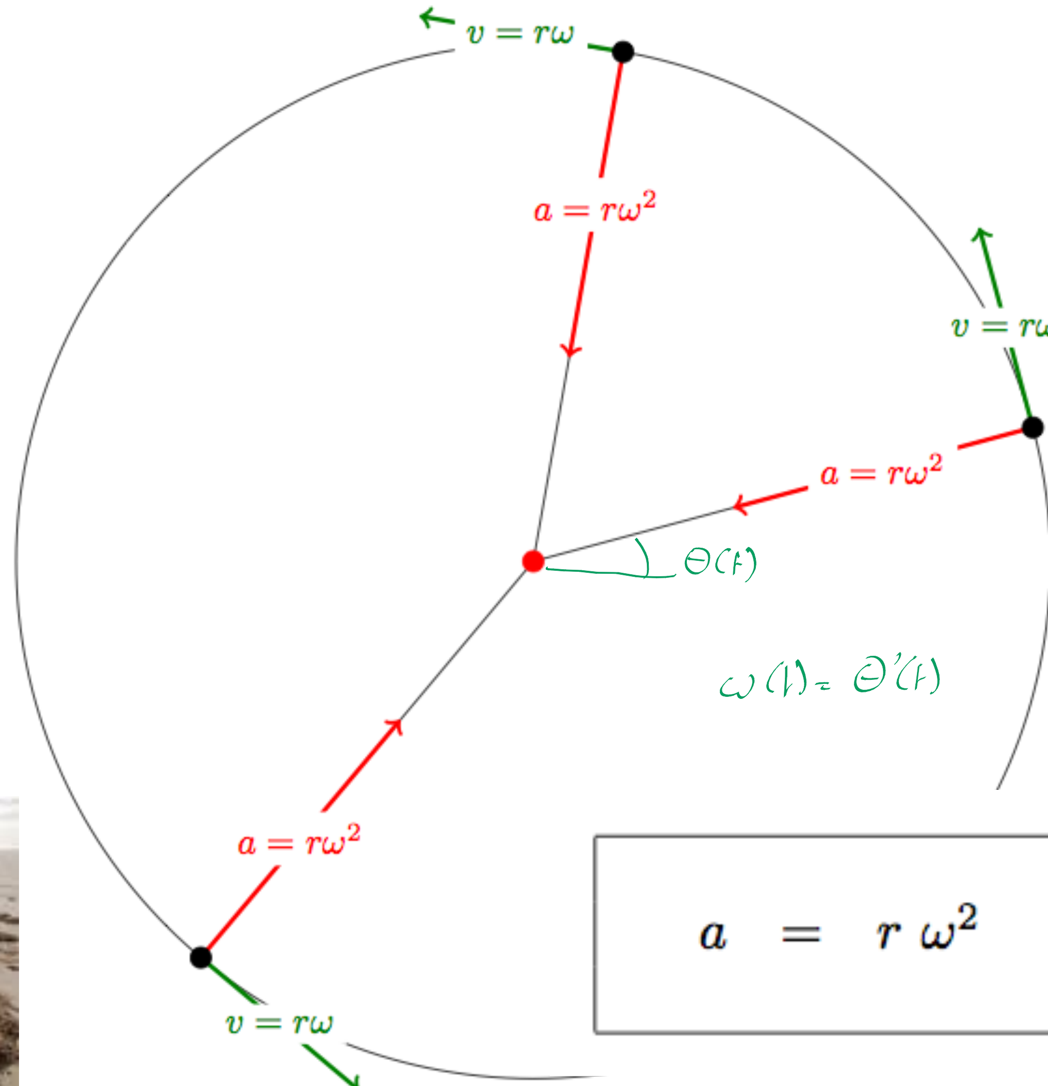
Mouvement circulaire uniforme

$$v = r\,\omega$$

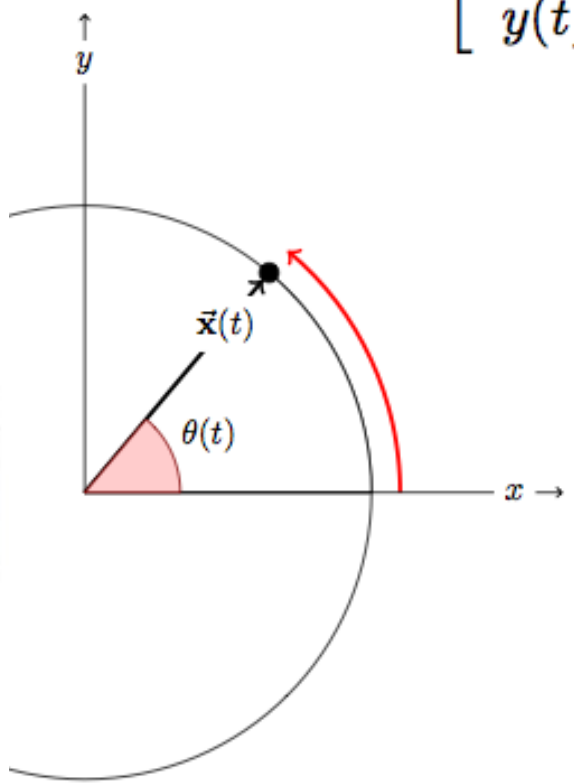


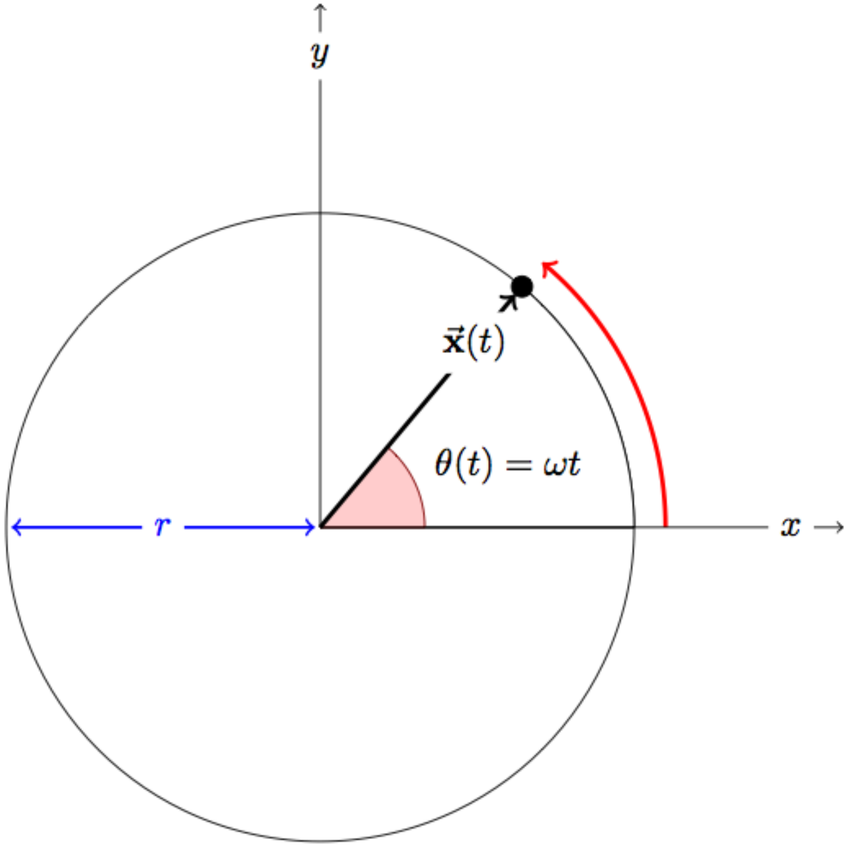
$$a = r\,\omega^2$$

Vitesse angulaire constante : ω
Vitesse tangentielle
Accélération centripète

Le mouvement circulaire est harmonique

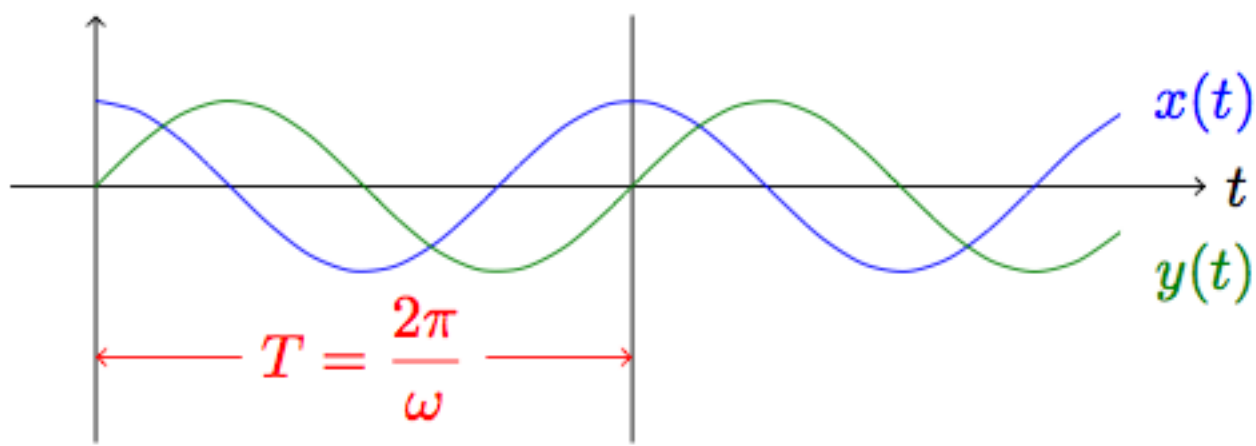
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta(t)) \\ r\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

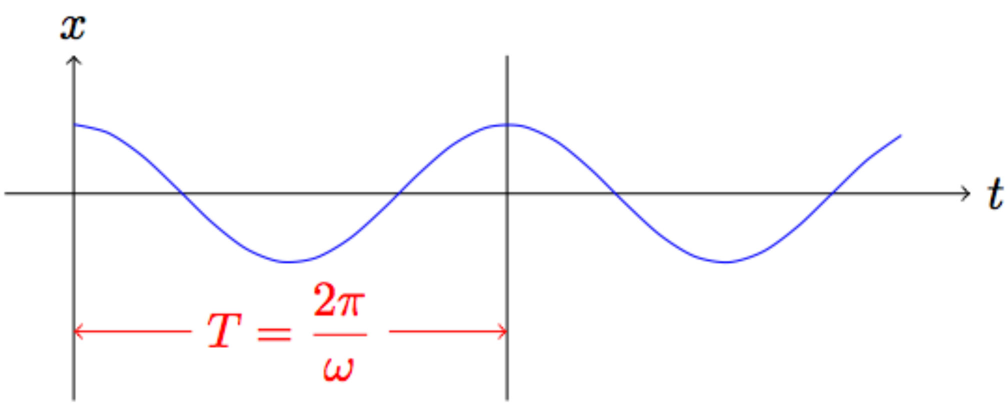




Le retour du cos et du sin

$$
\begin{aligned}
x(t) &= r \cos\left(\omega\, t\right) \\
y(t) &= r \sin\left(\omega\, t\right)
\end{aligned}
$$





$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

$$\boxed{\underbrace{f}_{[1/s]} = \frac{\overbrace{\omega}^{[rad/s]}}{\underbrace{2\pi}_{[rad]}}}$$

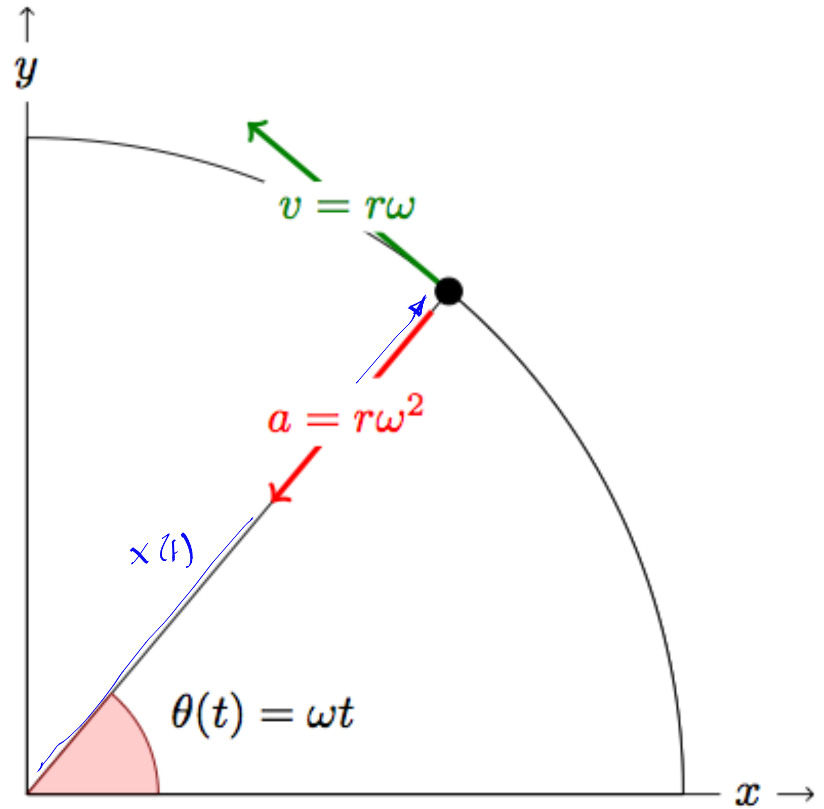
$$\boxed{\underbrace{v}_{[m/s]} = \underbrace{r}_{[m]}\ \underbrace{\omega}_{[1/s]}}$$

Période : T

Fréquence : f

Vitesssse angulaire : ω

Accélération centripète



$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = r\omega \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = r\omega^2 \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

Vitesse tangentielle

Aspirateur
600 tours/minute
R = 10 cm

$f = 10\ [1/s]$

$\omega = 2\pi f = 62{,}8\ [rad/s]$

$v = R\omega = 6{,}28\ [m/s]$

$a = R\omega^2 = \underbrace{400\ [m/s^2]}_{40 \times \text{ACCEL. DE LA GRAVITE}}$

IT IS BIG !

Aspirateur
600 tours/minute
R = 10 cm

$$f = 10 \text{ Hertz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 0.1 \text{ s}$$

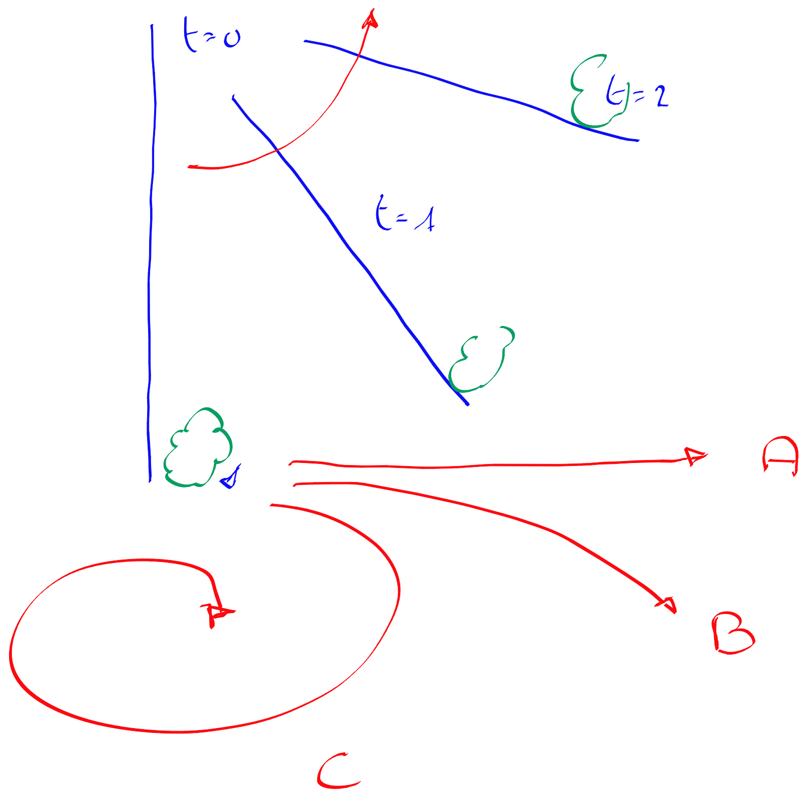
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 62.8 \text{ rad/s}$$

$$v = r\,\omega = 6.28 \text{ m/s}$$

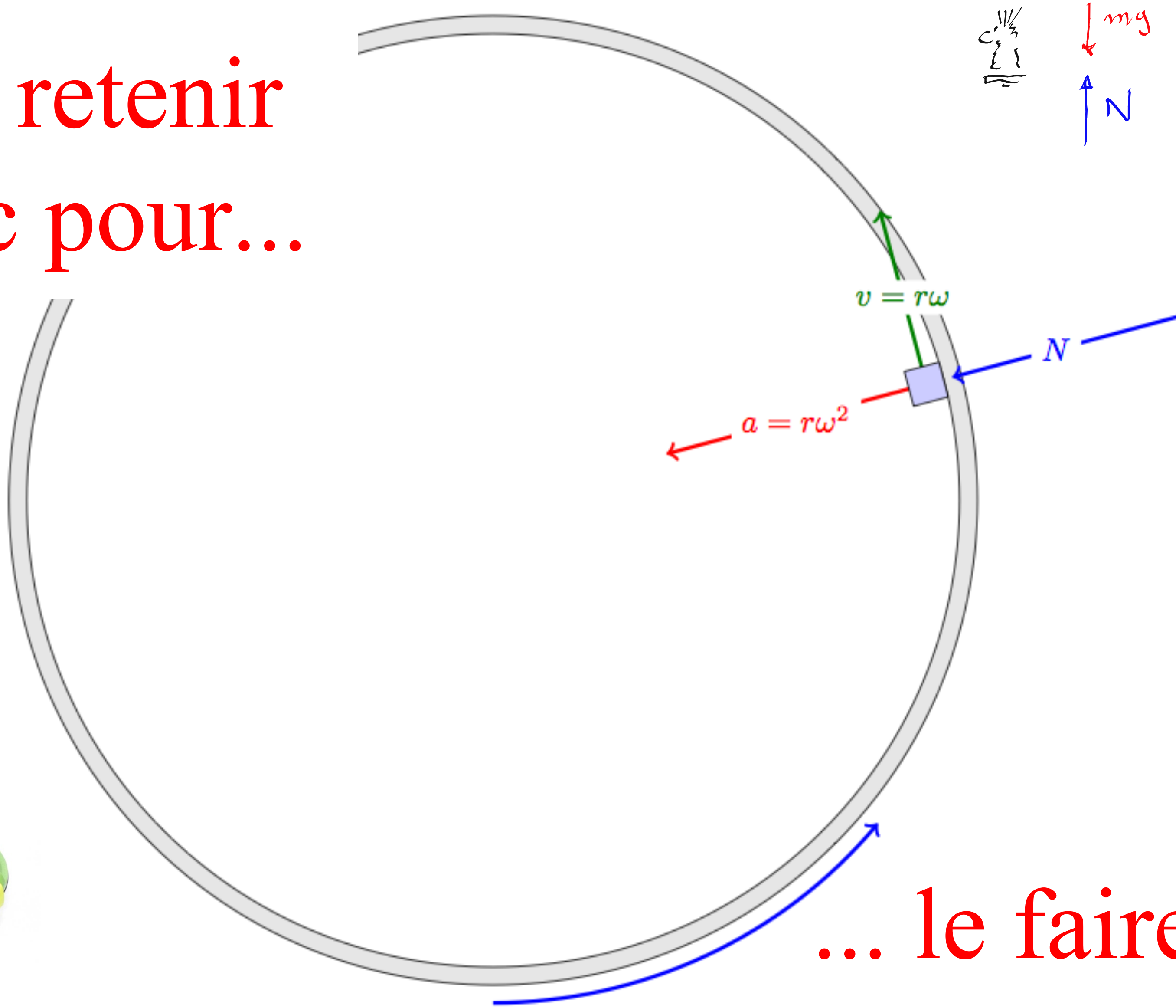
$$a = r\,\omega^2 = 394.4 \text{ m/s}^2$$

C'est quarante fois
la valeur de l'accélération de la gravité !
C'est une valeur très élevée !

Essoreuse
à salade

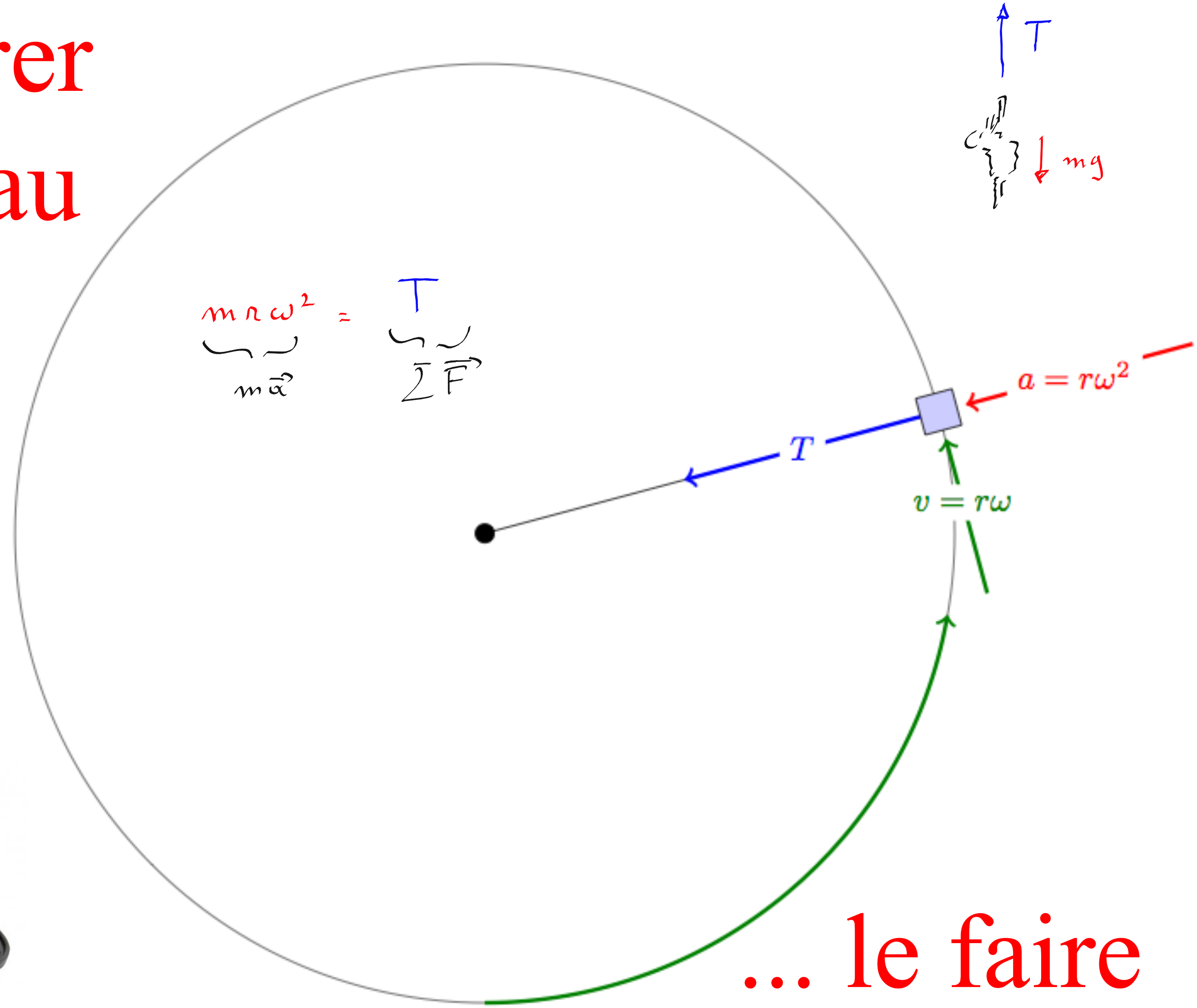


Il faut retenir le bloc pour...



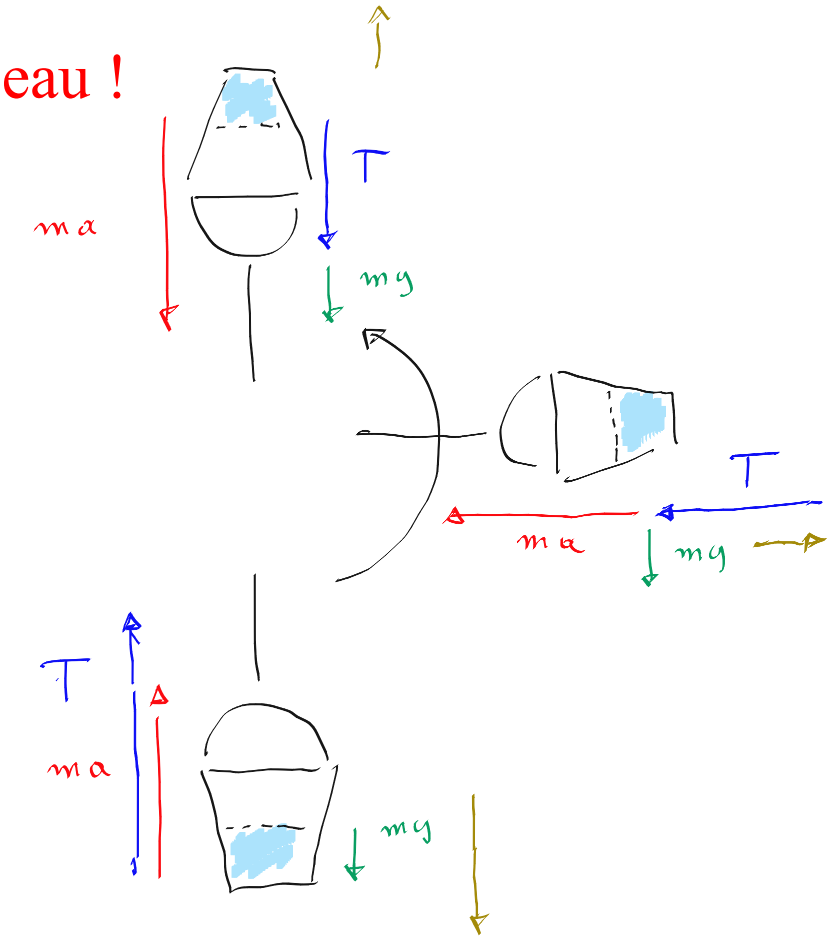
... le faire tourner !

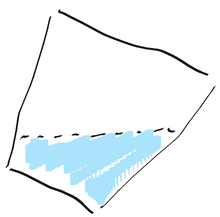
Il faut tirer sur le seau pour...



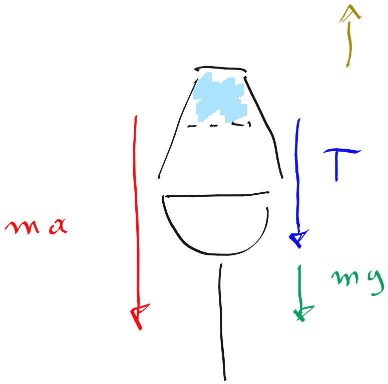
... le faire tourner !

Expérience périlleuse du seau d’eau !





$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$$



$$T + mg = m\underbrace{a}_{r\omega^2}$$

L'EAU VA TOMBER SI T EST NEGATIF

$r = 1\ m$

$$\underbrace{r\omega^2}_{r\frac{v^2}{r}} = g$$

$v = r\omega$

$$\omega = \underbrace{\sqrt{g}}_{\sqrt{10}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} = 2\ \text{sec}\ :-)$$

Période
de rotation
du seau !

Machine à laver
3600 tours/minute
R = 15 cm

$f = 60 \; [1/s]$

$\omega = 2\pi f = \underbrace{380}_{\simeq 400} \; [\text{rad}/s]$

$v = \omega R = 50 \; m/s$

$a = \omega^2 R = 16000 + 8000 \simeq 24000 \; m/s^2$

$2400 \times g$

IT IS HUGE!

Machine à laver
3600 tours/minute
R = 15 cm

$$f = 60 \text{ Hertz}$$

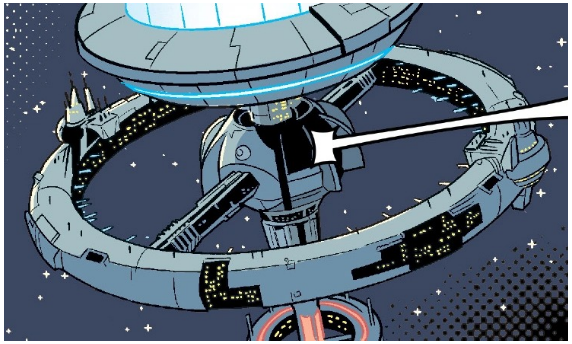
$$T = \frac{1}{f} = 0.017 \text{ s}$$

$$\omega = 2\pi f = 377 \text{ rad/s}$$

$$v = r\,\omega = 56.5 \text{ m/s}$$

$$a = r\,\omega^2 = 21318 \text{ m/s}^2$$

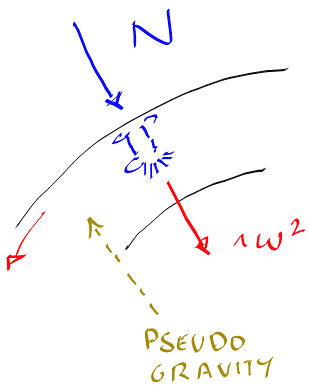
C'est deux mille fois
la valeur de l'accélération de la gravité !
C'est une valeur vraiment très très élevée !

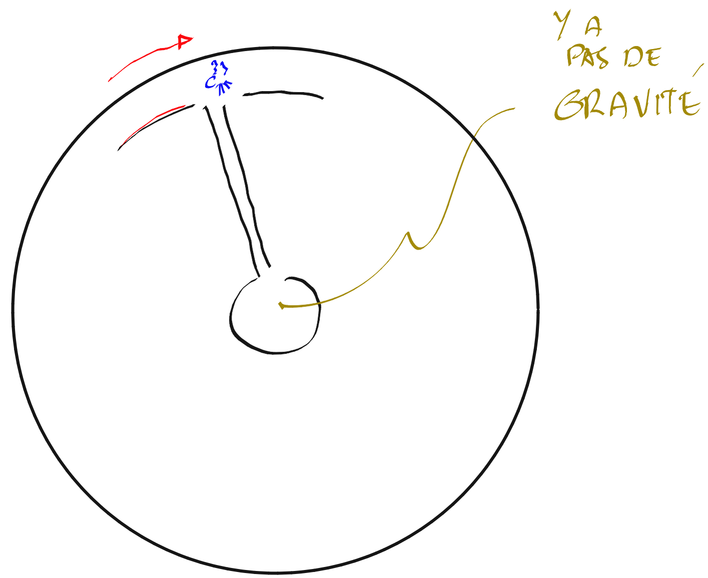


Station spatiale

3 tours/minute

R = 100 m



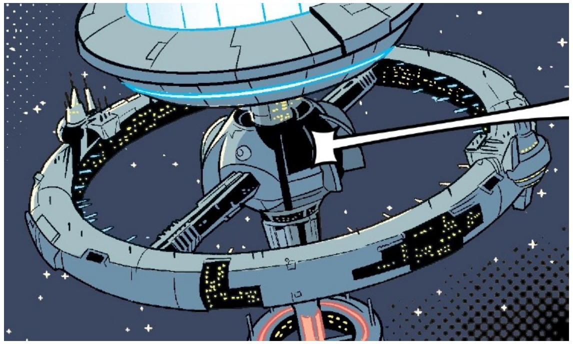


$$\underbrace{R}_{100\,m}\ \omega^2 = \overbrace{g}^{10\,m/s^2}$$

$$\omega = \sqrt{0.1} \simeq 0.3$$

$$v = 30\ m/s$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \simeq 20\ s$$



Station spatiale
3 tours/minute
R = 100 m

$$a = r\,\omega^2 = 10 \text{ m/s}^2$$

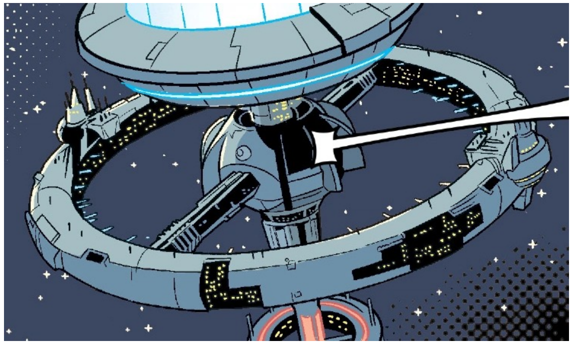
$$\omega^2 = 0.1 \ (\text{rad/s})^2 \qquad \omega = 0.3 \text{ rad/s}$$

$$v = r\,\omega = 30 \text{ m/s}$$

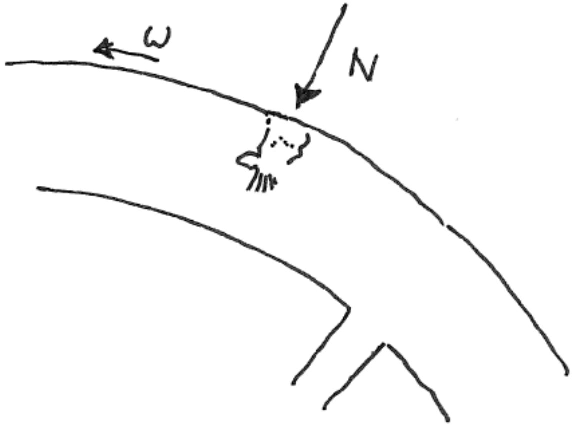
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0.05 \text{ Hertz}$$

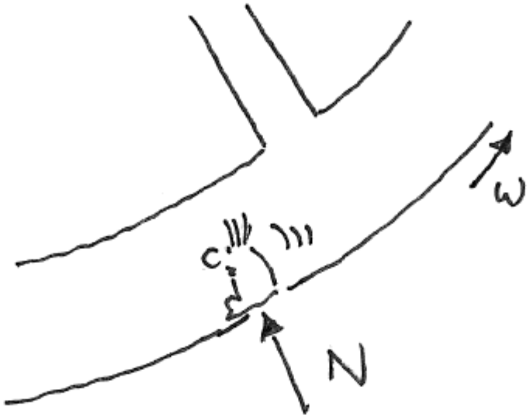
$$T = \frac{1}{f} = 20 \text{ s}$$

On fait tourner la station spatiale pour obtenir une gravité artificielle !



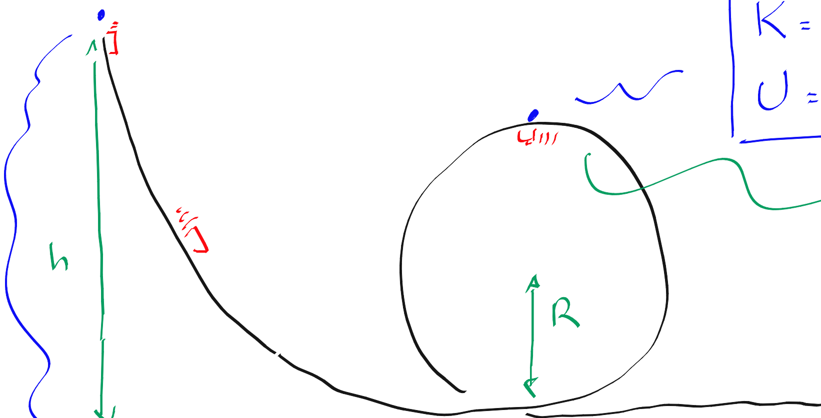
Station spatiale
3 tours/minute
R = 100 m





On fait tourner la station spatiale pour obtenir une gravité artificielle !

Exercice classique
et pas tout-à-fait réaliste
de tous les livres de physique



$$K = 0$$
$$U = mgh$$

$$K = \frac{mv^2}{2}$$
$$U = mg2R$$

POUR QUE LE WAGON NE TOMBE PAS !

$$\boxed{\frac{v^2}{R} > g}$$

$$\cancel{m}gh = \cancel{m}g2R + \frac{\cancel{m}v^2}{2}$$

$$\boxed{g(2h-4R) = v^2}$$

$$\frac{\cancel{g}(2h-4R)}{R} > \cancel{g}$$

$$2h - 4R > R$$

$$2h > 5R$$

$$\boxed{h > 5R/2}$$

Le MRUA :-)

$$\begin{aligned} y''(t) &= a \\ y'(t) &= \overbrace{v_0 + a\,t}^{v(t)} \\ y(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{a\,t^2}{2} \end{aligned}$$

Des millions de gens ont vu tomber une pomme,
Newton est le seul qui se soit demandé pourquoi...
(Bernard Baruch)

Le MCUA :-)

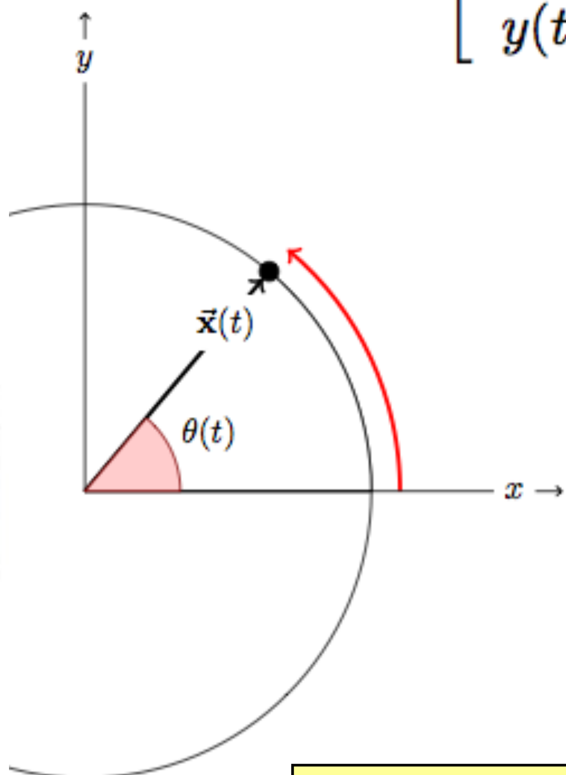
$$
\begin{aligned}
\theta''(t) &= \alpha \\
\theta'(t) &= \overbrace{\omega_0 + \alpha\, t}^{\omega(t)} \\
\theta(t) &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha\, t^2}{2}
\end{aligned}
$$

Maintenant, faisons strictement et exactement la même chose avec un mouvement circulaire !

Définissons le MCUA !

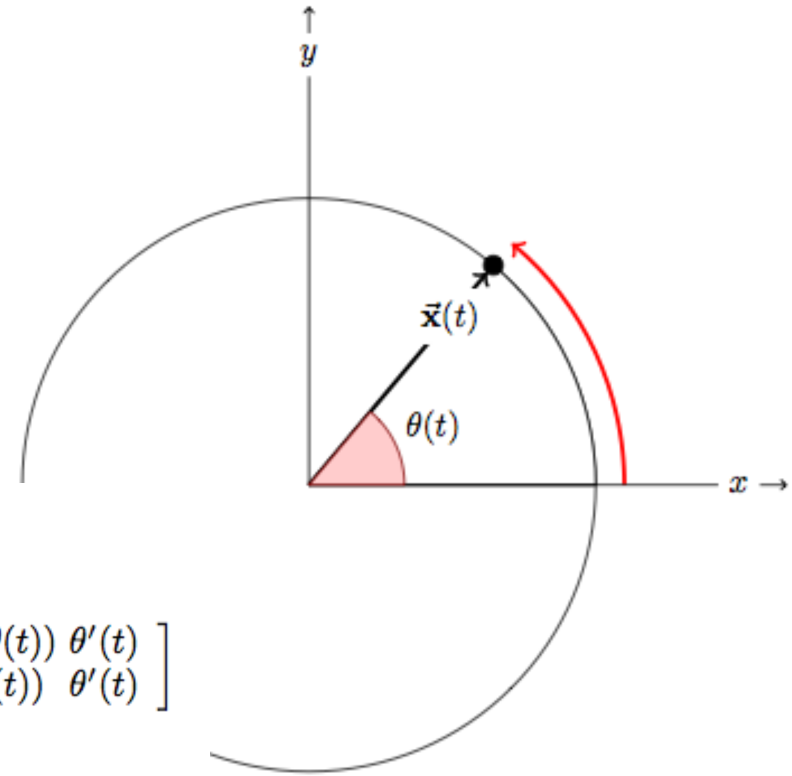
Le MCUA :-)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta(t)) \\ r\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$



Mouvement circulaire non-uniforme...
Vitesse angulaire non-constante
Accélération angulaire constante

Calculons la vitesse et l'accélération !



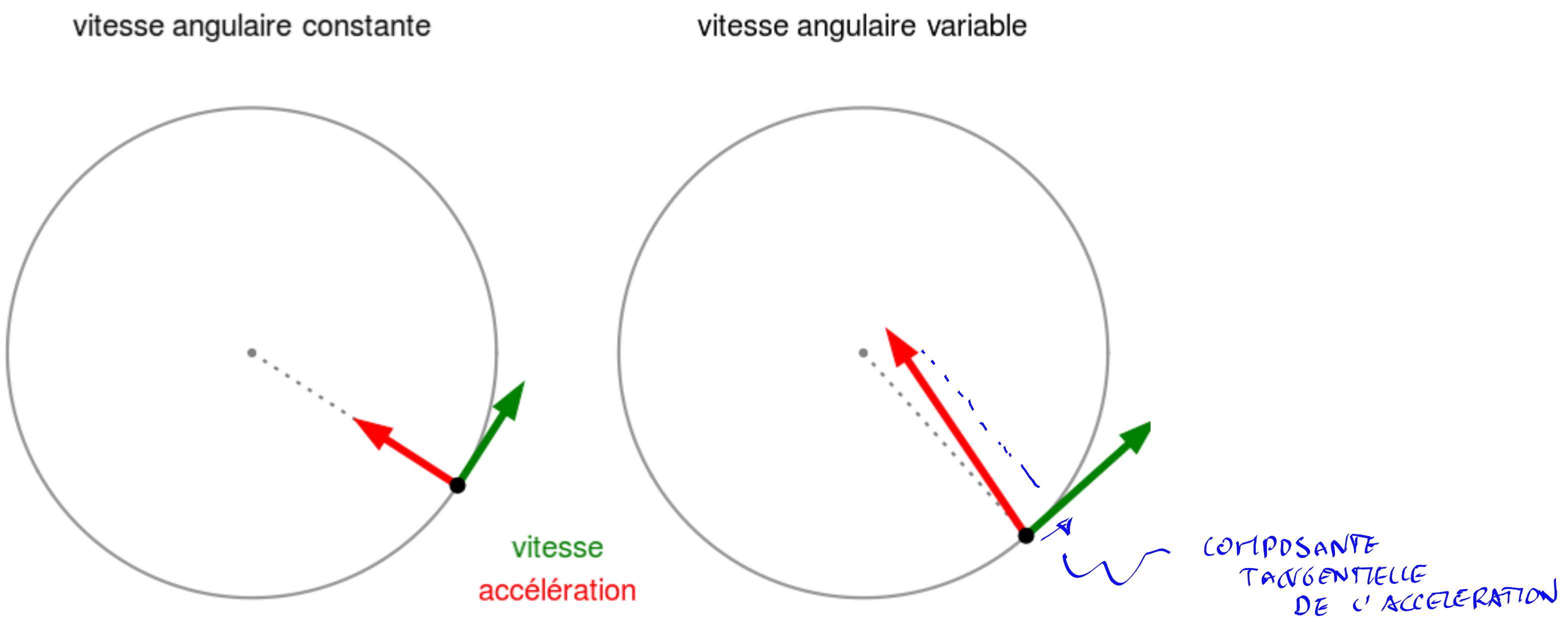
$$\vec{\mathbf{v}}(t) = r\,\omega(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = r\omega'(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t))\ \theta'(t) \\ -\sin(\theta(t))\ \theta'(t) \end{bmatrix}$$

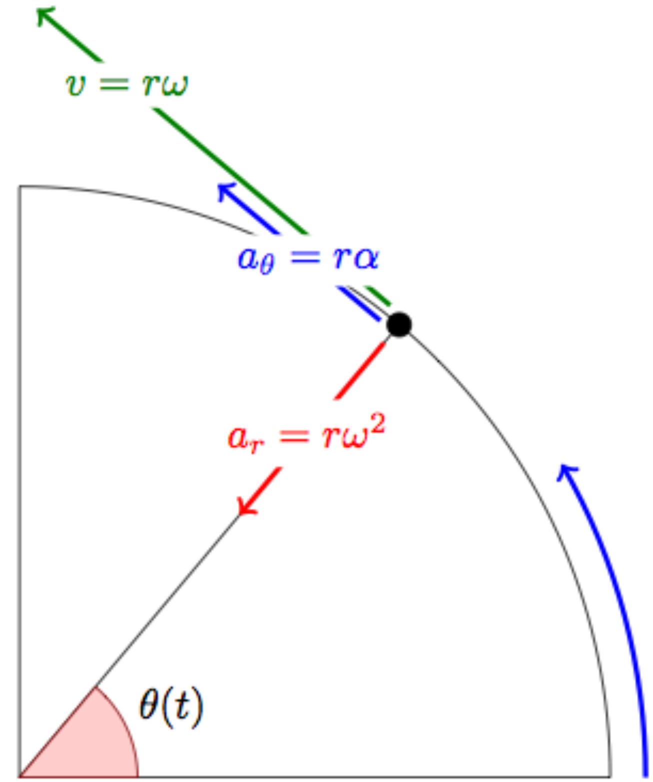
$$= r\alpha \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega^2(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

La vitesse est toujours bien tangente au mouvement !
Mais son module est désormais variable
car la vitesse angulaire n'est pas constante !

Une vitesse angulaire variable crée une accélération tangentielle !



**L'accélération centripète provient de la variation de direction de la vitesse.
L'accélération tangentielle provient de la variation du module de la vitesse.**



$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = r\omega(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = r\alpha \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega^2(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

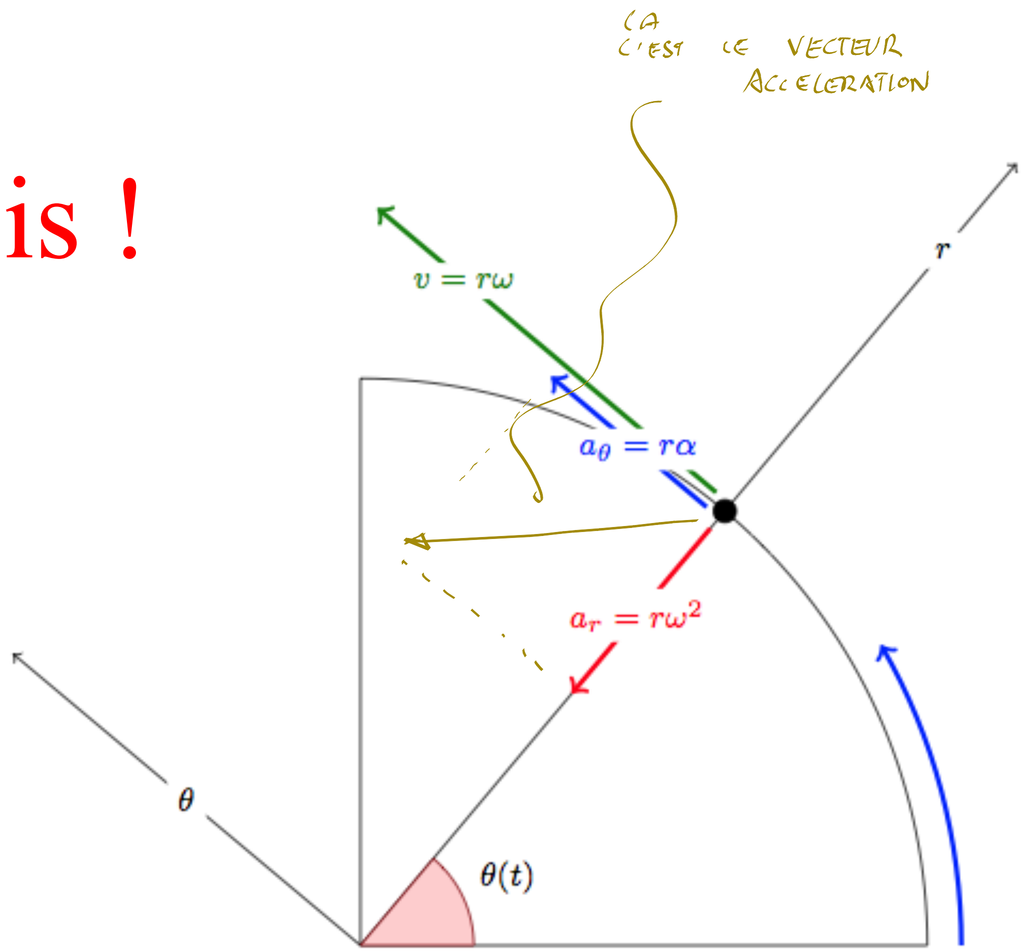
Accélération tangentielle

Accélération centripète

Avec des axes bien choisis !

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}$$



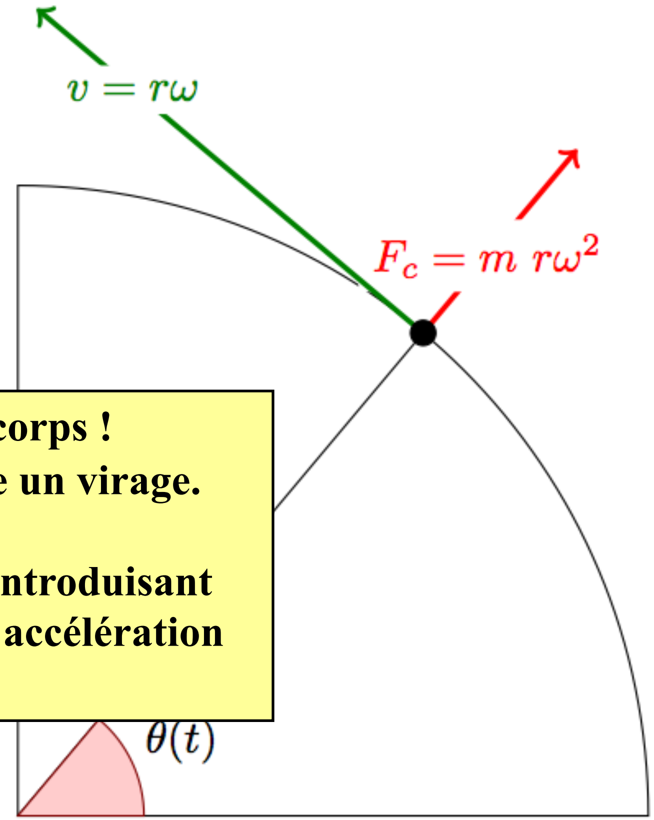
Vitesse : $v = r\omega$ [m/s]

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$ [m/s^2]

Vitesse angulaire ω [radians/s] et accélération angulaire α [radians/s^2]

On effectue tous les calculs dans un repère mobile lié au corps !
Par exemple, on attache le repère à la voiture qui effectue un virage.

Ensuite, on tient compte du fait que le repère tourne, en introduisant une pseudo-force centrifuge qui aura le même effet que l'accélération centripète qu'on obtient dans un repère fixe !



Remplacer l'accélération centripète par la pseudo-force centrifuge !

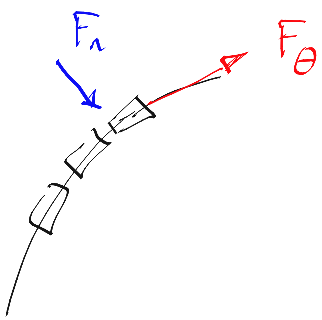
Dynamique du mouvement circulaire

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$\downarrow$$

$$m\begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \end{bmatrix}$$

Comment faire tourner le train ?

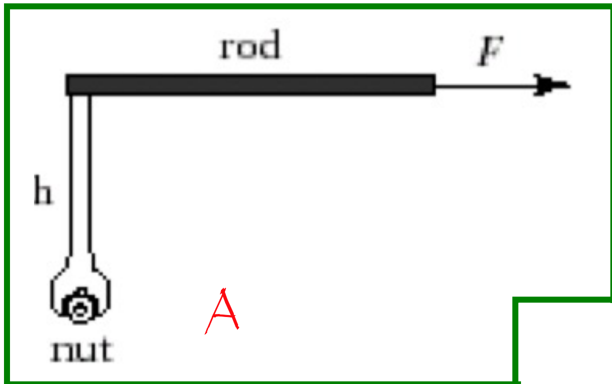


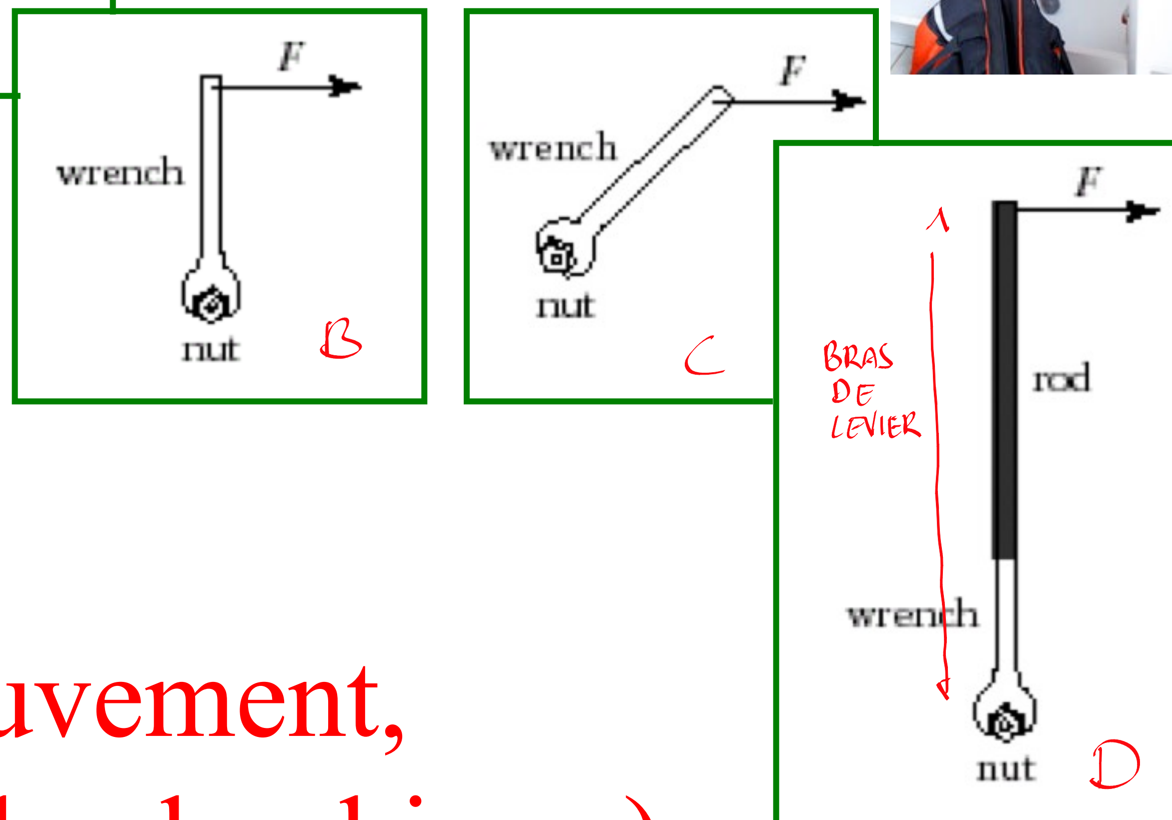
$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$\Big\downarrow$$

$$m\begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \end{bmatrix}$$

Dans un mouvement circulaire, seules les forces
qui ont un moment non nul par rapport au centre de rotation
vont augmenter la vitesse de rotation !

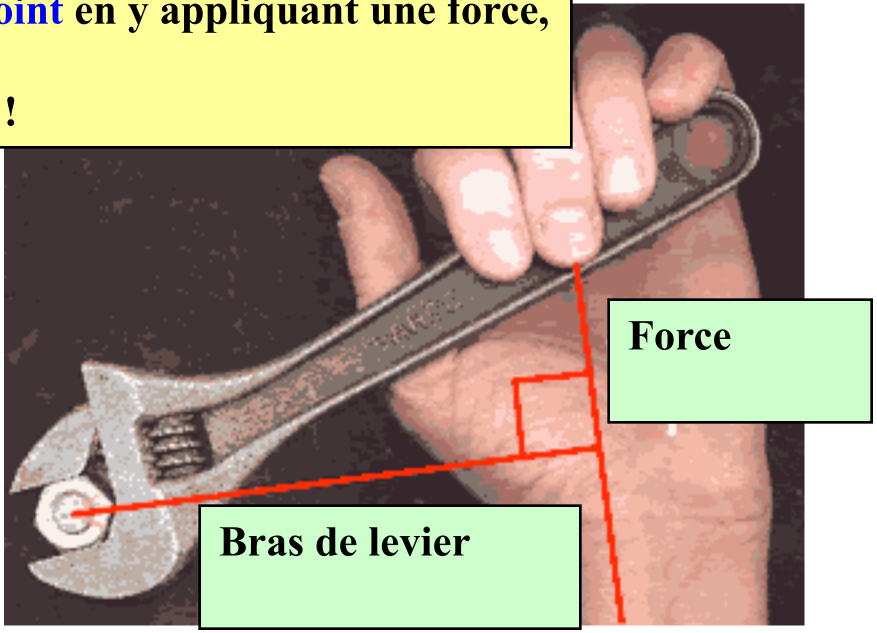




C’est koi
le bon mouvement,
Monsieur le plombier :-)

Ce qui fait tourner la clé, c’est le moment !

Supposons que l’on fixe une barre en un point et
que l’on souhaite la faire tourner autour de ce point en y appliquant une force,
l’accélération angulaire sera proportionnel
au moment de cette force par rapport à ce point !



$$\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) = \boxed{\text{Forces} \quad \sum \vec{\mathbf{F}}}$$

$\downarrow$ En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big)\ dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\ dt$$

$\downarrow$ En supposant que les forces sont constantes.

$$\Big[m\ \vec{\mathbf{v}}\Big]_b - \Big[m\ \vec{\mathbf{v}}\Big]_a = \sum \vec{\mathbf{F}}\ (t_b - t_a)$$

$$\Delta\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) = \boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}\ \Delta t \quad \text{Impulsions}}$$

Bilan
de la quantité
de mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right)\cdot\vec{\mathbf{v}} = \boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}$$

Puissance des forces

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right)dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\,dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}\,dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{x}}$$

En supposant que les forces sont constantes.

$$\left[\tfrac{1}{2}m\,v^2\right]_b - \left[\tfrac{1}{2}m\,v^2\right]_a = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot(\vec{\mathbf{x}}_b - \vec{\mathbf{x}}_a)$$

$$\Delta\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right) = \boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}}$$

Travail des forces

Bilan d'énergie cinétique

Moments des forces

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{r}} \times \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) &= \boxed{\sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}} \\
\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}
\end{aligned}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right) dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}\; dt$$

En supposant que les moments sont constants.

$$\begin{aligned}
\left[m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right]_b - \left[m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right]_a &= \sum (\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}})\;(t_b - t_a) \\
\Delta\left(m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right) &= \boxed{\sum (\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}})\;\Delta t}
\end{aligned}$$

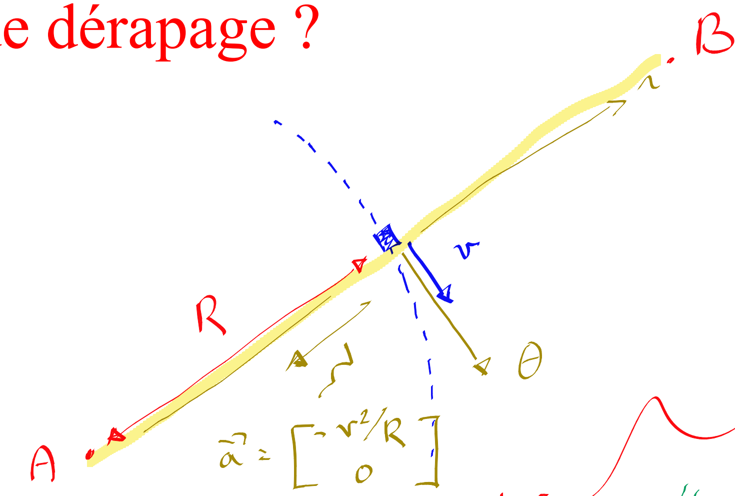
Impulsions angulaires

Bilan de moment cinétique

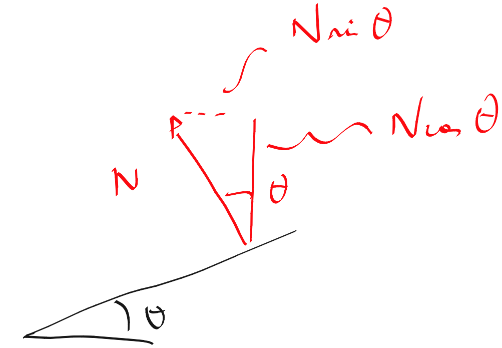
Vitesse maximale sans risque de dérapage ?

Automobile de 1000 kg
Angle de 30 degré par rapport à l’horizontale
Rayon du virage : 100 m
Coefficient de frottement statique de 0.1

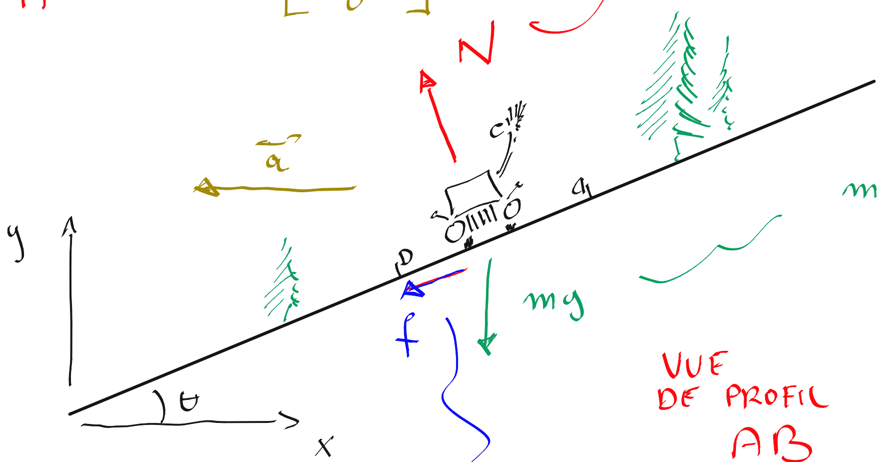
Vitesse maximale sans risque de dérapage ?



$$\vec{a} = \begin{bmatrix} -v^2/R \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\vec{N} = \begin{bmatrix} -N \sin\theta \\ N \cos\theta \end{bmatrix}$$



$$m\vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} -f \cos\theta \\ -f \sin\theta \end{bmatrix} = \mu_s N \underbrace{\begin{bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}}_{\text{VECTEUR DE NORME UNITAIRE}}$$

CAR LA VOITURE NE DERAPE PAS !

$$\boxed{m\vec{a} = \sum \vec{F}}$$

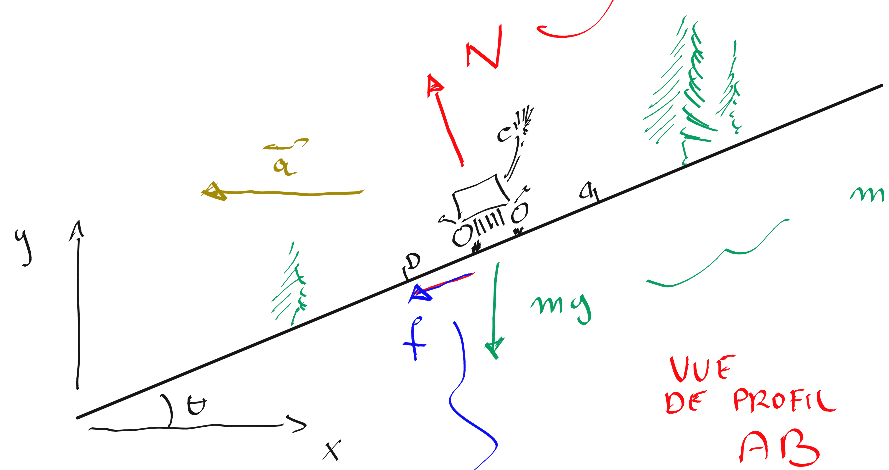
$$\boxed{\begin{array}{c}\text{2 INCONNUES} \\ v \quad N\end{array}}$$

$$\begin{cases} -m\dfrac{v^2}{R} = -N\sin\theta - \mu_s N\cos\theta \\ 0 = -mg + N\cos\theta - \mu_s N\sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} -N\sin\theta \\ N\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} -f\cos\theta \\ -f\sin\theta \end{bmatrix} = \mu_s N \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$m\vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$



Deux équations !
Deux inconnues !

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{2 INCONNUES} \\ v \quad N\end{array}}$$

$$\begin{cases} -m\dfrac{v^2}{R} = -N\sin\theta - \mu_s N\cos\theta \\ 0 = -mg + N\cos\theta - \mu_s N\sin\theta \end{cases}$$

$$N(\cos\theta - \mu_s\sin\theta) = mg$$

$$N = \frac{mg}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}$$

$$\frac{\cancel{m}v^2}{R} = N(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)$$

$$= \cancel{m}g\,\frac{(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)}{(\cos\theta - \mu_s\sin\theta)}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\underbrace{g}_{m/s^2}\,\underbrace{R}_{m}\,\frac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}}}$$

Et la vitesse critique !

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \\
\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\,m\,\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}} \\
\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{r}}\times m\,\vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}
\end{aligned}$$

- **Dans un mouvement circulaire, l'accélération a toujours une composante centripète. Les variations de la vitesse angulaire génèrent une composante tangentielle.**

- **Seules les forces dont le moment n'est pas nul par rapport au centre de rotation permettent de modifier la vitesse angulaire d'un mouvement circulaire.**

- **Les forces modifient la quantité de mouvement**
  Les moments modifient le moment cinétique