

C'est quoi physiquement le nombre de Reynolds ?

*Effets visqueux
Diffusion de la quantité
de mouvement*

$$\boxed{\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}} = -\nabla p + \boxed{\mu \nabla^2 \mathbf{v}}$$

$\mathcal{O}(\rho U^2/L)$ $\mathcal{O}(\mu U/L^2)$

Effets d'inertie

*Transport de la quantité
de mouvement*

$$\rho U^2/L$$

$$\mu U/L^2$$

$$Re = \frac{\boxed{\text{Forces d'inertie}}}{\boxed{\text{Forces visqueuses}}} = \frac{\rho U^2/L}{\mu U/L^2} = \frac{\rho U L}{\mu}$$

Nombre de Reynolds

caractérise un écoulement d'un fluide !

$$Re = \frac{\rho_0 u_0 L}{\mu}$$

à éventuellement savoir, à titre de *double check*

Forces d'inertie

Forces de viscosité

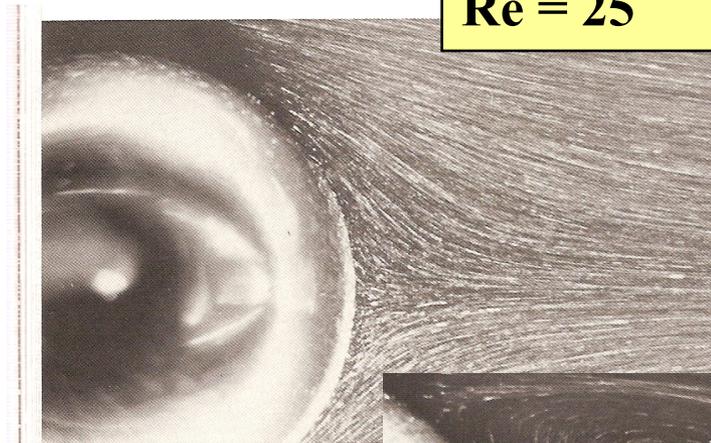
à savoir !



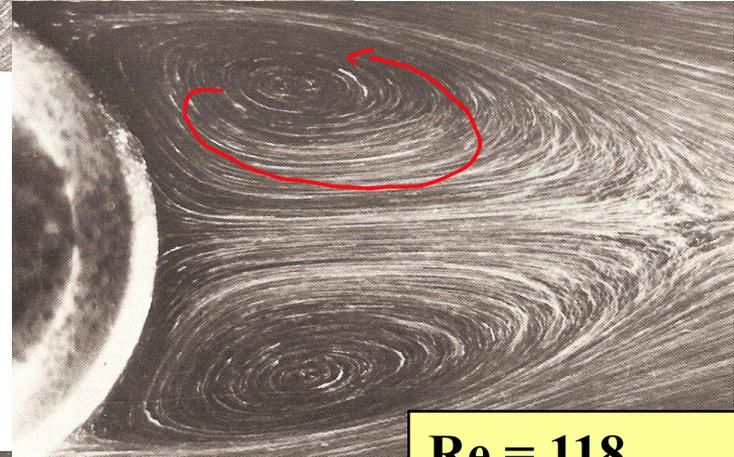
Born: 23 Aug 1842 in Belfast, Ireland

Died: 21 Feb 1912 in Watchet, Somerset, England

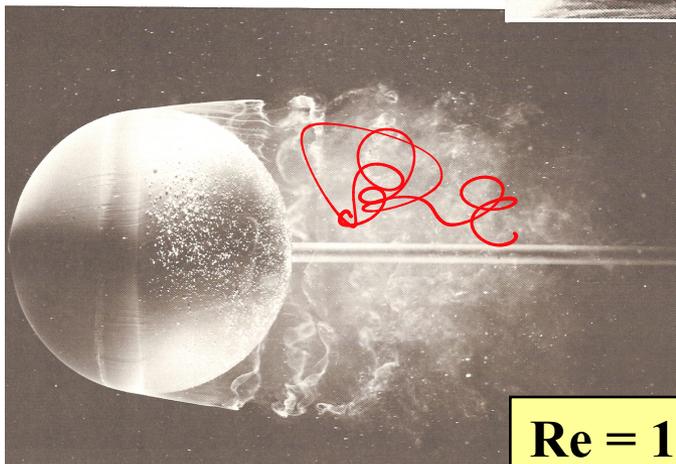
Que se
passe-t-il
lorsque l'on
augmente
le nombre
de Re ?



$Re = 25$



$Re = 118$



$Re = 15000$

(Van Dyke, 1982)

Re très très petit...

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$0 = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

Le terme d'inertie est négligeable

*Écoulements
incompressibles
rampants*

Equations de Stokes

Le terme visqueux est négligeable

*Écoulements
incompressibles
irrotationnels*

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p$$

...et Re très très grand !

Equations d'Euler

Et le thermique...

Écoulement incompressible d'un
fluide visqueux newtonien à
paramètres constants.

Les équations de continuité et de quantité
de mouvement ne font pas intervenir la
température : on peut résoudre la
dynamique de l'écoulement sans tenir
compte des aspects thermiques !

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g},$$

Etape 1

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + k \nabla^2 T,$$

Etape 2

Une fois la dynamique de l'écoulement
connue, on peut ensuite résoudre le
problème thermique...



1

VISCOSITE CINEMATIQUE DIFFUSIVITE THERMIQUE

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0$$

VISCOSITE DYNAMIQUE

$$-\nabla P$$

$$P \triangleq \frac{\rho}{\rho}$$

$$(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = \underbrace{\frac{\mu}{\rho}}_{\text{VISCOSITE CINEMATIQUE}} \nabla^2 \underline{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

VISCOSITE CINEMATIQUE $[\frac{m^2}{s}]$

$$(\underline{v} \cdot \nabla) T = \underbrace{\frac{k}{\rho c}}_{\text{DIFFUSIVITE THERMIQUE}} \nabla^2 T + \frac{2\mu}{\rho c} \underline{d} : \underline{d}$$

DIFFUSIVITE THERMIQUE $[\frac{m^2}{s}]$

$$Re = \frac{UL\rho}{\mu} = \frac{UL}{\nu}$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \nabla_{\underline{x}} v$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{(\nabla_{\underline{x}}) \cdot \underline{v}}$$

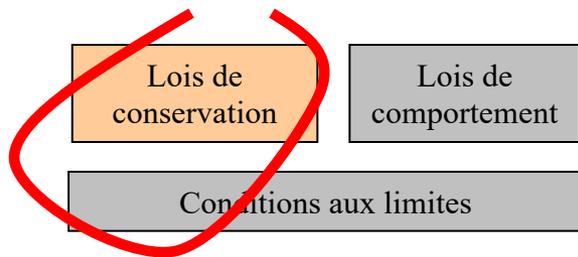
CA C'EST GW

$$\boxed{\underline{v} \cdot (\nabla_{\underline{x}})}$$

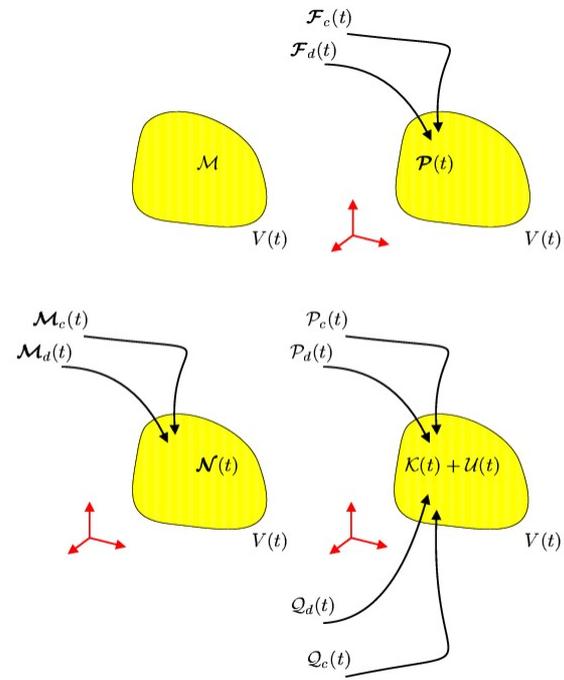
CA C'EST
VL :-)

$$(\underline{v} \cdot \nabla_{\underline{x}}) \underline{v}$$

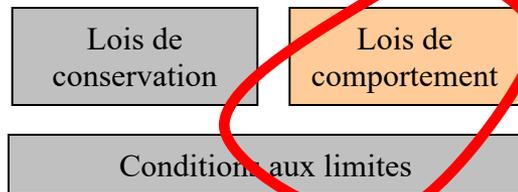
Principes physiques universels !



*Conservation de la masse,
de la quantité de mouvement,
du moment de la quantité de mouvement
et de l'énergie.*



Lois de comportement très approximatives...



$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 3\hat{\kappa}(p, T)\mathbf{d}^s + 2\hat{\mu}(p, T)\mathbf{d}^d,$$

$$\mathbf{q} = -\hat{k}(p, T)\nabla T,$$

Loi de Fourier

$$\begin{aligned}\rho &= \hat{\rho}(p, T), \\ H &= \hat{H}(p, T), \\ S &= \hat{S}(p, T).\end{aligned}$$

$$\frac{(\nabla_{\underline{v}} + \nabla_{\underline{v}^T})}{2}$$

Modèle du fluide visqueux Newtonien

Mécanismes du transfert conductif

Le point de vue microscopique...

On examine le transfert d'énergie entre porteurs du milieu considéré. La fonction de distribution des porteurs est régie par *l'équation de Boltzmann* de la théorie cinétique.

L'énergie se propage du chaud vers le froid


$$\mathbf{q} = -k \nabla T$$

Isolants 10^{-2} W/mK
Métaux 10^2 W/mK

Matériau	$k \text{ (W/mK)}$
eau (à pression atmosphérique)	0.67
cuivre	380
aluminium	260
acier	45

Lois de conservation

Lois de comportement

Conditions aux limites

L'approche phénoménologique...

Un flux thermique dans un corps est lié à l'existence d'un gradient de température. *L'équation de Fourier* relie ces deux grandeurs.

Validité de la loi de Fourier...

$$\mathbf{q} = -k \nabla T$$

L'effet (**le flux de chaleur**) est proportionnel
à la cause (**le gradient de température**)

Toutefois, lorsqu'on observe un déséquilibre thermique initial, il faut un temps très faible, mais fini de l'ordre de grandeur du temps moyen entre collisions pour que les porteurs donnent naissance au flux thermique...

L'absence d'inertie dans l'expression de Fourier conduit à une **vitesse de propagation infinie** dans l'équation de la chaleur (équation parabolique)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = r + \nabla \cdot (k \nabla T)$$

Diffusivité thermique

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = r + \nabla \cdot (k \nabla T)$$


$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{r}{k} + \nabla^2 T$$

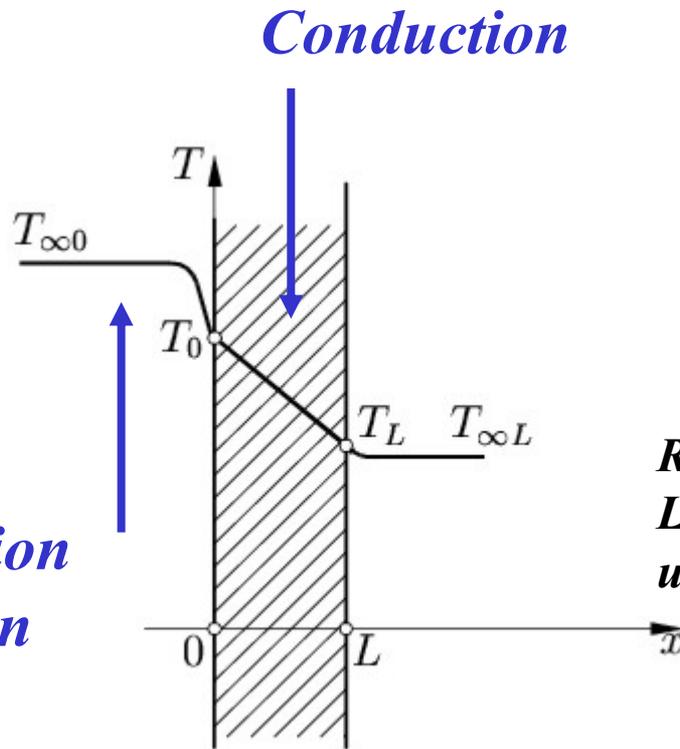
Caractérise la facilité avec laquelle un flux de chaleur transmis à un solide se traduit par un relèvement de température

Matériau	Argent	Cuivre	Acier	Verre
$10^6 \alpha \text{ m}^2/\text{s}$	170	103	12.9	0.59
	9.5 min	16.5 min	2.2 h	2.0 jours

*Milieu semi infini soumis initialement à température nulle
Surface externe mise à 100 degrés.
Temps requis pour avoir 50 degrés à 30 cm*

Conduction dans une plaque soumise à la convection

*Convection
Radiation*



régime permanent



*Radiateur domestique : $h = 15 \text{ W/m}^2\text{K}$
La convection libre et le rayonnement ont
une contribution plus ou moins identique*

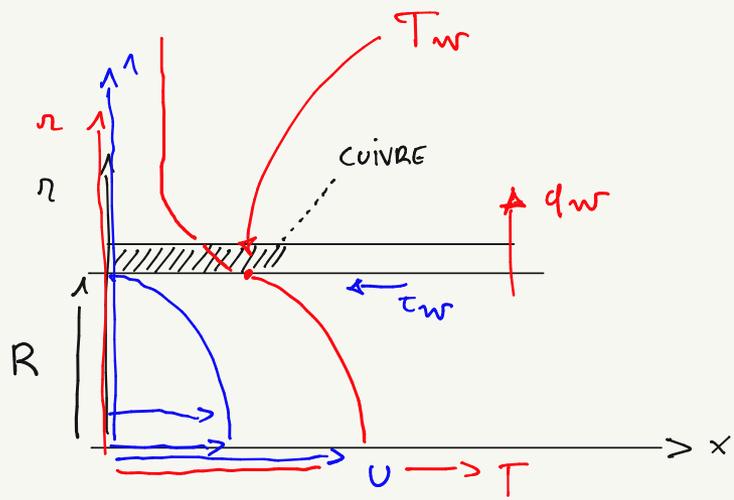
2

ÉCOULEMENT DE L'EAU CHAUDE DANS UN TUYAU :-)

C'EST MARCEL LE PLOMBIER



CHAUFFAGE WINCKY & FILS



2 CAS

- T_w CST
- T_w LINEAIRE

ÉCOULEMENT DANS LE TUYAU

$$u(r) = 2 u_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

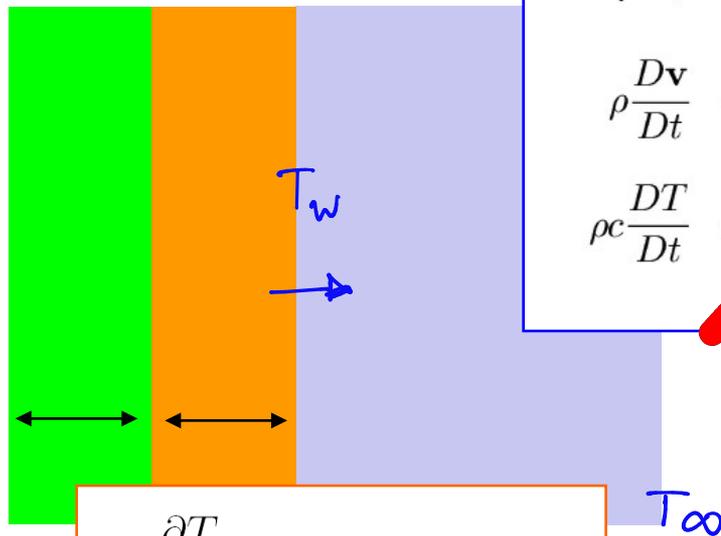
$$\frac{du}{dr}(r) = -\frac{4 u_m}{R} \frac{r}{R}$$

TRANSFERT THERMIQUE ETABLI

$$\frac{\partial}{\partial x} (T_w(x) - T(x, r)) = 0$$

$$\frac{dT_w}{dx} = \frac{\partial T}{\partial x}$$

Un problème
pas aussi élémentaire
que prévu...



~~$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{d}) + \rho \mathbf{g},$$

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \rho \mu (\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + \nabla \cdot (k \nabla T),$$~~

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = r + \nabla \cdot (k \nabla T)$$

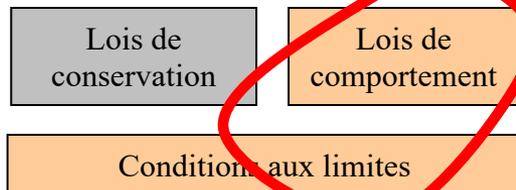
$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -h \Delta T$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = r + \nabla \cdot (k \nabla T)$$

Simplifions-le !

Loi de Newton

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -h\Delta T$$



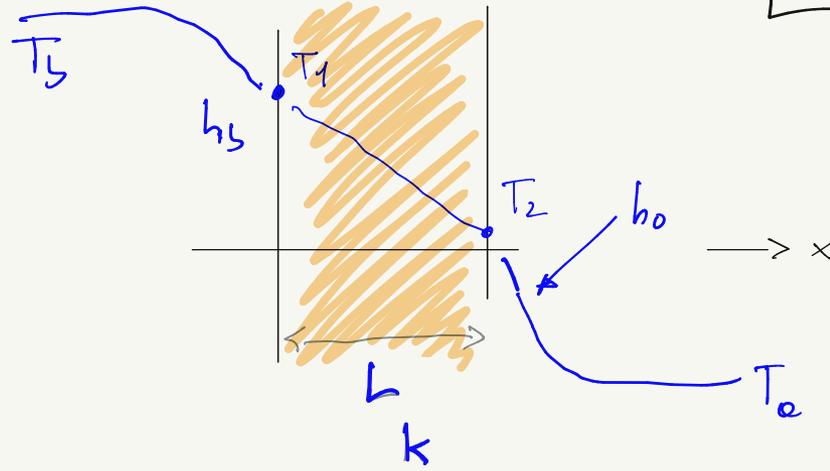
Type de transfert	Fluide	$h(W/m^2K)$
Convection forcée	gaz	10...300
	liquide aqueux	500...12000
	huile	50...1700
	métal liquide	6000...110000
Convection naturelle	gaz	5...30
	liquide aqueux	100...1000
Changement de phase	eau, ébullition	3000...60000
	eau, condensation	5000...110000

3

DANS LA PAROI !

$$k \frac{dT}{dx^2} = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \Rightarrow q = \text{cst}$$



NEWTON

$$q = h \Delta T$$

$$q = -k \frac{dT}{dx}$$

FOURIER

$q = \text{CST} :-)$

- $q = h_a (T_a - T_1)$
- $q = k \left(\frac{T_1 - T_2}{L} \right)$
- $q = h_b (T_2 - T_b)$

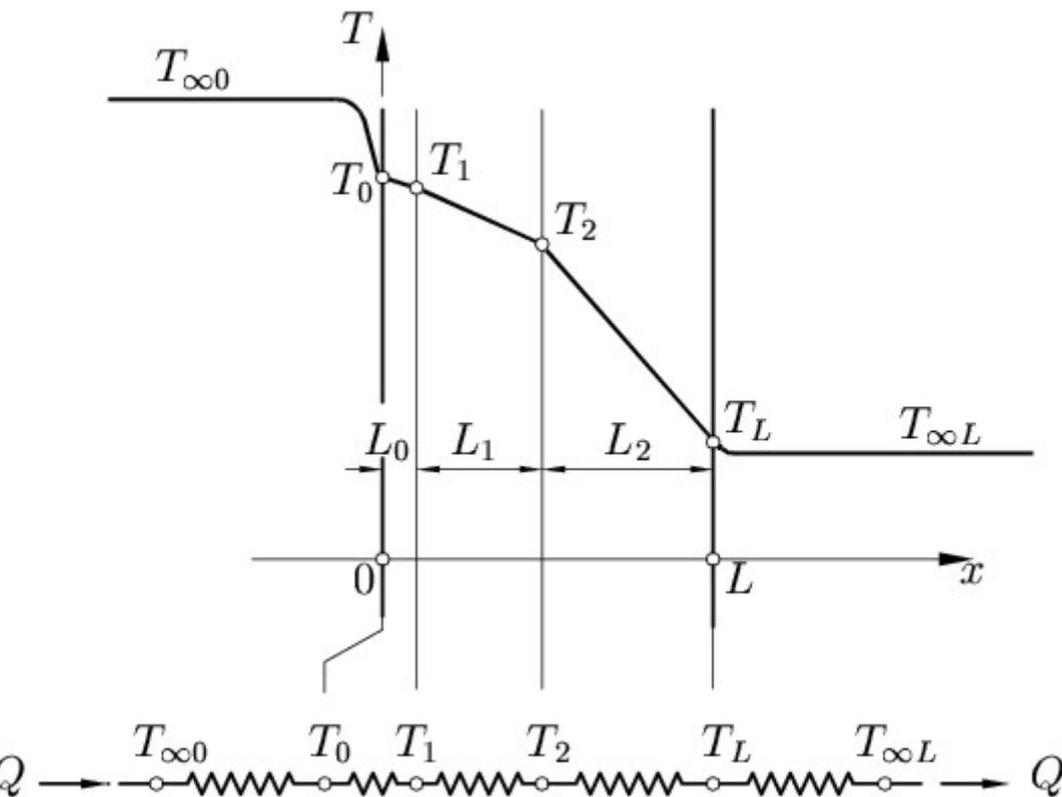
$$T_a - T_1 = \frac{q}{h_a}$$

$$T_1 - T_2 = \frac{qL}{k}$$

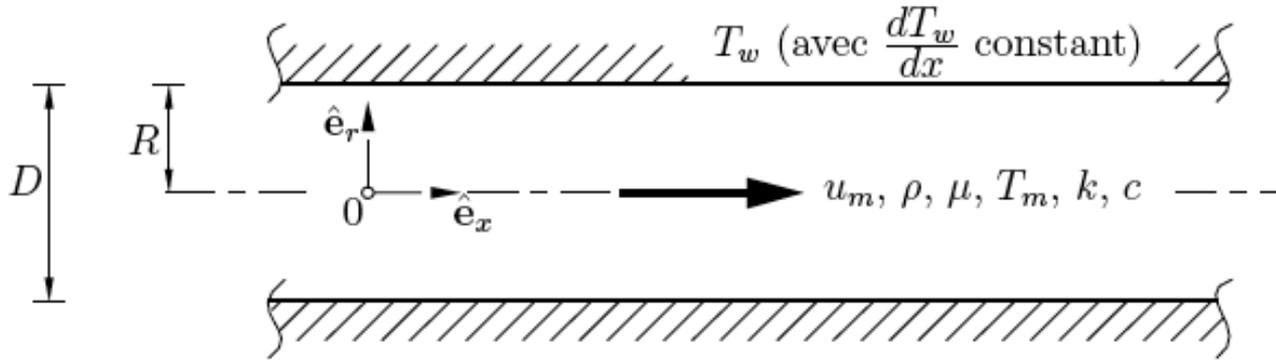
$$T_2 - T_b = \frac{q}{h_b}$$

$$(T_a - T_b) = \left[\frac{1}{h_a} + \frac{L}{k} + \frac{1}{h_b} \right] q$$

Conduction dans une plaque soumise à la convection



analogie avec l'électricité
- résistance convective
- résistance conductive

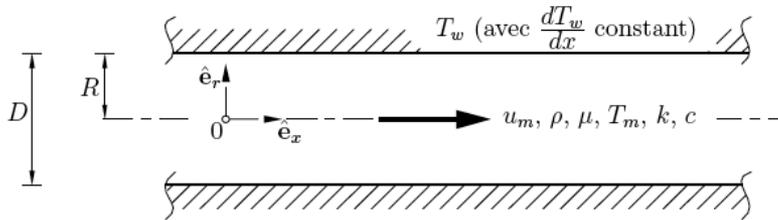


$$\frac{\partial}{\partial x} (T - T_w) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_w}{dx}$$

Transfert de chaleur établi

L'écoulement est établi lorsque le profil de la différence de températures du fluide et de la paroi reste constante le long de l'axe de la conduite !

Cela suppose que l'écoulement est établi !

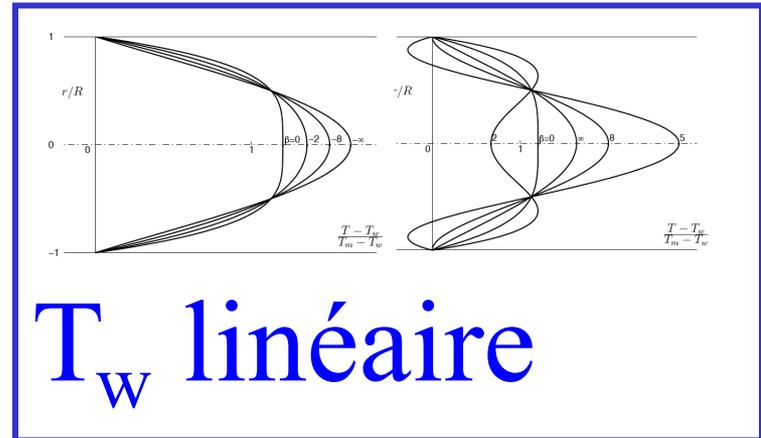


T_w constante

Si T_w constante...

$$\rho c \frac{dT_w}{dx} 2 u_m \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) = k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} (T - T_w) \right) + 16 \mu \frac{u_m^2}{R^2} \left(\frac{r}{R} \right)^2$$

Deux cas particuliers



T_w linéaire

4 DANS LE TUYAU...

$$\underbrace{\rho c v \frac{\partial T}{\partial x}}_{\text{CHALEUR TRANSPORTÉE}} = \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right)}_{\text{DIFFUSION}} + \underbrace{\mu \left(\frac{dv}{dr} \right)^2}_{\text{DISSIPATION VISQUEUSE}}$$

CAS 1
 $T_w = \text{cte}$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{4v_m}{R} \frac{r}{R}$$

$$2 \rho c v_m \frac{dT_w}{dx} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) = k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r k \frac{dT}{dr} \right] + \frac{16 \mu v_m^2}{R^2} \frac{r^2}{R^2}$$

$$k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -16 \mu v_m^2 \frac{r^2}{R^4}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{16 \mu v_m^2}{k} \frac{r^3}{R^4}$$

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{4 \mu v_m^2}{k} \frac{r^4}{R^4} + A$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{4 \mu v_m^2}{k} \frac{r^3}{R^4} + \frac{A}{r}$$

$$T(r) = -\frac{\mu v_m^2}{k} \frac{r^4}{R^4} + A \log(r) + B$$

$$T - T_w = \frac{\mu v_m^2}{k} (1 - \eta^4)$$

$$\eta = \frac{r}{R}$$

CAS 2
 $\frac{dT_w}{dx} = \text{const}$

$$2 \rho c v_m \frac{dT_w}{dx} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r k \frac{dT}{dr} \right] + \frac{16 \mu v_m^2}{R^2} \frac{r}{R^2}$$

$$k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -16 \mu v_m^2 \frac{r^2}{R^4} + 2 \rho c v_m \frac{dT_w}{dx} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{16 \mu v_m^2}{k} \frac{r^3}{R^4} + 2 \rho c v_m \frac{dT_w}{dx} \left(1 - \frac{r^3}{R^2}\right)$$

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{4 \mu v_m^2}{k} \frac{r^4}{R^4} + A + \dots \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right)$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{4 \mu v_m^2}{k} \frac{r^3}{R^4} + \frac{A}{r} + \dots \left(\frac{r}{2} - \frac{r^3}{4R^2}\right)$$

$$T(r) = -\frac{\mu v_m^2}{k} \frac{r^4}{R^4} + A \log(r) + B + \dots \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16R^2}\right)$$

$$T - T_w = \frac{\mu v_m^2}{k} (1 - \eta^4) - \frac{2 \rho c v_m}{k} \frac{dT_w}{dx} \frac{R^2}{16} (\eta^4 - 4\eta^2 + 3)$$

$$\left[\frac{kg}{m^2} \right] \left[\frac{m^2}{s^2} \right] \left[\frac{mK}{W} \right]$$

$$\frac{\mu v_m^2}{k} \frac{\beta}{8}$$

$$\left[\frac{\cancel{kg} \cancel{m^2}}{\cancel{m} \cancel{s^2}} \frac{\cancel{m} \cancel{K}}{\cancel{W}} \right]$$

$$\beta \approx \rho c \frac{dT_w}{dx} \frac{R^2}{v_m \mu}$$

$$T - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right)$$

T_w constante

Si T_w constante...

$$\rho c \frac{dT_w}{dx} 2 u_m \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) = k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} (T - T_w) \right) + 16 \mu \frac{u_m^2}{R^2} \left(\frac{r}{R} \right)^2$$

$$T - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right) - \frac{1}{8} \frac{\rho c}{k} \frac{dT_w}{dx} u_m R^2 \left(3 - 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right)$$

T_w linéaire

Un nombre adimensionnel
qui mesure le rapport
entre deux effets !

$$\beta = \rho c \frac{dT_w}{dx} \frac{R^2}{\mu u_m}$$

$$T - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k} \left[\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right) - \frac{1}{8} \beta \left(3 - 4 \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^4\right) \right]$$

*Effets de dissipation visqueuse
Transformation d'énergie*

*Effets de convection
Transport de l'énergie*

Le petit frère de Reynolds : Péclet

*Effets de conduction
Diffusion de l'énergie*

$$\rho c(\mathbf{v} \cdot \nabla)T = 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + k\nabla^2 T$$

$\mathcal{O}(\rho c U \Delta T / L)$ $\mathcal{O}(k \Delta T / L^2)$

*Effets de convection
Transport de l'énergie*

$$Pe = \frac{\text{Energie transportée}}{\text{Energie diffusée}} = \frac{\rho c U \Delta T / L}{k \Delta T / L^2} = \frac{\rho c U L}{k}$$

Oui : c'est bien le petit frère !

*Effets visqueux
Diffusion de la quantité
de mouvement*

$$\boxed{\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}} = -\nabla p + \boxed{\mu \nabla^2 \mathbf{v}}$$

$\mathcal{O}(\rho U^2/L)$ $\mathcal{O}(\mu U/L^2)$

*Effets d'inertie
Transport de la quantité
de mouvement*

$$Re = \frac{\boxed{\text{Forces d'inertie}}}{\boxed{\text{Forces visqueuses}}} = \frac{\rho U^2/L}{\mu U/L^2} = \frac{\rho U L}{\mu}$$

Nombre de Péclet

caractérise le transfert de chaleur d'un écoulement d'un fluide !

$$Pe = \frac{\rho_0 u_0 L c_p}{k}$$



Born: 10 Feb 1793 in Besancon, France

Died: 6 Dec 1857 in Paris, France

Puissance
transportée

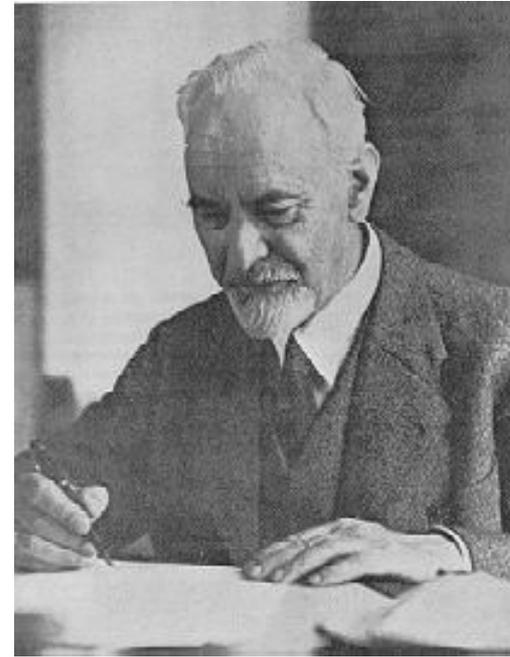
Puissance
diffusée

à savoir !

Nombre de Prandtl

$$Pr = \frac{\mu C_p}{k}$$

caractérise un fluide !



Born: 1875 in Freising, Germany

Died: 1953 in Gottingen, Germany

Peclet = Effets de convection / effets de conduction

Reynold = Effets d'inertie / effets de viscosité

à savoir !

Une grande famille !

*Effets de conduction
Diffusion de l'énergie*

$$\boxed{\rho c(\mathbf{v} \cdot \nabla)T} = \boxed{2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) - r} + \boxed{k\nabla^2 T}$$

$$\mathcal{O}(\rho c U \Delta T / L) \quad \mathcal{O}(\mu U^2 / L^2) \quad \mathcal{O}(k \Delta T / L^2)$$

*Effets de convection
Transport de l'énergie*

*Effets de dissipation visqueuse
Transformation d'énergie*

$$Pe = \frac{\text{■}}{\text{■}} \quad Pr \quad Ec = \frac{\text{■}}{\text{■}} \quad \beta = \frac{Re}{Ec} = \frac{\text{■}}{\text{■}}$$

$$Ec = \frac{\text{Energie cinétique}}{\text{Energie interne}} = \frac{\rho U^2}{\rho c \Delta T} = \frac{U^2}{c \Delta T}$$

Nombre d'Eckert

$$Ec = \frac{u_e^2}{c(T_w - T_e)}$$

caractérise un écoulement
d'un fluide !

Energie cinétique

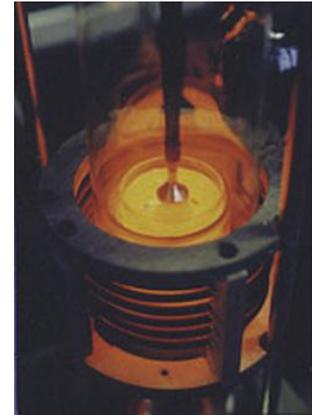
Energie interne



Picture was taken on August 22, 2000

Transferts de chaleur stationnaires

$$\rho c(\mathbf{v} \cdot \nabla)T = 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + k\nabla^2 T$$



Nombre de Reynolds : Re

Nombre de Péclet : Pe

Nombre de Prandtl : Pr

Nombre d'Eckert : Ec

Nombre de Nusselt : Nu

Nombre de Biot : Bi

Coeff de frottement : C_f

Nombre de Stanton : St

Pertes de charges : λ

Nombre de Nusselt

$$Nu = \frac{q_w}{k\Delta T/2R}$$

caractérise une condition d'interface !



Born: 25 Nov 1882 in Nurnberg, Germany

Died: 1 Sep 1957 in Munchen, Germany

Flux de chaleur à la paroi

Flux de chaleur diffusé dans l'écoulement

Nombre de Biot

$$Bi = \frac{q_w}{k\Delta T/L}$$

caractérise une condition d'interface !



Born: 21 April 1774, Paris, France

Died: 3 Feb 1862, Paris, France

Flux de chaleur à la paroi

Flux de chaleur diffusé dans le solide

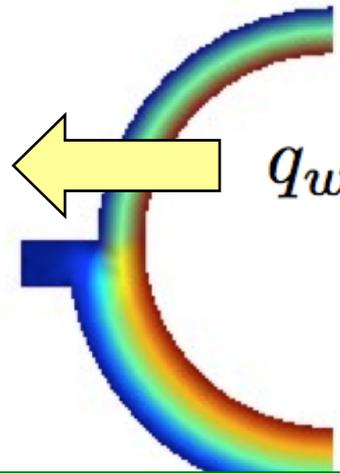
Le Nusselt et le Biot de l'ex-tuyau en plomb de ma salle de bain :-)



$$Nu = \frac{q_w}{k\Delta T/2R}$$

Écoulement de l'air
dans la salle de bain

Flux conductif de l'air !



Écoulement de l'eau dans le tuyau !

Flux conductif de l'eau chaude

$$Nu = \frac{q_w}{k\Delta T/2R}$$

$$Bi = \frac{q_w}{k\Delta T/L}$$

Conduction thermique dans
le tuyau : tension thermiques (thermoélasticité !)

Flux conductif dans le plomb