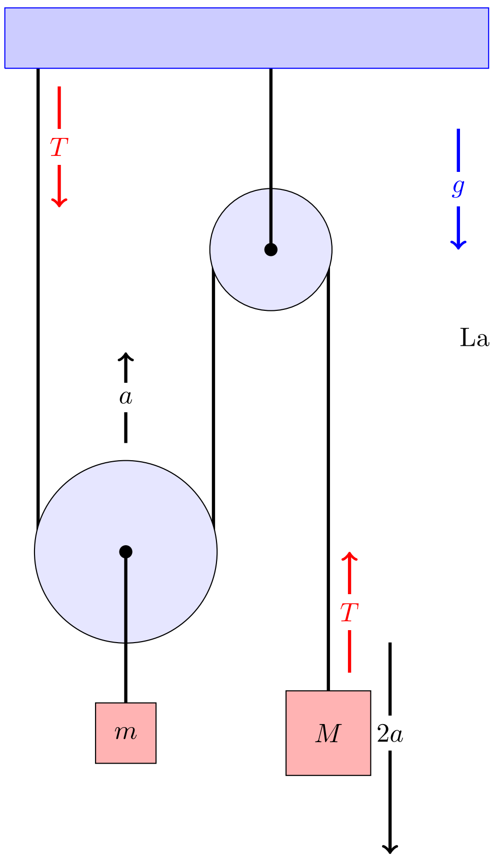
KINE11-EDPH11	
Janvier 2025	*Introduction à la mécanique*
LFSM1105 -Bleu-	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

1 Un bloc qui descend et une poulie qui monte...



Une corde est attachée au plafond à gauche.
Cette corde s'enroule sur une première poulie à gauche.
Puis la corde s'enroule sur une seconde poulie à droite.
A l'extrémité de la corde, une masse $M = 8$ kg est attachée.
Un second bloc de masse $m = 4$ kg est attaché à la première poulie.

A l'instant $t = 0$, le système est libéré du repos.
Le bloc M descend avec une accélération constante $2a$.
Les deux poulies se mettent à tourner.
La poulie et le bloc de gauche montent avec une accélération constante a.
Par contre, la poulie de droite reste à la même hauteur.
Les deux accélérations ne sont pas indépendantes entre elles,
car il existe une condition géométrique sur le mouvement.

En $t = t_*$, le bloc M est descendu d'une hauteur $d = 0.25$ m.

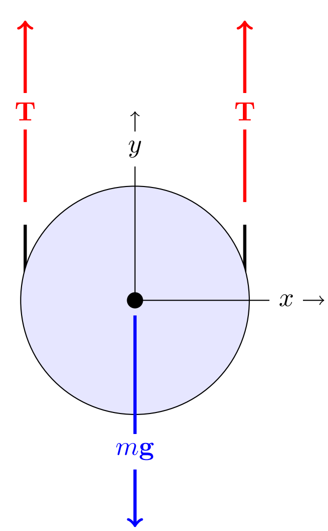
Les masses et les inerties des deux poulies sont négligeables.
La masse de la corde est évidemment négligeable.
La norme T de la tension dans la longue corde est donc constante.
Dans les calculs, on utilisera $g = 10$ m/s^2.

1. Dessiner l'ensemble des forces qui s'appliquent sur la poulie de gauche.
   Y indiquer clairement le nom et la notation habituelle pour chacune des forces.

Il faut uniquement citer :

- *Force de gravité :* $m\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$
- *Tensions dans la corde :* $\vec{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix}$

Toutes les forces sont verticales !
Il ne faut pas citer d'autres forces totalement bizarroïdes !
Il faut dessiner deux forces pour la corde !



L'enseignant pensait cette question élémentaire et pourtant....
Beaucoup d'étudiants éprouvent des difficultés pour dessiner les 3 forces.
Oui : la poulie est retenue par la corde à droite et à gauche !
Oui : il y a deux forces pour la corde qui sont identiques et qui s'additionnent donc !

2. Ecrire les équations du mouvement pour la poulie de gauche et la masse de droite.
   En déduire l'accélération a et la tension T dans la corde.

   Les deux équations du mouvement s'écrivent immédiatement.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} m\ a & = & 2T - mg \\ \\ M\ 2a & = & Mg - T \end{array} \right.$$

Il y a donc bien deux équations pour obtenir les deux inconnues T et a !
Lorsque vous avez écrit ces deux équations : le problème physique est résolu :-)

On résout mathématiquement le problème en éliminant une des deux inconnues.
Par exemple, on peut obtenir l'accélération a en multipliant la seconde équation par deux.
Ensuite, on additionne les deux équations entre elles.

$$\begin{array}{rcl} m\ a & = & 2T - mg \\ 2\ (2M\ a) & = & 2\ Mg - 2\ T \end{array}$$

En additionnant les deux équations...

$$\begin{array}{rcl} (4M + m)\ a & = & (2M - m)\ g \\ a & = & \dfrac{(2M - m)}{(4M + m)}\ g \end{array}$$

Finalement, on obtient T en substituant l'accélération trouvée dans la seconde équation.

$$\begin{array}{rcl} T & = & Mg - 2M\ a \\ T & = & Mg - 2M\ \dfrac{(2M - m)}{(4M + m)}\ g \\ T & = & \dfrac{(4M^2 + mM - 4M^2 + 2Mm)}{(4M + m)}\ g \ = \ \dfrac{3Mm}{(4M + m)}\ g \end{array}$$

Il y a plein d'autres manières de procéder évidemment !

On conclut donc :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{(2M - m)}{(4M + m)}\ g \ = \ \dfrac{10}{3} \ = \ 3.33\ \text{m/s}^2 \\ T & = & \dfrac{3Mm}{(4M + m)}\ g \ = \ \dfrac{80}{3} \ = \ 26.67\ \text{N} \end{array}}$$

3. Que vaut l'instant t_* ?

   C'est un simple calcul usuel de MRUA !

$$\frac{2a\ t_*^2}{2} = d_*$$
$$t_* = \sqrt{\frac{d_*}{a}}$$

On conclut donc : $\boxed{t_* = \sqrt{\frac{3}{40}} = 0.27 \text{ s}}$

La question est élémentaire !
Attention : l'accélération du bloc M est notée $2a$: ce que n'observent pas beaucoup d'étudiants.
Attention : 25 cm $= 0.25$ m : autre petite erreur faite par beaucoup d'étudiants.

4. Que devrait valoir m pour que le système reste immobile ?

   Il suffit que a soit nulle !
   Les deux équations du mouvement deviennent alors.

$$\begin{cases} 0 = 2T - mg \\ 0 = Mg - T \end{cases}$$

On conclut donc : $\boxed{m = 2M = 16 \text{ kg}}$

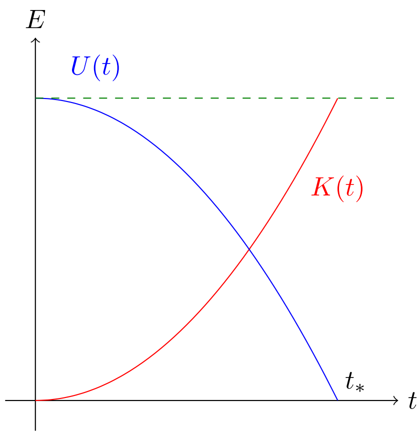
On peut aussi obtenir ce résultat immédiatement à partir de l'expression de a !
Attention, la valeur de la tension T change aussi : on obtient donc une valeur erronée de m en utilisant la valeur de T obtenue dans la sous-question deux.
Malheureusement, c'est un choix fait par beaucoup d'étudiants (y-compris les plus brillants !).

On peut aussi observer que le bloc m est supporté par la corde des deux côtés de la poulie !
A gauche, la corde est attachée au plafond et à droite la corde est attachée au bloc M.
Donc le bloc M ne doit retenir que la moitié de m pour équilibrer les forces.
Ce résultat peut donc être obtenu sans aucun calcul avec un peu d'intuition.
Bravo aux quelques étudiants super astucieux qui l'ont résolu ainsi !

5. Tracer l'évolution temporelle de l'énergie cinétique et potentielle du système pour $t \in [0, t_*]$.
On supposera que l'énergie potentielle est nulle en t_*. *L'évolution temporelle de l'énergie cinétique est donnée par une parabole :*

$$K(t) \quad = \quad \frac{M\,(2at)^2}{2} + \frac{m\,(at)^2}{2} \;=\; c\; t^2$$

L'énergie mécanique est parfaitement conservée.
La parabole de l'énergie potentielle doit donc démarrer exactement à $K(t_*)$ et être nulle en $t = t_*$.

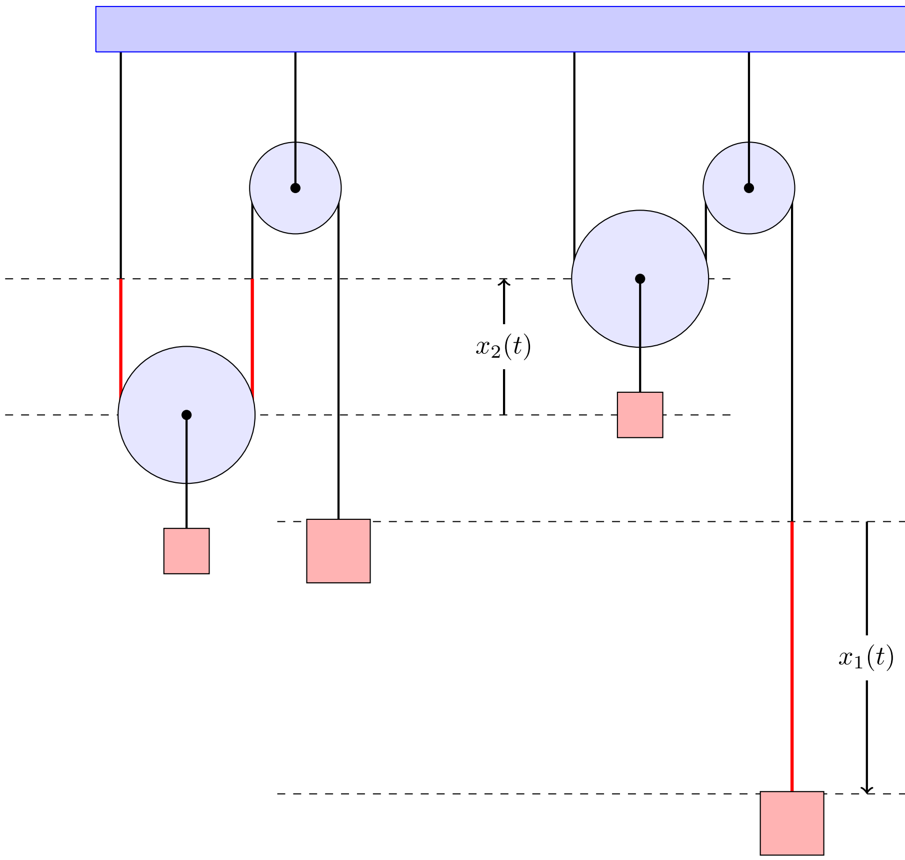


Ce graphe était vraiment assez simple à obtenir.
Il est donc assez impardonnable de ne pas obtenir l'allure correcte des deux paraboles.

Ce graphe n'est à nouveau pas bien compliqué à obtenir !
La plupart des étudiants arrivent à obtenir ce graphe...
Inverser les deux courbes fait tout perdre !
Quelques étudiants font le même dessin qu'en janvier 2019 : eh non : pas de frottement en 2025 !

6. Pourquoi la norme de l'accélération de la masse m est la moitié de celle de la masse M ? Expliquer la condition cinématique ou géométrique qui permet de déduire cela !

Car la longueur de la corde est constante !
Car la poulie de gauche est retenue par cette corde deux fois !
Si le bloc M descend d'une distance $x_1(t) = 2d$,
la poulie de gauche ne monte d'une distance $x_2(t) = d$!



On a donc un contrainte géométrique sur le déplacement des deux blocs à tout instant !
C'est un système avec un unique degré de liberté. :-)

$$x_1(t) \quad = \quad 2\ x_2(t)$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En dérivant deux fois par rapport à t...}$$

$$2a \ = \ x_1''(t) \quad = \quad 2\ x_2''(t) \ = \ 2a$$

Et on a ainsi bien démontré la relation demandée entre les deux accélérations !

Cette question était vraiment très difficile !
Il n'y a aucun rapport avec le rapport des masses : c'est vrai pour n'importe m et M !
Il n'y a aucun rapport avec les rayons des poulies : c'est d'ailleurs pas fourni !
Il n'y a aucun rapport avec les forces : c'est une contrainte purement géométrique !
Bravo aux trop rares étudiants qui m'ont écrit la bonne justification.
Cette question était un pur bonus.
Si vous aviez répondu correctement à toutes les autres sous-questions, vous avez 20/20 !

2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Ne pas répondre ou cocher une réponse erronée ne fait rien perdre.
Par contre, il faut répondre correctement à six questions pour réussir cette partie.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé !
Gommer pour les corrections !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

Q1

Que se passe-t-il lorsqu'un rayon lumineux passe d'un milieu transparent à un autre avec un indice de réfraction différent (par exemple de l'air à l'eau) ?

A	Le rayon lumineux change de direction selon une règle appelée loi de Snell-Descartes.	**A**	■
B	Le rayon lumineux est toujours entièrement réfléchi et ne pénètre pas dans le second milieu (réflexion totale).	**B**	□
C	Le rayon lumineux change de couleur, passant du rouge au bleu.	**C**	□
D	Le rayon lumineux continue tout droit, quelle que soit la nature des milieux traversés.	**D**	□
E	Le rayon lumineux se divise en plusieurs couleurs, formant un arc-en-ciel (phénomène de dispersion).	**E**	□

Q2

La valeur de la puissance d'une usine hydro-électrique exprimée en $N\ m/s$ est estimée par l'expression :

$$P = \rho\ Q^a\ g^b\ h^b$$

où ρ est la masse volumique de l'eau exprimée en kg/m^3, Q est un débit exprimé m^3/s, g est l'accélération de la gravité exprimée m/s^2 et h est une hauteur exprimée en mètres.

Calculer les valeurs des exposants a et b.

A	$a = 3/2$ et $b = 1/4$	**A**	□
B	$a = 1/2$ et $b = 5/4$	**B**	□
C	$a = 2$ et $b = 1$	**C**	□
D	$a = 1$ et $b = 1$	**D**	■
E	$a = 1$ et $b = 2$	**E**	□

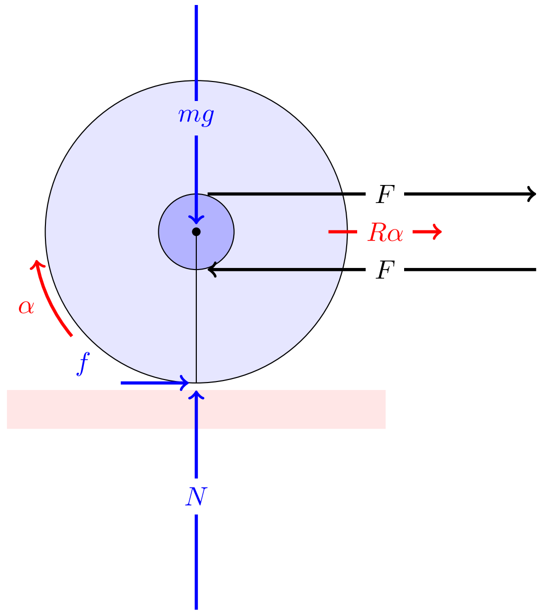
Q3

Pourquoi un peigne chargé par frottement sur des cheveux secs peut-il attirer de petits morceaux de papier ?

A	Le peigne génère un champ magnétique.	**A**	□
B	Le peigne est devenu un conducteur d'électricité	**B**	□
C	Le papier est polarisé par le champ électrique du peigne.	**C**	■
D	Le papier contient des charges négatives en excès.	**D**	□
E	Le peigne émet des ondes électromagnétiques.	**E**	□

Q4

Considérons une roue de vélo de rayon R entrainée par le mouvement de la chaine avec un pignon de rayon r. Par convention, une valeur positive des accélérations et forces représentées correspond à la donnée telle qu'elle est représentée sur le dessin.



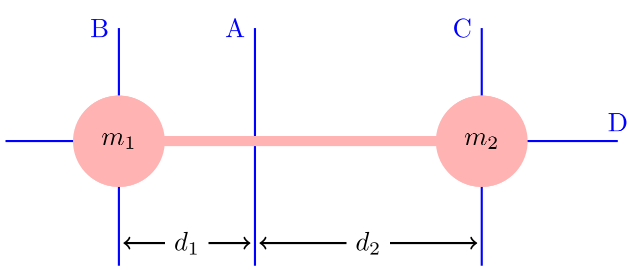
Avec la convention choisie, l'équilibre de rotation s'écrit :

A $I\alpha = 2rF + Rf$
B $I\alpha = 2rF - Rf$
C $I\alpha = rF - Rf$
D $I\alpha = rF + 2Rf$
E $I\alpha = 2RF - rf$

A ☐
B ■
C ☐
D ☐
E ☐

Q5

Considérons un haltère composé de deux sphères de même rayon $r = 0.01$ m et des masses $m_1 = 3$ kg et $m_2 = 5$ kg et d'une barre de masse négligeable. On calcule les moments d'inertie I_A, I_B, I_C et I_D par rapport aux quatre axes indiqués sur la figure. Les distances sont $d_1 = 0.1$ m et $d_2 = 0.2$ m



Quelle est l'unique affirmation exacte?

A $I_D < I_C < I_B < I_A$
B $I_C < I_B < I_D < I_A$
C $I_B < I_D < I_A < I_C$
D $I_D < I_A < I_C < I_B$
E $I_B = I_C$

A ☐
B ☐
C ☐
D ■
E ☐

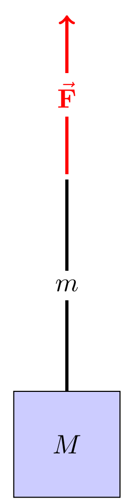
Q6

Un bateau se déplace à une vitesse constante $v = 8$ m/s. Un marin situé sur le bateau lance une balle vers le haut perpendiculairement au mouvement du bateau. Après deux secondes, la balle retombe sur le bateau.
La force de trainée est supposée totalement négligeable !

A	Le point de chute se trouve à 8 m du marin vers l'avant du bateau .	**A**	☐
B	Le point de chute se trouve à 16 m du marin vers l'avant du bateau.	**B**	☐
C	Le point de chute se trouve à 8 m du marin vers l'arrière du bateau.	**C**	☐
D	Le point de chute se trouve à 16 m du marin vers l'arrière du bateau.	**D**	☐
E	La balle tombe sur la tête du marin :-)	**E**	■

Q7

Une corde a une masse m et est reliée à un bloc de masse M. On tire vers le haut sur la corde afin que le bloc se soulève avec une accélération a.
La norme de l'accélération de la gravité est $g = 10m/s^2$.
Attention, on ne néglige pas la masse de la corde !



La tension au milieu de la corde est :

A	$T = (m + M/2)\ (g + a)$	**A**	☐
B	$T = \dfrac{(m/2 + M)}{M}\ mg + \dfrac{(m + M/2)}{M}\ ma$	**B**	☐
C	$T = (m/2 + M)\ (g + a)$	**C**	■
D	$T = mg + Ma$	**D**	☐
E	$T = M\ (g + a)$	**E**	☐

Q8

Comment fonctionne un défibrillateur ?

A	Il délivre un courant continu constant au coeur pour le stimuler.	**A**	☐
B	Il stocke de l'énergie électrique dans un condensateur, puis la libère en un court instant sous forme de choc électrique.	**B**	■
C	Il utilise une bobine électromagnétique pour attirer les cellules cardiaques.	**C**	☐
D	Il génère une série d'impulsions électriques de faible intensité pour ralentir le rythme cardiaque.	**D**	☐
E	Il produit une décharge mécanique qui compresse le coeur pour rétablir le rythme cardiaque.	**E**	☐

Q9

Quelle technique utilise un champ magnétique puissant et permet d'imager les tissus du cerveau ?

A	La stimulation magnétique transcrânienne (TMS).	**A**	☐
B	L'électroencéphalographie (EEG).	**B**	☐
C	La mesure de la profondeur de pénétration des ondes (PTB).	**C**	☐
D	La magnétoencéphalographie (MEG).	**D**	☐
E	L'imagerie par résonance magnétique (IRM)	**E**	■

Q10

Quelles sont les unités de la constante de raideur k d'un ressort ?

A	kg/s^2	**A**	■
B	Nm	**B**	☐
C	W	**C**	☐
D	N/s	**D**	☐
E	Aucune de quatre réponses précédentes.	**E**	☐

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

Formulaire

$$\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(I\ \omega\right) = \sum M_i$$

Lorsque les forces sont constantes,

$$\Delta\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\Delta t$$

$$\Delta\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}$$

Mouvement d'un projectile

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}$$

Vitesse : $v = r\omega$

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$

Vitesse angulaire ω et accélération angulaire α

Bilan d'énergie

$$\Delta \overbrace{\left(\tfrac{1}{2} m\ v^2\right)}^{K} = \sum \overbrace{\vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}}^{W}$$

$$= \underbrace{\sum \vec{\mathbf{F}_{nc}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}}_{W_{nc}} \quad - \quad \Delta\Big(\underbrace{mg\ h}_{U_g} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\ k\ x^2}_{U_r}\Big)$$

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_x F_y - r_y F_x = F\ r_\perp = F_\perp\ r = F r \sin(\theta)$$

Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$

$$m\ \vec{\mathbf{x}}(t) = \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t)\Big)$$

$$m\ \vec{\mathbf{v}}(t) = \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t)\Big)$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\ r_i^2$$

Rayon de giration

$$m\ k^2 = \sum m_i\ r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\ h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m\ \dfrac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m\ \dfrac{L^2}{12}$