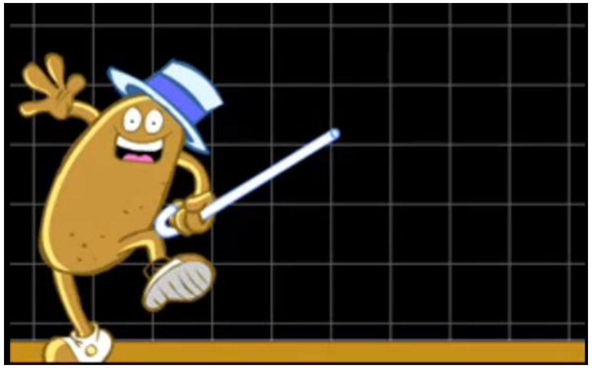
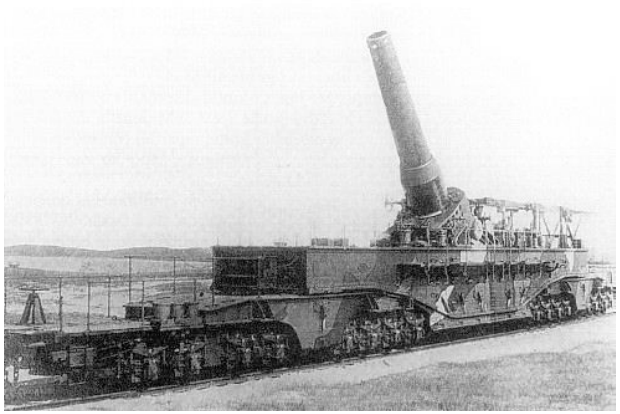
# Quelle est la différence entre un point et une patate ?



Lorsqu'une patate fait une rotation, cela se voit :-)

# La mécanique d'un point...



$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,v^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

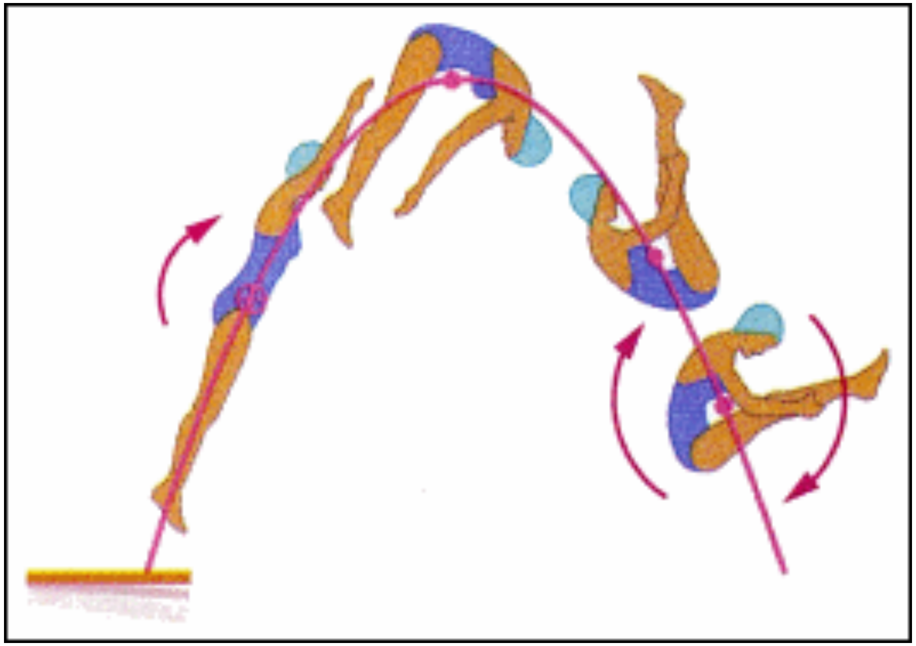
**Les deux équations fondamentales !**

**Bilan de la quantité de mouvement**
**Bilan de l'énergie cinétique**

***Dans beaucoup d'applications, on peut se restreindre à l'analyse du mouvement du centre de masse et réduire le corps à un simple point où on a concentré toute la masse !***

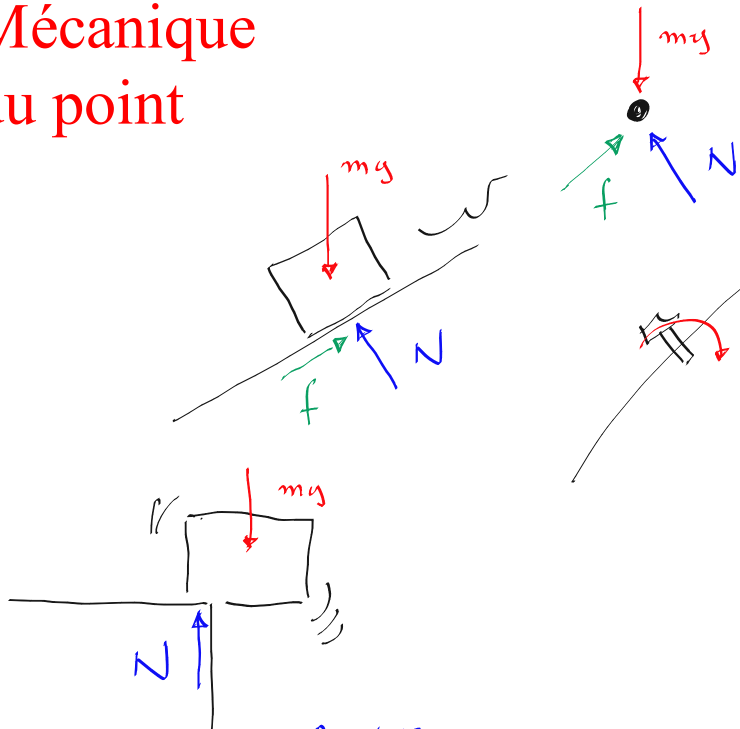
***Ce que nous avons fait jusqu'à présent !***
***Mais, un skieur, une auto, un bloc, ce n'est pas un point !***

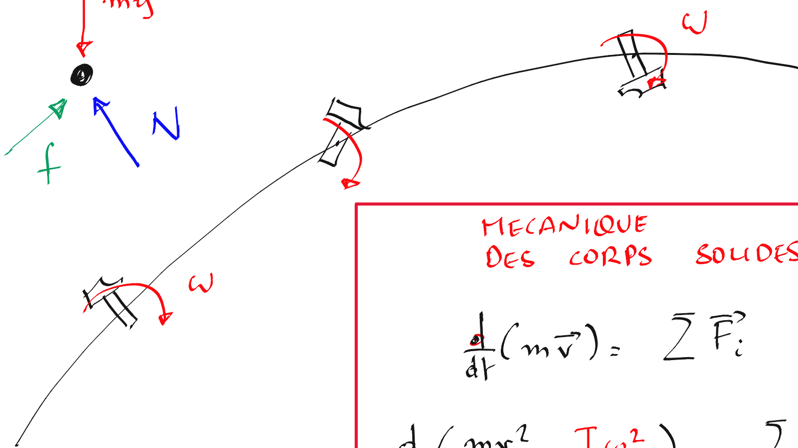
**La trajectoire de son centre de masse est parabolique, comme notre obus !**
**Mais, son mouvement est nettement plus complexe avec des vrilles et des pirouettes !**



mais un corps,
ce n’est pas un point !

# Mécanique du point




QUANTITÉ DE MVT

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m v^2}{2}\right) = \sum \vec{F}\cdot\vec{v}$$

MÉCANIQUE DU POINT

MÉCANIQUE DES CORPS SOLIDES

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m v^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}\right) = \sum \vec{F}_i\cdot\vec{v}_i$$

VITESSE DU POINT D'APPLICATION DE LA FORCE

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = \sum M_i$$

MOMENT CINÉTIQUE

MOMENTS DE FORCES

# Mécanique des solides

# La mécanique d’un corps...

**Les trois équations fondamentales !**

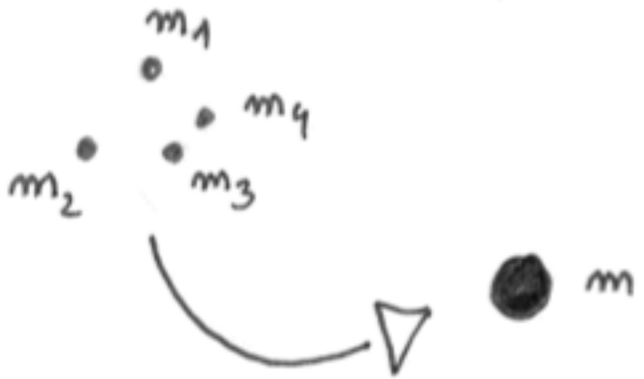
**Bilan de la quantité de mouvement**
**Bilan de l’énergie cinétique**
**Bilan du moment cinétique**

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2 + \tfrac{1}{2}I\,\omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) = \sum M_i$$

# C’est quoi un point ?

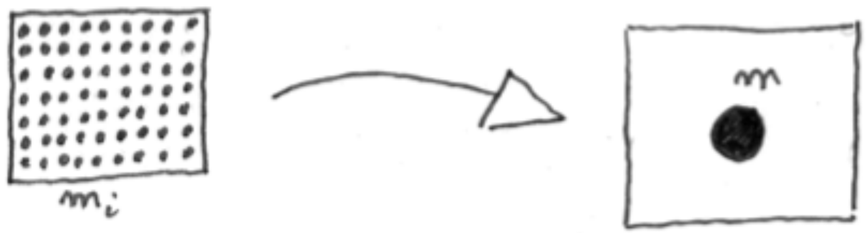



**On remplace une série de particules,**
**par un grosse particule** **virtuelle**
**de masse équivalente !**

$$m = \sum m_i$$

# ... un ensemble de points !

# C’est quoi un point ?

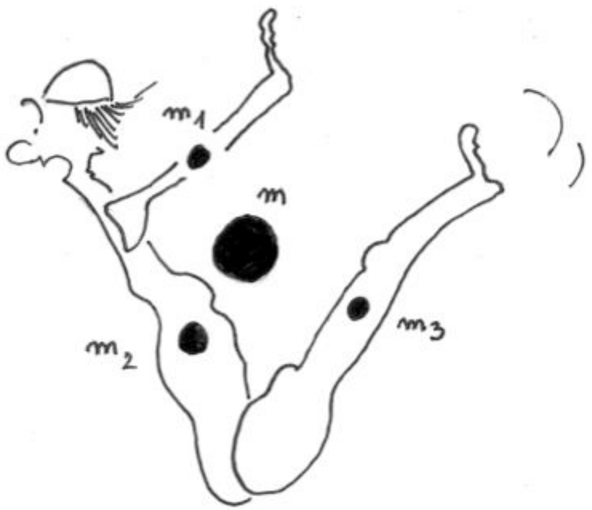



**Tant que le bloc ne tourne pas,**
**la mécanique du point est suffisante**
**pour résoudre pas mal de problèmes !**

$$m = \sum m_i$$

... un ensemble de points !

# C'est quoi un corps ?




**Mais lorsque notre athlète fait des pirouettes, il faut avoir un modèle mécanique plus compliqué !**

$$m = \sum m_i$$

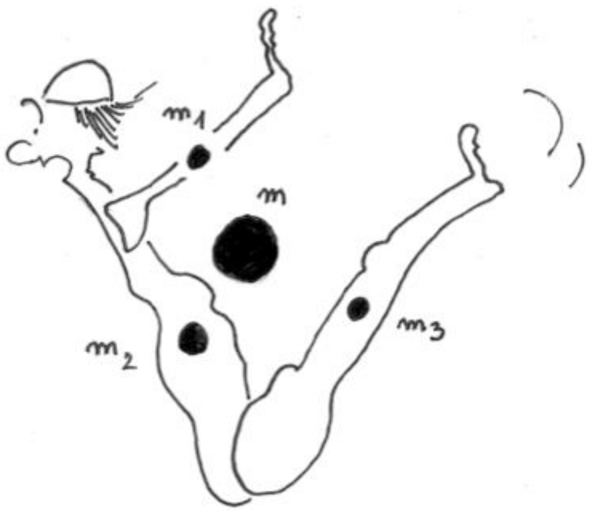
... un ensemble de points !

$\vec{x} = 0{,}58\ \vec{x}_{TRONC} + 0{,}32\ \vec{x}_{JAMBES} + 0{,}1\ \vec{x}_{BRAS}$

# Le centre de masse...

$0{,}58 + 0{,}32 + 0{,}1 = 1$ :-)

**La position d'une particule plus grande doit compter davantage !**




**Tronc-tête : 58% de la masse corporelle**
**Jambes : 32% de la masse corporelle**
**Bras : 10 % de la masse corporelle**

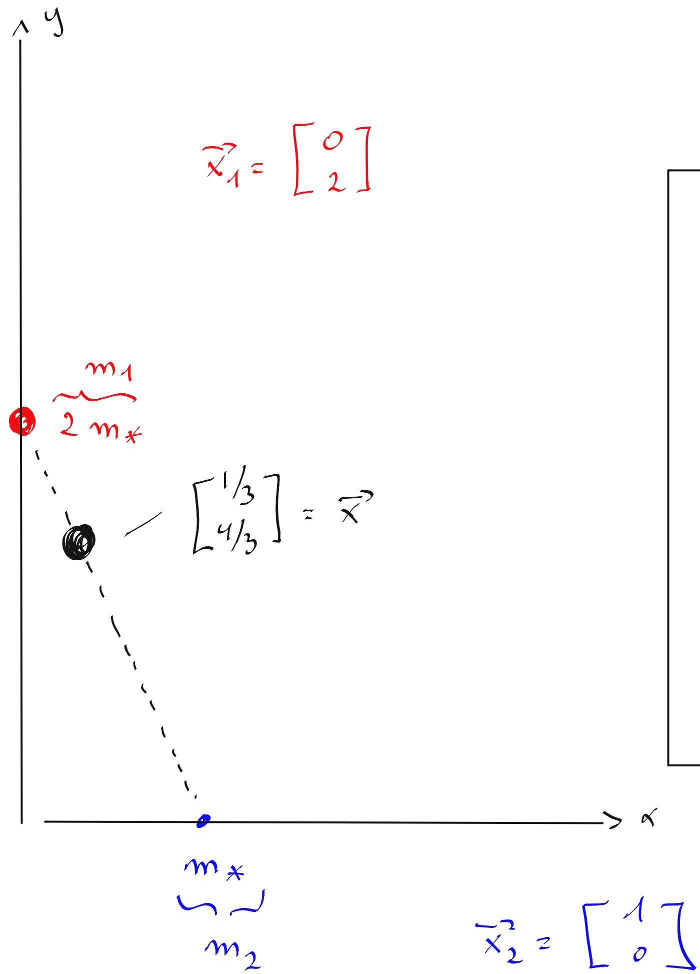
$$m = \sum m_i$$

$$m\,\vec{\mathbf{x}} = \sum \left(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i\right)$$

MASSE DE KEVIN = 75 kg

# ... est la position moyenne pondérée des positions

# Calcul du centre de masse




$$m = \underbrace{\sum m_i}$$
$$= m_1 + m_2$$
$$= 2\,m_* + m_* = 3\,m_*$$

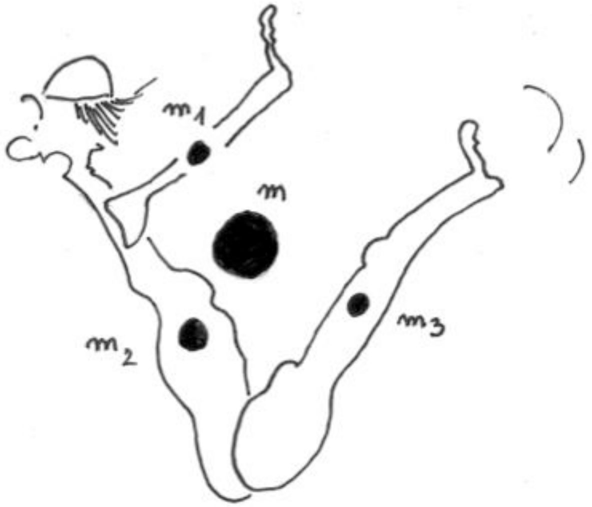
$$m\,\vec{x} = \sum m_i\,\vec{x}_i$$

CENTRE DE MASSE

$$\vec{x} = \frac{m_1}{m}\,\vec{x}_1 + \frac{m_2}{m}\,\vec{x}_2$$
$$= \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

# La vitesse du centre de masse...

**La position d'une particule plus grande doit compter davantage !**

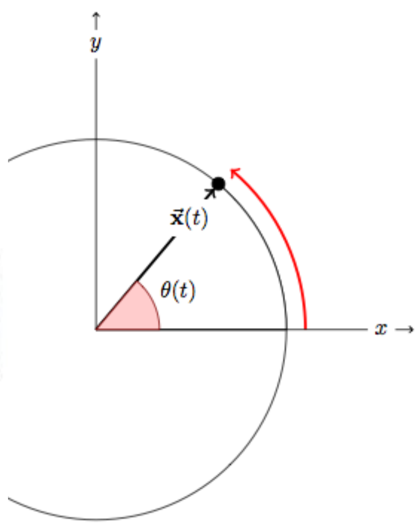



$$
\begin{aligned}
m &= \sum m_i \\
m\,\vec{\mathbf{x}} &= \sum \left( m_i\,\vec{\mathbf{x}}_i \right) \\
m\,\vec{\mathbf{v}} &= \sum \left( m_i\,\vec{\mathbf{v}}_i \right)
\end{aligned}
$$

# ... est aussi obtenue comme la moyenne pondérée des vitesses

# L'énergie cinétique...

**Le centre de masse ne bouge pas !**
**Mais, l'énergie cinétique n'est pas nulle !**
**Et ici, la symétrie est rompue !**




$$m = \sum m_i$$

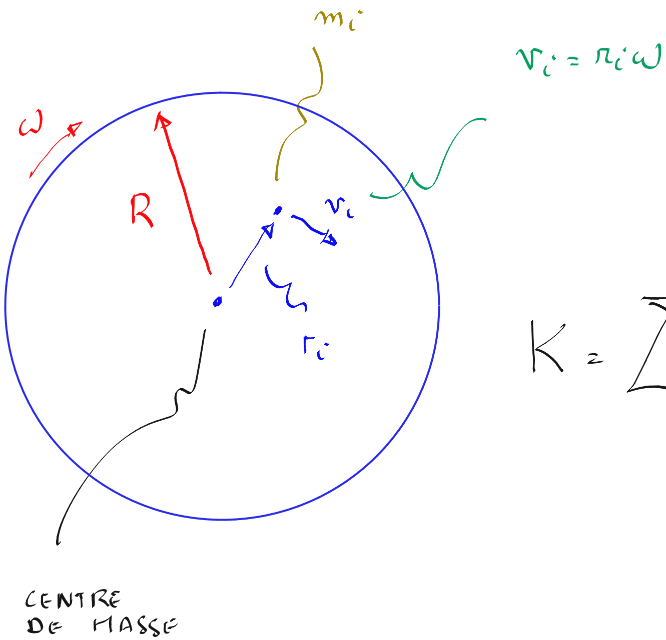
$$m\ \vec{\mathbf{x}} = \sum \left( m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i \right)$$

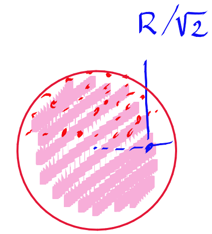
$$m\ \vec{\mathbf{v}} = \sum \left( m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i \right)$$

$$\frac{1}{2}\ m\ v^2 \neq \underbrace{\sum \left( \frac{1}{2}\ m_i\ v_i^2 \right)}_{\text{ENERGIE CINETIQUE}}$$

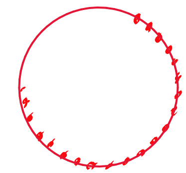
## ... est aussi obtenue comme la moyenne pondérée des énergies

# Calcul de l'énergie cinétique de rotation




$I = mR^2/2$




$I = mR^2$

$$K = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \underbrace{\sum m_i r_i^2}_{\text{MOMENT D'INERTIE } I} \omega^2$$

LE CENTRE
DE MASSE
NE BOUGE PAS

$\vec{v} = 0$

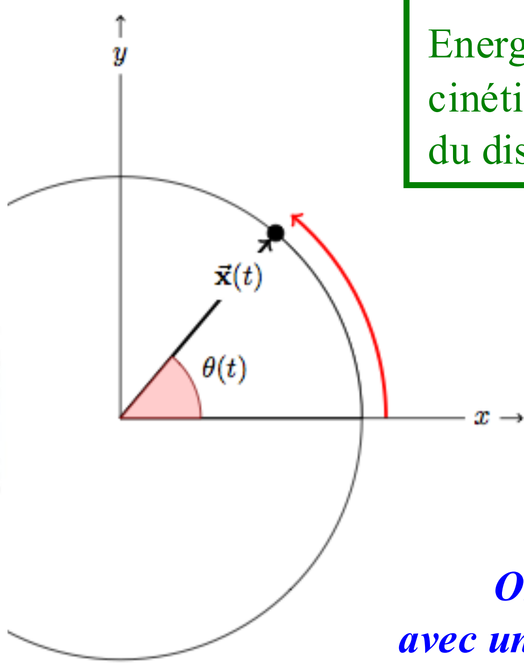
$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

# Et l'énergie cinétique de rotation d'un disque ?

$$\boxed{\sum \frac{1}{2} m_i \, v_i^2} = \frac{1}{2} \underbrace{\left( \sum m_i \, r_i^2 \right)}_{I} \omega^2$$

Energie cinétique du disque

Moment d'inertie du corps



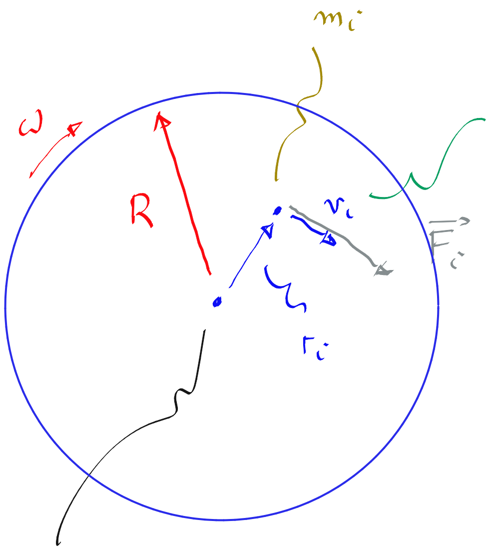

*Et le centre de masse ne bouge pas !*

*On peut donc avoir une énergie cinétique avec un centre de masse totalement immobile !*

# Calcul du moment cinétique

$$\underbrace{\vec{r}_i \times \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i)}_{\frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times m\vec{v}_i)} = \sum \underbrace{\vec{r}_i \times \vec{F}_i}_{\vec{M}_i}$$

MOMENT DE FORCE




$v_i = r_i \omega$

CENTRE DE MASSE

CAR

$$\underbrace{\underbrace{\frac{d}{dt}(r_i)}_{\vec{v}_i} \times m\vec{v}_i}_{=0}$$

$$\underbrace{\sum \underbrace{r_i}_{\text{BRAS DE LEVIER}} \underbrace{m_i v_i}_{\text{QUANTITÉ DE MVT}}}_{\text{MOMENT DE LA QUANTITÉ DE MVT}} = \sum \underbrace{m_i r_i r_i \omega}_{\sum m_i r_i^2}$$

MOMENT D'INERTIE

OU MOMENT CINÉTIQUE

LE CENTRE DE MASSE NE BOUGE PAS

$\vec{v} = 0$

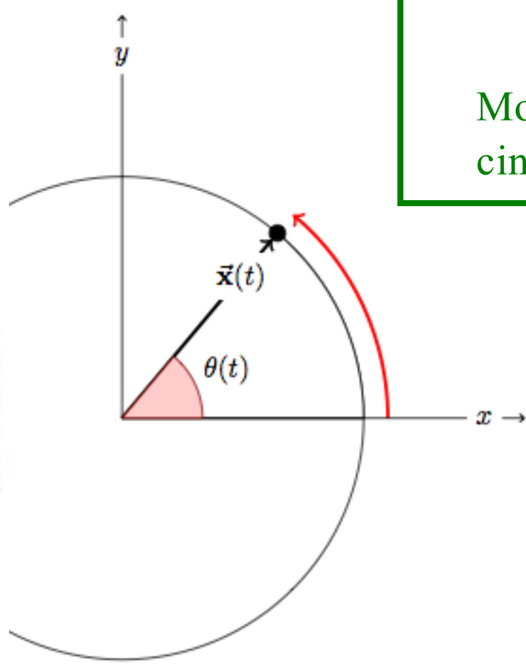
$$\boxed{\frac{d}{dt}(I\omega) = \sum M_i \quad \text{EN 2D}}$$

# Et le moment cinétique d'un disque ?

$$\sum r_i\, m_i\, v_i \;=\; \underbrace{\left(\sum m_i\, r_i^2\right)}_{I}\, \omega$$

Moment cinétique

Moment d'inertie du corps



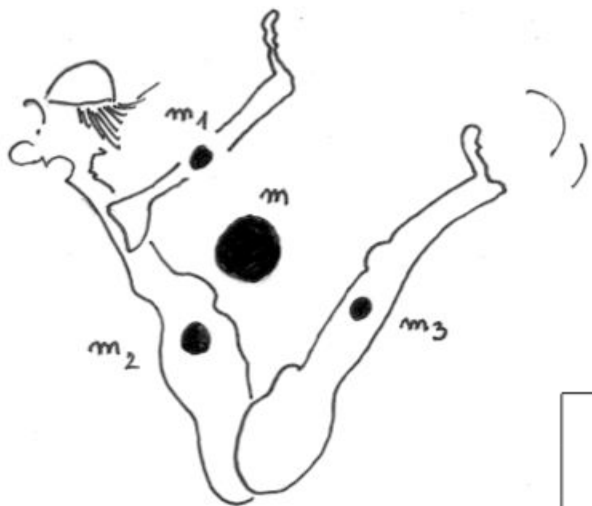

***Et le centre de masse ne bouge pas !***

***Pas de quantité de mouvement !***
***Mais un moment cinétique non nul car le disque tourne !***

# En résumé :

**Ensemble de particules : un corps !**

$$
\begin{aligned}
m &= \sum m_i \\
m\,\vec{\mathbf{x}}(t) &= \sum \left( m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t) \right) \\
m\,\vec{\mathbf{v}}(t) &= \sum \left( m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t) \right)
\end{aligned}
$$




$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\ m\ \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \\
\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{r}} \times m\ \vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m\ v^2 + \frac{1}{2} I\ \omega^2\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\left(I\ \omega\right) &= \sum M_i
\end{aligned}
$$

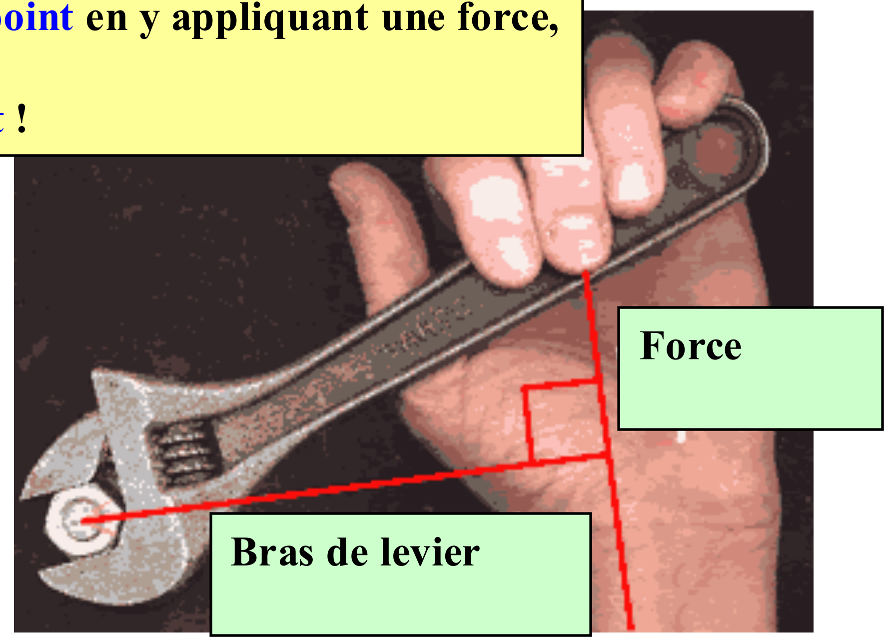
# Attention, les forces ne s'exercent pas uniquement sur le centre de masse !

Le mouvement de chaque particule de la clé à molette est complexe
Mais, la vitesse du centre de masse est nulle…
On n'exercerait donc aucune force sur le centre de gravité ?

# Ce qui fait tourner la clé, c'est le moment !

**Supposons que l'on fixe une barre en un point et**
**que l'on souhaite la faire tourner autour de ce point en y appliquant une force,**
**l'accélération angulaire sera proportionnelle**
**au moment de cette force par rapport à ce point !**

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$



$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{bmatrix}$$

$$C = AB\sin(\theta)$$

**Cross Product**

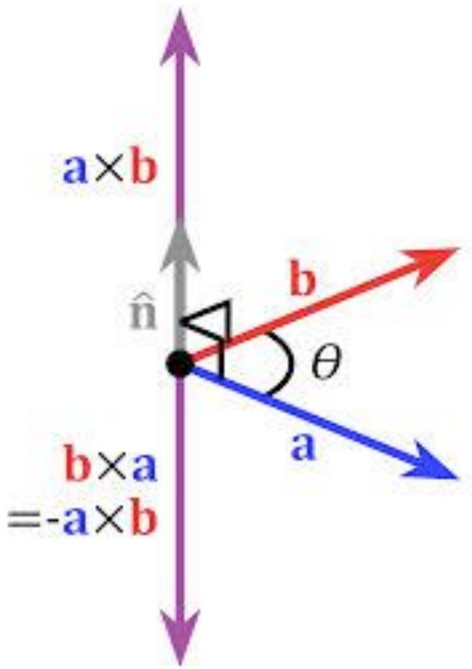
$$\vec{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

# Produit vectoriel de vecteurs

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$$

***Attention !***
***Le produit vectoriel n'est pas commutatif !***

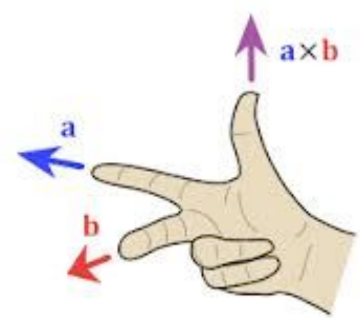



$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{bmatrix}$$

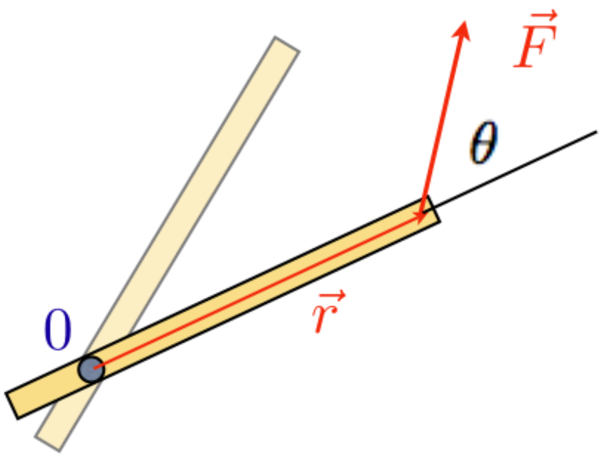
$$C = AB\sin(\theta)$$

**Cross Product**

# Produit vectoriel de vecteurs



# Et c'est quoi le moment d'une force par rapport à un point ?



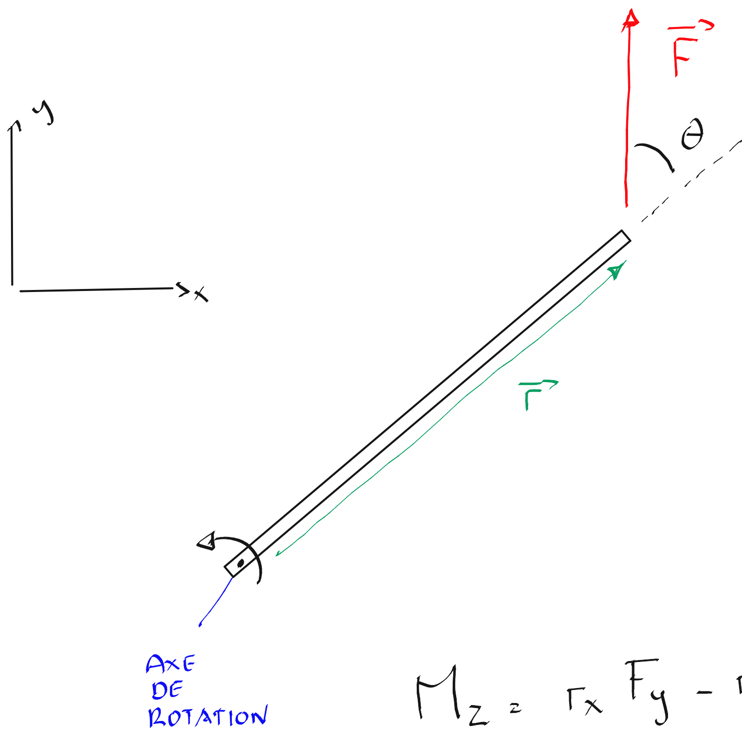

**Moment d'une force dans le plan**

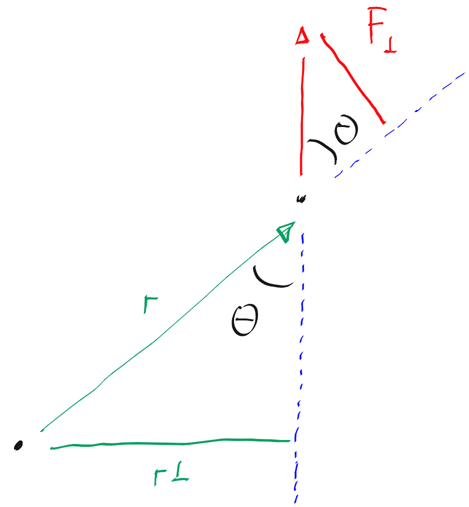
$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

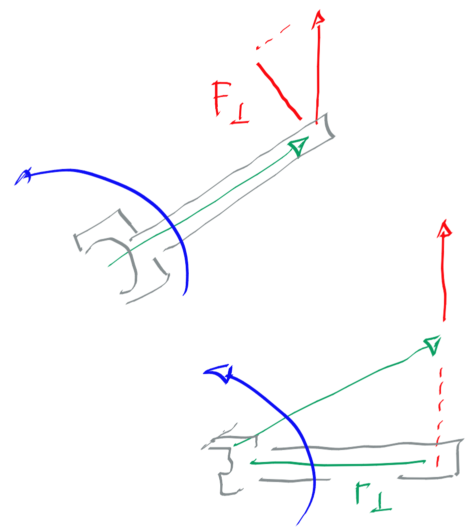
$$M = r_x F_y - r_y F_x = F\, r_\perp = F_\perp\, r = F r \sin(\theta)$$

**Direction du moment = axe de rotation**
**Norme de moment = vitesse de rotation**
**Signe du moment = sens de la rotation  suivant la fameuse règle de la main droite !**

# Les 3 manières de calculer le moment d'une force !




$$M_z = r_x F_y - r_y F_x$$

$$= r F \sin\theta$$

$$= r F_\perp = r_\perp F$$

# Moments

$$\frac{d}{dt}\left(I\ \omega\right) = \sum M_i$$


$$\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

# Forces

Equilibre de rotation

$$\frac{d}{dt}\cancel{(I\,\omega)} = \sum M_i$$


$$\frac{d}{dt}\cancel{(m\,\vec{\mathbf{v}})} = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

**Etudions d'abord les forces et les moments de corps au repos !**

**Concept d' équilibre statique**

Equilibre de translation

# Equilibre de rotation

$$0 = \sum M_i$$

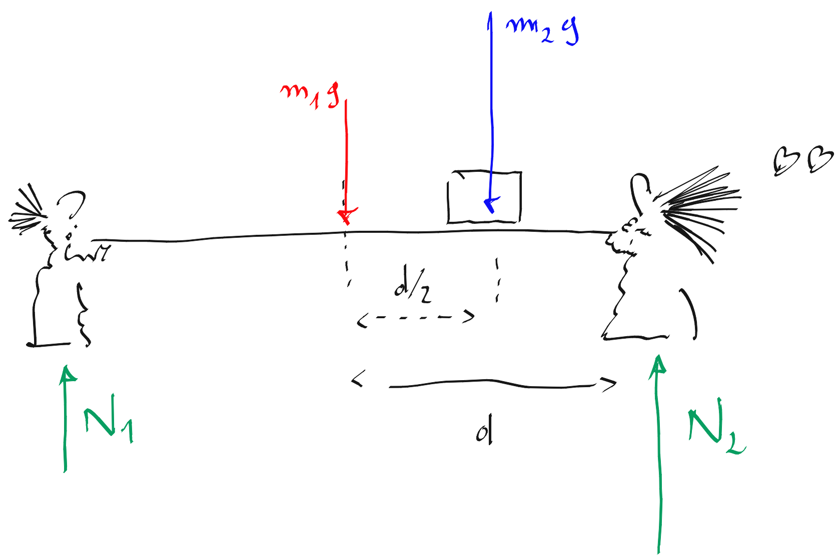
Lorsque le corps ne bouge pas,
son accélération angulaire est nulle
pour n'importe quel point !

Dans ce cas, on peut donc calculer les moments de force par rapport à n'importe quel point alors !


$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

# Equilibre de translation

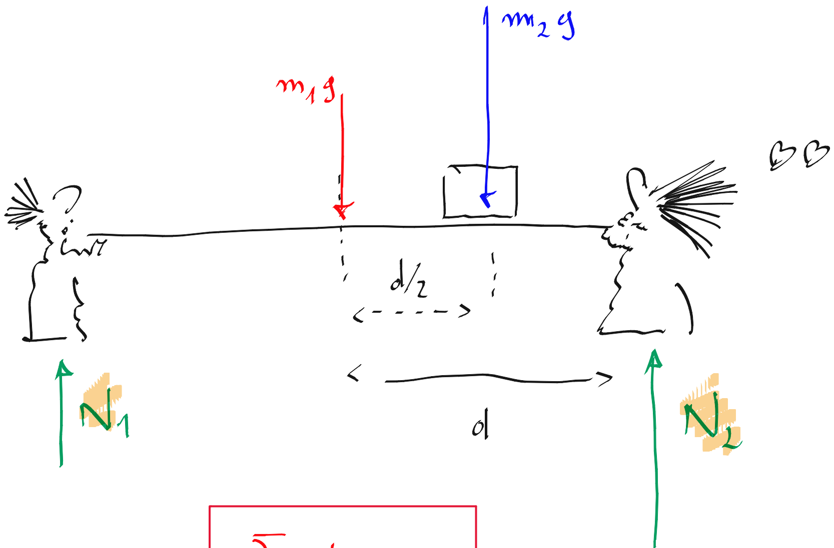
# Quelles sont les forces exercées par les deux gars ?




**Equilibre statique**

$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$0 = \sum M_i$$

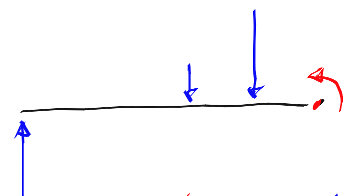



$$\boxed{\sum F_y = 0}$$

$$N_1 + N_2 = (m_1 + m_2)\, g$$

$$\boxed{\sum M = 0}$$

OPTION 1



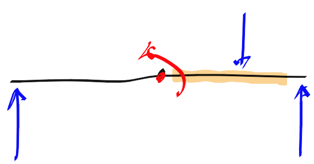
$$-N_1\, 2\cancel{d} + m_1 g \cancel{d} + m_2 g \frac{\cancel{d}}{2} = 0$$

$$N_1 = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{4}\right) g$$

$$2 N_1 = m_1 g + \frac{m_2 g}{2}$$

$$N_1 = \frac{m_1 g}{2} + \frac{m_2 g}{4} \quad :-)$$

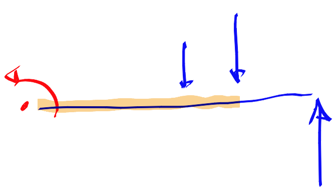
OPTION 2



$$N_1 d = N_2 d - m_2 g \frac{d}{2}$$

$$N_2 - N_1 = m_2 g \frac{d}{2}$$

OPTION 3



$$N_2\, 2d = m_1 g\, d + m_2 g \frac{3d}{2}$$

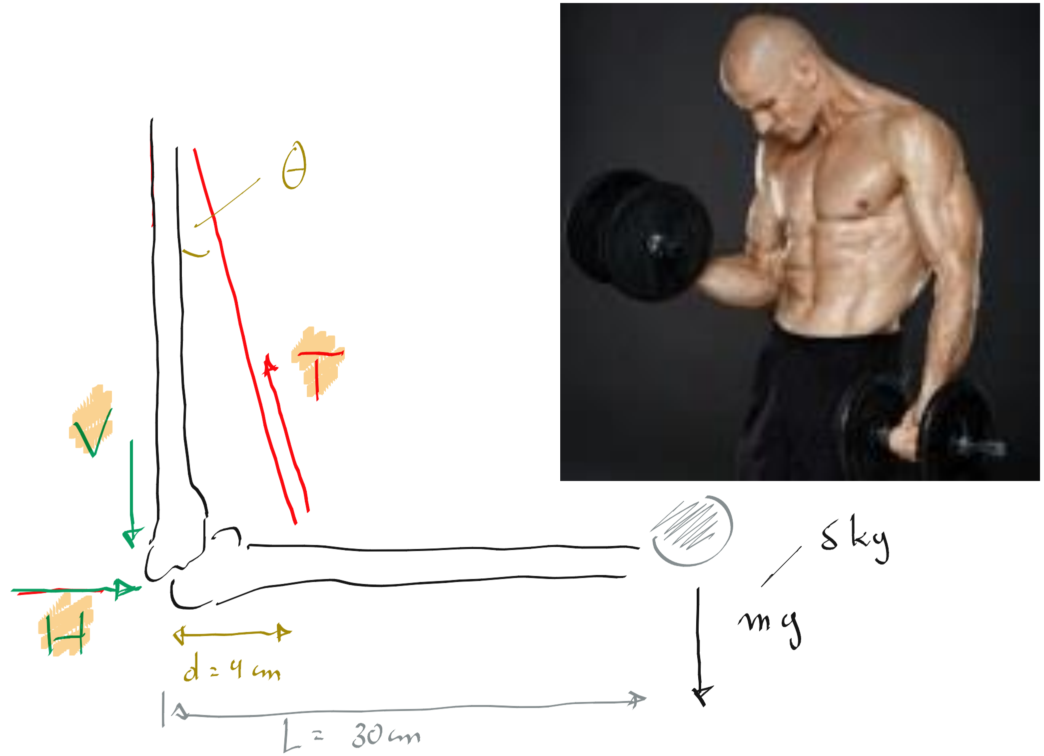
$$N_2 = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{3 m_2}{4}\right) g$$

Deux équations !
Deux inconnues !

# Quelle force as-tu dans le biceps ?

**On cherche la force dans l'articulation et dans le muscle du biceps !**

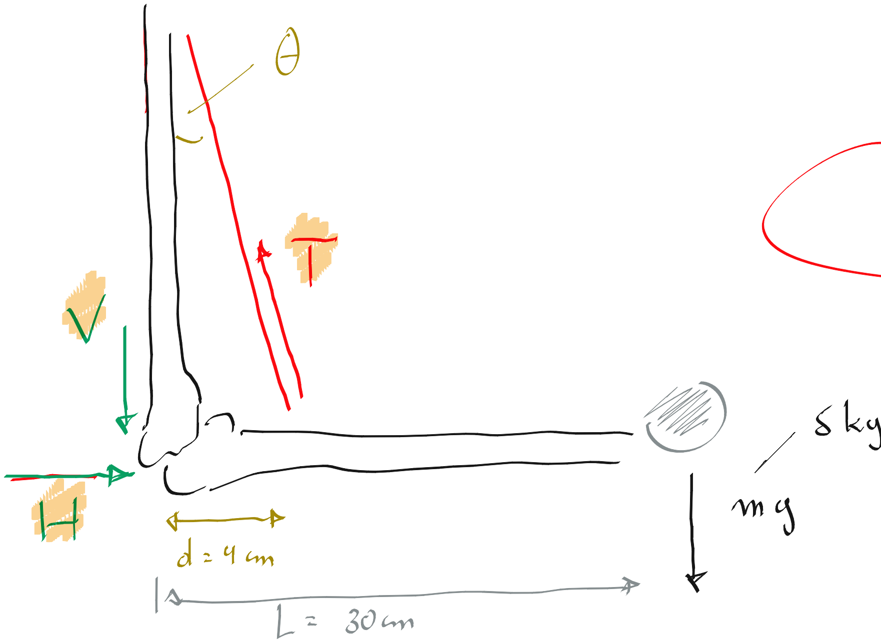
**Choisir astucieusement le point par rapport on calcule les moments peut fortement simplifier les calculs :-)**




**Equilibre statique**

$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$0 = \sum M_i$$




$$H - T\sin\theta = 0$$

$$T\cos\theta - V - mg = 0$$

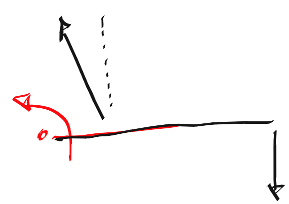
$$\boxed{\sum F_x = 0}$$

$$\boxed{\sum F_y = 0}$$

$$\boxed{\sum M = 0}$$

$$\underbrace{mg}_{50}\,\underbrace{L}_{0,3} = T\,\overbrace{\cos\theta}^{\simeq 1}\,\underbrace{d}_{0,04}$$

$$T = \frac{0.3}{0.04}\,50 \simeq 400 \text{ N}$$

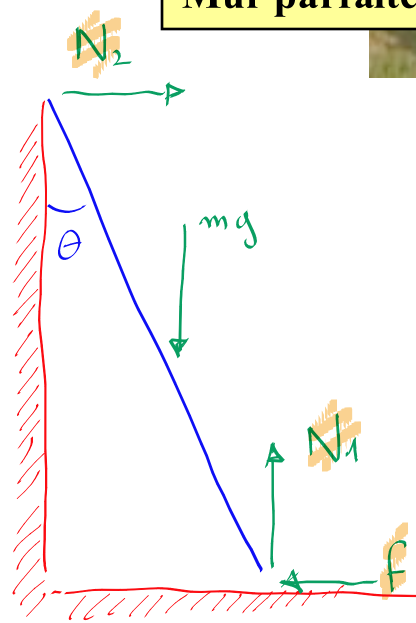



Trois équations !

Trois inconnues !

# Est-ce que l'échelle va glisser ?

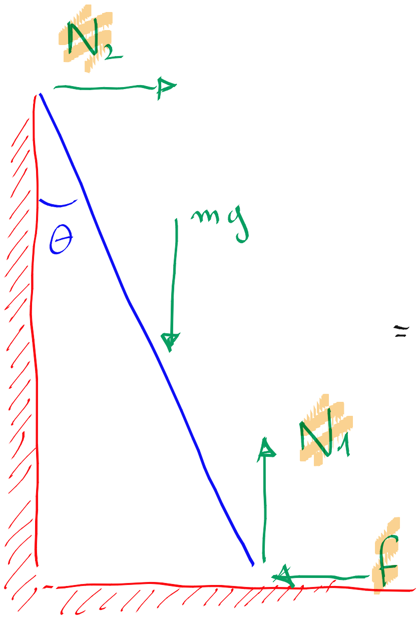
**Plancher rugueux**
**Mur parfaitement lisse (hem :-)**




**Equilibre statique**

$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

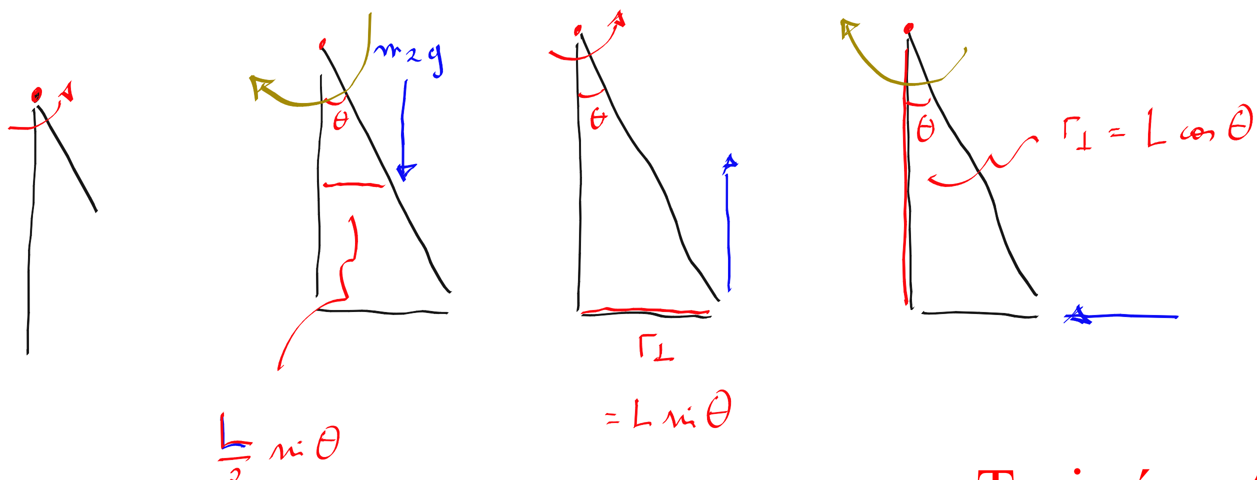
$$0 = \sum M_i$$




$$N_2 - f = 0$$

$$N_1 - mg = 0$$

$$\underbrace{\underbrace{N_1}_{= mg} L \sin\theta}_{\text{MOMENT DE } N_1} = \underbrace{f L \cos\theta}_{\text{MOMENT DE } f} + \underbrace{mg \frac{L}{2} \sin\theta}_{\text{MOMENT DE } mg}$$




Trois équations !
Trois inconnues !

**Par contre, pour un échelle totalement rigide, le problème est mal posé si il y a du frottement sur le sol et sur le mur !**

**C’est pas toujours aussi simple qu’il n’y paraît !**

$$N_2 - f = 0$$

$$N_1 - mg = 0$$

$$\underbrace{\underbrace{N_1}_{=\,mg} L \sin\theta}_{\text{MOMENT DE } N_1} = \underbrace{\underbrace{f}_{=\,\mu_S mg} L \cos\theta}_{\text{MOMENT DE } f} + \underbrace{mg \frac{L}{2} \sin\theta}_{\text{MOMENT DE } mg}$$

LORSQUE LE CAS EST LE PLUS CRITIQUE

Trois équations !
Trois inconnues !


$$N_2 - f = 0$$

$$N_1 - mg = 0$$

$$\underbrace{N_1 \cancel{L} \sin\theta}_{\text{MOMENT DE } N_1} = \underbrace{f \cancel{L} \cos\theta}_{\text{MOMENT DE } f} + \underbrace{\cancel{mg} \frac{\cancel{L}}{2} \sin\theta}_{\text{MOMENT DE } mg}$$

$N_1 = \cancel{mg}$

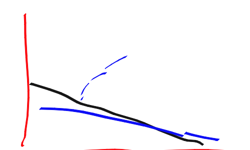
$f = \mu_s \cancel{mg}$ LORSQUE LE CAS EST LE PLUS CRITIQUE

$$\underbrace{-\frac{1}{2}\sin\theta + \sin\theta}_{\frac{1}{2}\sin\theta} = \mu_s \cos\theta$$

$$\boxed{2\mu_s = \mathrm{tg}\,\theta}$$

$\mu_s = 0.6$

$\theta^* = 50°$



Calcul de l'angle critique !

C'est l'angle où le frottement est maximal !

- **Le moment est le produit du bras de levier par la force.**
- **L'énergie cinétique d'un corps est la somme de l'énergie du mouvement du centre de masse et de l'énergie de la rotation du corps autour de ce point.**
- **Pour la rotation d'un corps autour de son centre de masse, les moments de force, le moment cinétique et le moment d'inertie du corps sont l'équivalent des forces, de la quantité de mouvement et de la masse pour le mouvement de ce point !**
- **Un corps est à l'équilibre si la somme des forces et des moments est nulle : c'est l'équilibre statique.**

$$\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) = \sum M_i$$