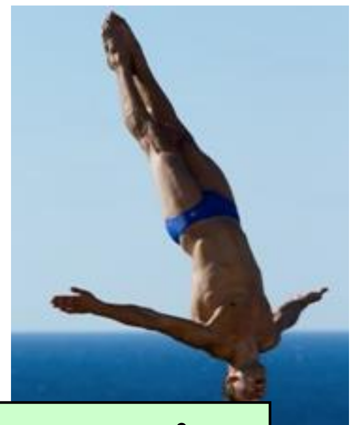
Moment d'inertie du plongeur

Le moment d'inertie dépend de :

- **la masse du plongeur**
- **la distribution de la masse par rapport à l'axe de rotation**

I = 12.6 kg m^2

I = 23.8 kg m^2



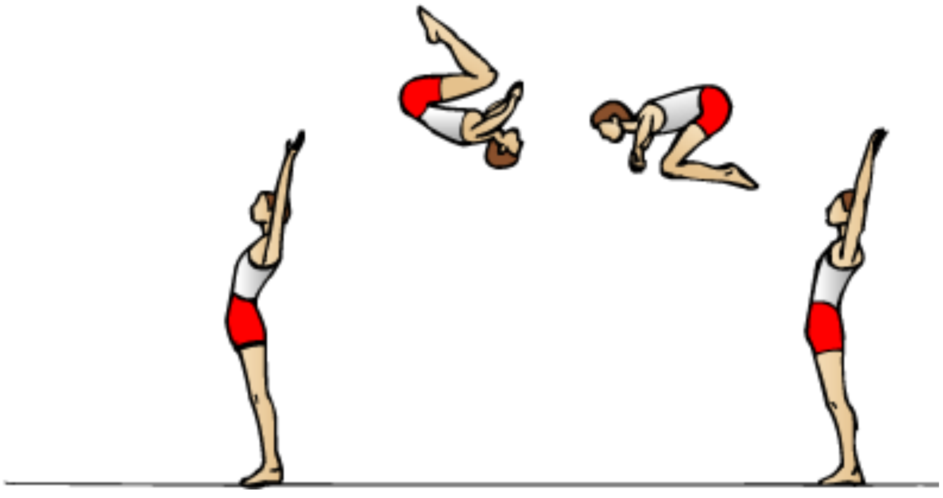
I = 54.4 kg m^2

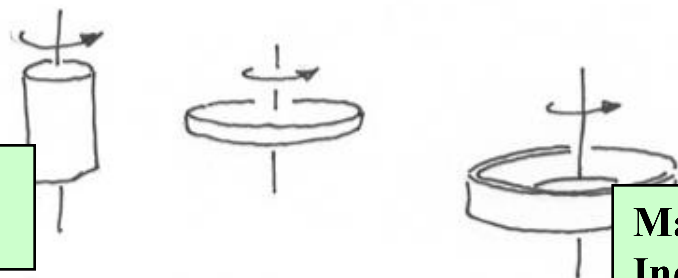
Rayon de giration

$$m\,k^2 = \sum m_i\,r_i^2$$

Moment d'inertie du plongeur

Pourquoi est-ce que
la gymnaste se recroqueville
pour faire la pirouette ?





Masse identique
Inertie minimale

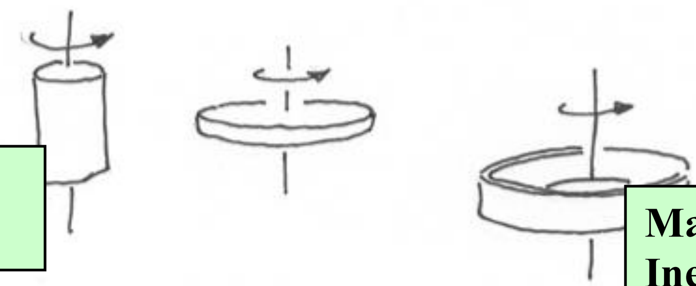
Masse identique
Inertie maximale

Cylindre, disque, anneau...
Veaux, vaches, cochons !

Une bibliothèque de moments d’inertie

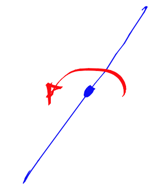
Moment d’inertie

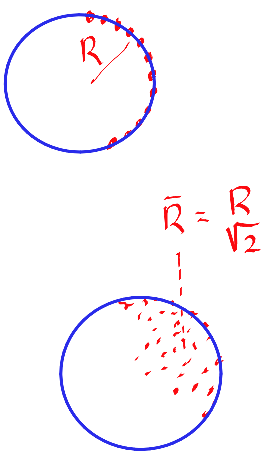
$$I = \sum m_i \, r_i^2$$



Masse identique
Inertie minimale

Masse identique
Inertie maximale



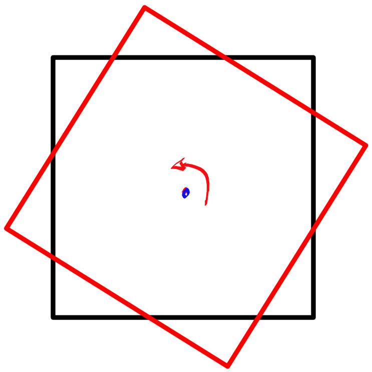


Moments d’inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l’axe de révolution	$I = m\,R^2$
Cylindre plein tournant autour de l’axe de révolution	$I = m\,\dfrac{R^2}{2}$
Barre tournant autour d’un axe perpendiculaire central	$I = m\,\dfrac{L^2}{12}$

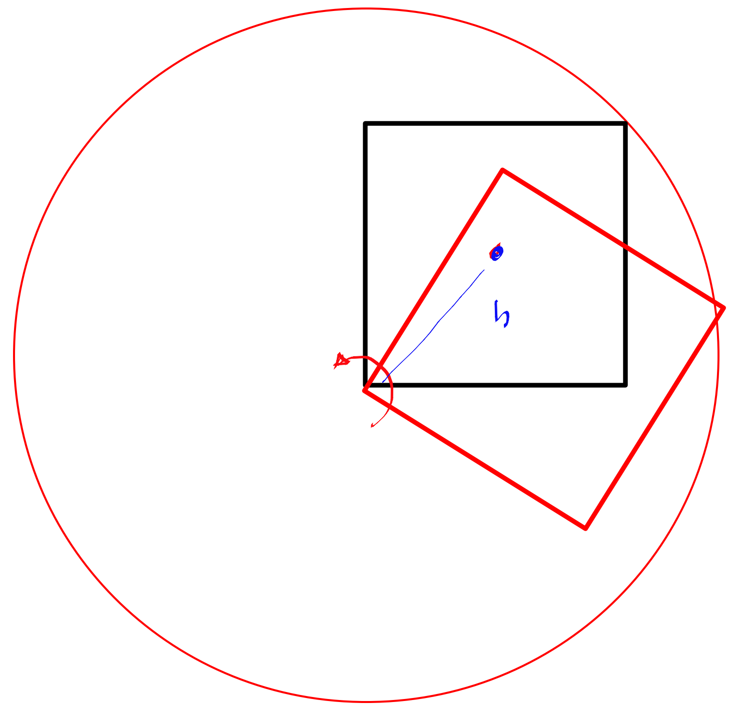
Tourner autour du centre de masse...

I_h MOMENT D' INERTIE POUR UN AXE A DISTANCE h



I MOMENT D' INERTIE AVEC UN AXE DE ROTATION SUR LE CENTRE DE MASSE

$$I_h = I + m h^2$$



...tourner autour d'un coin

Théorème de Huygens
Moment d'inertie quelconque

$$
\begin{aligned}
I_h &= \sum m_i \left(\vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{h}}\right) \cdot \left(\vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{h}}\right) \\
&= \underbrace{\sum m_i \, \vec{\mathbf{r}}_i \cdot \vec{\mathbf{r}}_i}_{=I} + \underbrace{\sum m_i \, \vec{\mathbf{h}} \cdot \vec{\mathbf{h}}}_{=mh^2} + 2 \left(\cancel{\underbrace{\sum m_i \, \vec{\mathbf{r}}_i}_{=0}} \right) \cdot \vec{\mathbf{h}}
\end{aligned}
$$

En vertu de la définition du centre de masse !

Une conséquence immédiate de ce théorème est qu'il est moins coûteux (en énergie) de faire tourner un corps autour d'un axe passant par le centre de masse.

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\, h^2 + I$$

Théorème de Huygens ou des axes parallèles...

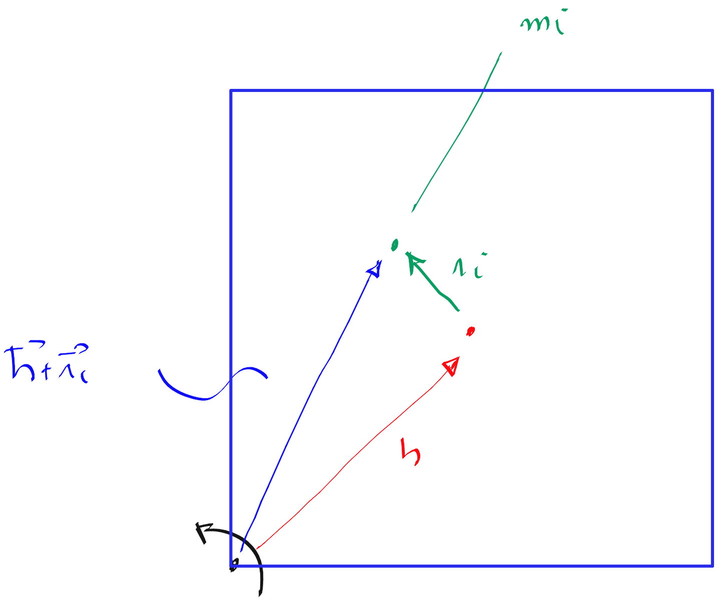
$$I_h = \sum m_i (\vec{h} + \vec{r_i})\cdot(\vec{h} + \vec{r_i})$$

$$= \underbrace{\sum m_i \underbrace{\vec{r_i}\cdot\vec{r_i}}_{r_i^2}}_{I} + \underbrace{\underbrace{\sum m_i}_{m} \underbrace{\vec{h}\cdot\vec{h}}_{h^2}}_{h\,m^2} + \overbrace{\underbrace{2\sum m_i \vec{r_i}\cdot\vec{h}}}^{=0}$$

$$\vec{h}\cdot \underbrace{\sum m_i(\vec{r_i})}$$

$$\underbrace{\sum m_i(\vec{x_i} - \vec{x})}_{=0}$$

$$\sum m_i \vec{x_i} = \underbrace{\sum m_i}_{m} \vec{x}$$

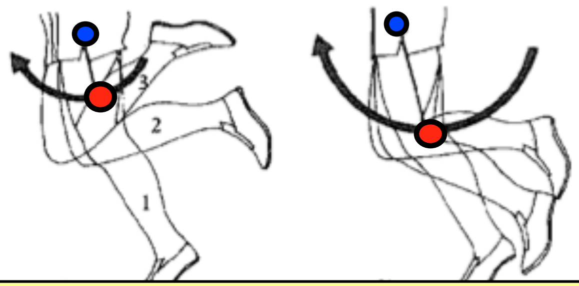


$$I_h = I + m h^2$$

Moment d’inertie de la jambe par rapport à la hanche

Lors d’un sprint, le coureur va chercher à ramener ses jambes le plus rapidement possible en avant.

Il va attirer le talon vers le haut durant la phase d’oscillation.
Le moment d’inertie par rapport à la hanche est diminué.



Pour les courses de fond, le coureur va dépenser moins d’énergie à relever le talon.

Le moment d’inertie par rapport à la hanche reste plus grand.
La vitesse est évidemment aussi moins rapide !

- La masse mesure la résistance d'un corps à une accélération causée par une force.
- Le moment d'inertie mesure la résistance d'un corps à une accélération angulaire causée par un moment de force.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) &= \sum M_i
\end{aligned}
$$

Equilibre statique

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
0 &= \sum M_i
\end{aligned}
$$