Et le thermique…

Ecoulement incompressible d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants.

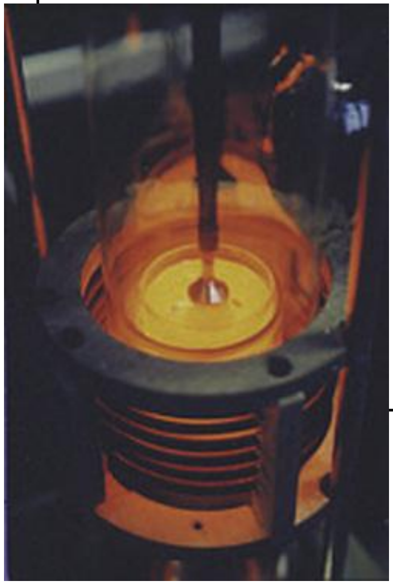
Les équations de continuité et de quantité de mouvement ne font pas intervenir la température : on peut résoudre la dynamique de l'écoulement sans tenir compte des aspects thermiques !

Etape 1

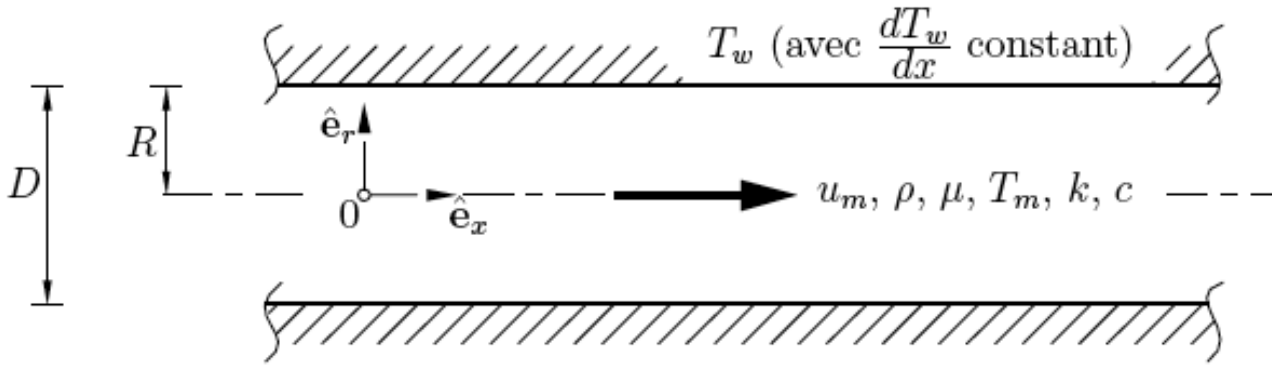
$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}, \end{aligned}$$

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + k\nabla^2 T,$$

Etape 2



Une fois la dynamique de l'écoulement connue, on peut ensuite résoudre le problème thermique…

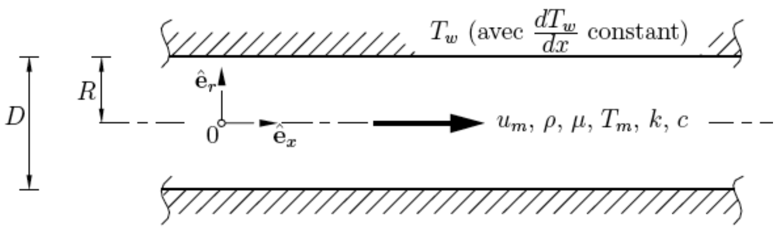


$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}(T - T_w) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_w}{dx}}$$

Transfert de chaleur établi

L'écoulement est établi lorsque le profil de la différence de températures du fluide et de la paroi reste constante le long de l'axe de la coonduite !

Cela suppose que l'écoulement est établi !

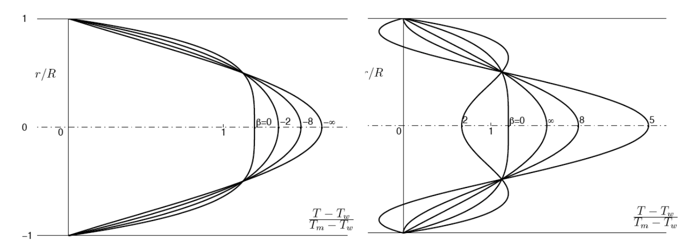


T_w constante

Si T_w constante…

$$\rho\, c\, \frac{dT_w}{dx}\, 2\, u_m \cancel{\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)} = k\,\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\left(T-T_w\right)\right) + 16\,\mu\frac{{u_m}^2}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Deux cas particuliers



T_w linéaire

$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)$$

T_w constante

Si T_w constante…

$$\rho\, c\, \frac{dT_w}{dx}\, 2\, u_m \cancel{\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)} = k\, \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{d}{dr}\left(T - T_w\right)\right) + 16\, \mu \frac{{u_m}^2}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right) - \frac{1}{8}\,\frac{\rho\, c}{k}\,\frac{dT_w}{dx}\, u_m\, R^2 \left(3 - 4\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)$$

T_w linéaire

Un nombre adimensionnel qui mesure le rapport entre deux effets !

$$\beta = \rho\, c\, \frac{dT_w}{dx}\, \frac{R^2}{\mu\, u_m}$$

$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left[\boxed{\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)} - \frac{1}{8}\,\beta\, \boxed{\left(3 - 4\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)}\right]$$

Effets de dissipation visqueuse
Transformation d'énergie

Effets de convection
Transport de l'énergie

$\boxed{1}$ LE PETIT FRERE DE Re : PECLET :-)

$\mathcal{O}(\rho U^2/L)$

$\mathcal{O}(\mu U/L^2)$

TRANSPORT DE QUANTITE DE MVT

DIFFUSION DE QUANTITE DE MVT

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad \rho(\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{\nabla})\underset{\sim}{v} = \mu \underset{\sim}{\nabla}^2 \underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{\nabla} p$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} \qquad \rho c(\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{\nabla})T = 2\mu\, \underset{\approx}{d} : \underset{\approx}{d} + k \underset{\sim}{\nabla}^2 T$$

TRANSPORT DE PUISSANCE

$\mathcal{O}(\rho c U \Delta T/L)$

DIFFUSION DE PUISSANCE

$\mathcal{O}(k \Delta T/L^2)$

$$Re = \frac{\blacksquare}{\blacksquare} = \frac{\rho U^2/L}{\mu U/L^2} = \rho\frac{UL}{\mu}$$

$$Pe = \frac{\blacksquare}{\blacksquare} = \frac{\rho c U \Delta T/L}{k \Delta T/L^2} = \rho c\frac{UL}{k}$$

$$Pr = \frac{Pe}{Re} = \frac{\mu c}{k} = \frac{\nu}{\alpha}$$

Le petit frère de Reynolds : Péclet

Effets de conduction
Diffusion de l'énergie

$$\boxed{\rho c(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})T} = 2\mu(\mathbf{d}:\mathbf{d}) + r + \boxed{k\boldsymbol{\nabla}^2 T}$$

$$\mathcal{O}(\rho c U \Delta T/L) \qquad\qquad \mathcal{O}(k\Delta T/L^2)$$

Effets de convection
Transport de l'énergie

$$Pe = \frac{\boxed{\text{Energie transportée}}}{\boxed{\text{Energie diffusée}}} = \frac{\rho c U \Delta T/L}{k\Delta T/L^2} = \frac{\rho c U L}{k}$$

Oui : c'est bien le petit frère !

Effets visqueux
Diffusion de la quantité de mouvement

$$\boxed{\rho(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} \quad \mathcal{O}(\rho U^2/L)} = -\boldsymbol{\nabla} p + \boxed{\mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{v} \quad \mathcal{O}(\mu U/L^2)}$$

Effets d'inertie
Transport de la quantité de mouvementc

$$Re = \frac{\boxed{\text{Forces d'inertie}}}{\boxed{\text{Forces visqueuses}}} = \frac{\rho U^2/L}{\mu U/L^2} = \frac{\rho U L}{\mu}$$

Nombre de Péclet

caractérise le transfert de chaleur d'un écoulement d'un fluide !

$$Pe = \frac{\rho_0 u_0 L c_p}{k}$$

Born: 10 Feb 1793 in Besancon, France

Died: 6 Dec 1857 in Paris, France

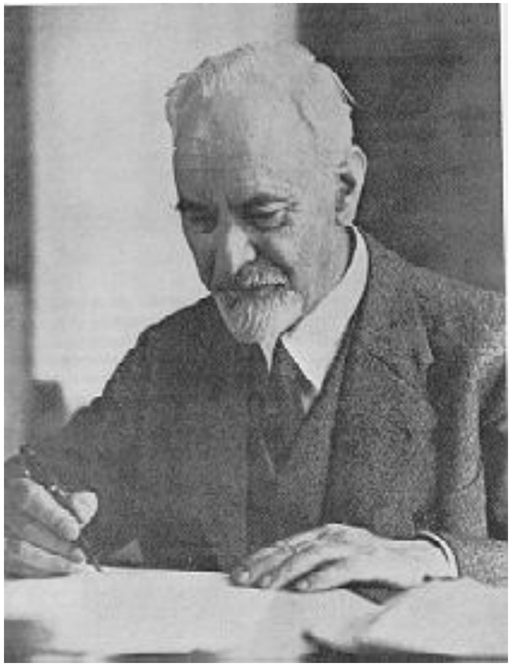
$$\frac{\text{Puissance transportée}}{\text{Puissance diffusée}}$$

à savoir !

Nombre de Prandtl

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k}$$

caractérise un fluide !



Born: 1875 in Freising, Germany

Died: 1953 in Gottingen, Germany

$$\frac{\text{Peclet} = \text{Effets de convection / effets de conduction}}{\text{Reynold} = \text{Effets d'inertie / effets de viscosité}}$$

à savoir !

Une grande famille !

Effets de conduction
Diffusion de l'énergie

$$\boxed{\underset{\mathcal{O}(\rho c U \Delta T/L)}{\rho c(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})T}} = \boxed{\underset{\mathcal{O}(\mu U^2/L^2)}{2\mu(\mathbf{d}:\mathbf{d})}} + r + \boxed{\underset{\mathcal{O}(k\Delta T/L^2)}{k\boldsymbol{\nabla}^2 T}}$$

Effets de convection
Transport de l'énergie

Effets de dissipation visqueuse
Transformation d'énergie

$$Pe = \frac{\blacksquare}{\blacksquare} \qquad Pr\ Ec = \frac{\blacksquare}{\blacksquare} \qquad \beta = \frac{Re}{Ec} = \frac{\blacksquare}{\blacksquare}$$

$$Ec = \frac{\text{Energie cinétique}}{\text{Energie interne}} = \frac{\rho U^2}{\rho c \Delta T} = \frac{U^2}{c\Delta T}$$

$\boxed{2}$ $\beta = \rho c \dfrac{dT_w}{dx} \dfrac{R^2}{\mu U_m}$

DIFFUSION

$$\rho c \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{\nabla} T = 2\mu \underset{=}{d} : \underset{=}{d} + k \underset{\sim}{\nabla}^2 T$$

TRANSPORT

DISSIPATION VISQUEUSE

• $\beta = 0$	PAS DE CHALEUR TRANSPORTEE	$\dfrac{dT_w}{dx} = 0$
• $\beta \to \infty$	PAS DE DISSIPATION VISQUEUSE	$\dfrac{dT_w}{dx} \neq 0$

$$\eta = \frac{r}{R}$$

$$u = 2U_m(1-\eta^2)$$

$$T - T_w = \frac{\mu U_m^2}{k}\left[(1-\eta^4) - \frac{\beta}{8}(3 - 4\eta^2 + \eta^4)\right]$$

$$\beta = \rho c \frac{dT_w}{dx} \frac{R^2}{\mu U_m}$$

TRANSPORT DE QUANTITÉ DE MVT

$\rho U^2/L$

DIFFUSION DE QUANTITÉ DE MVT

$$\rho(\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{\nabla})\underset{\sim}{v} = \mu \underset{\sim}{\nabla}^2 \underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{\nabla} p$$

$$\rho c(\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{\nabla})T = 2\mu\, \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}} + k \underset{\sim}{\nabla}^2 T$$

DIFFUSION DE PUISSANCE

$\mu U^2/L^2$

TRANSPORT DE PUISSANCE

$\rho c U \Delta T/L$

$\rho c U \Delta T/L$

$$\frac{\;}{\;} = P_r E_c = \frac{\mu U^2}{k \Delta T}$$

$$\frac{\;}{\;} = \frac{R_e}{E_c} = \beta$$

$\mu U^2/L^2$

$$E_c = \frac{\overbrace{\rho U^2/L}^{\text{FORCE}}\ \overset{\text{VITESSE}}{U}}{\underbrace{\rho c U \Delta T/L}_{\text{PUISSANCE}}} = \frac{U^2}{c\Delta T} = \frac{\text{ENERGIE CINETIQUE}}{\text{ENERGIE INTERNE}}$$

$$\underbrace{\frac{\rho c U \Delta T}{L}\ \frac{L^2}{\mu U^2}}_{\frac{\rho c \Delta T L}{\mu U}}$$

Nombre d'Eckert

$$Ec = \frac{u_e^2}{c(T_w - T_e)}$$

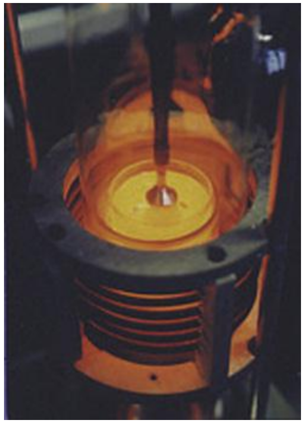
Picture was taken on August 22, 2000

caractérise un écoulement d'un fluide !

$$\frac{\textbf{Energie cinétique}}{\textbf{Energie interne}}$$

Transferts de chaleur stationnaires

$$\rho c(\mathbf{v}\cdot\nabla)T = 2\mu(\mathbf{d}:\mathbf{d}) + r + k\nabla^2 T$$



$\hat{C}_f = \dfrac{\tau_w}{\mu U/L}$

Nombre de Reynolds : Re

Nombre de Péclet : Pe

Nombre de Prandtl : Pr $= \dfrac{Pe}{Re}$

Nombre d'Eckert : Ec

$C_f = \dfrac{\tau_w}{\rho U^2/2}$

Nombre de Nusselt : Nu

Nombre de Biot : Bi

Coeff de frottement : C_f

Nombre de Stanton : St

$Nu = \dfrac{q_w}{k\Delta T/L}$

Pertes de charges : λ

$St = \dfrac{q_w}{\rho c U \Delta T}$

Nombre de Nusselt

$$Nu = \frac{q_w}{k\Delta T/2R}$$

caractérise une condition d'interface !

Born: 25 Nov 1882 in Nurnberg, Germany

Died: 1 Sep 1957 in Munchen, Germany

Flux de chaleur à la paroi

Flux de chaleur diffusé dans l'écoulement

Nombre de Biot

$$Bi = \frac{q_w}{k\Delta T/L}$$

caractérise une condition d'interface !

Born: 21 April 1774, Paris, France

Died: 3 Feb 1862, Paris, France

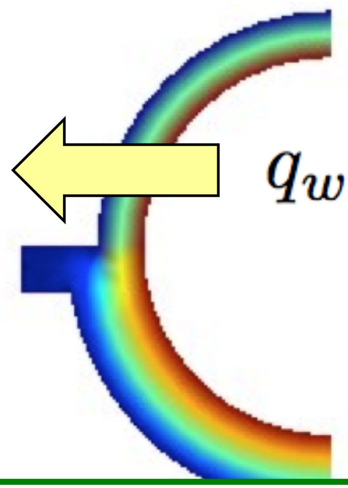
$$\frac{\textbf{Flux de chaleur à la paroi}}{\textbf{Flux de chaleur diffusé dans le solide}}$$

Le Nusselt et le Biot de l'ex-tuyau en plomb de ma salle de bain :-)

$$Nu = \frac{q_w}{k\Delta T/2R}$$

Ecoulement de l'air dans la salle de bain

Flux conductif de l'air !



Ecoulement de l'eau dans le tuyau !

Flux conductif de l'eau chaude

$$Nu = \frac{q_w}{k\Delta T/2R}$$

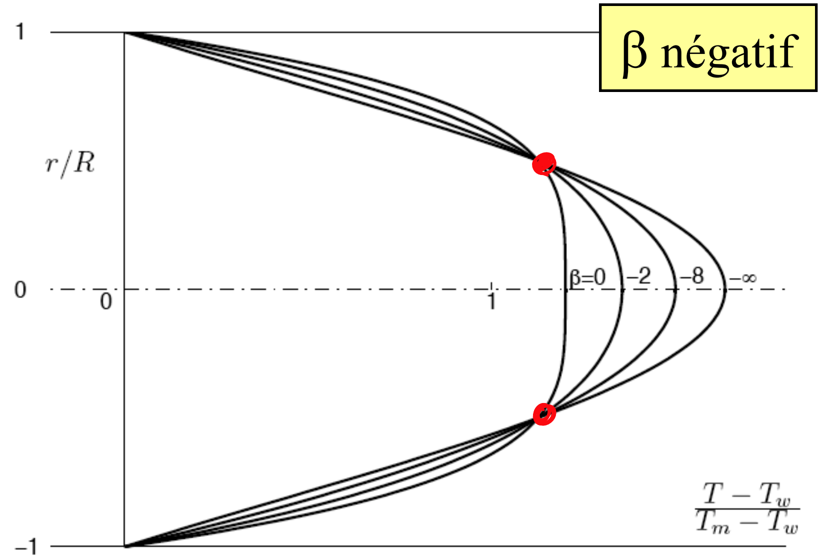
$$Bi = \frac{q_w}{k\Delta T/L}$$

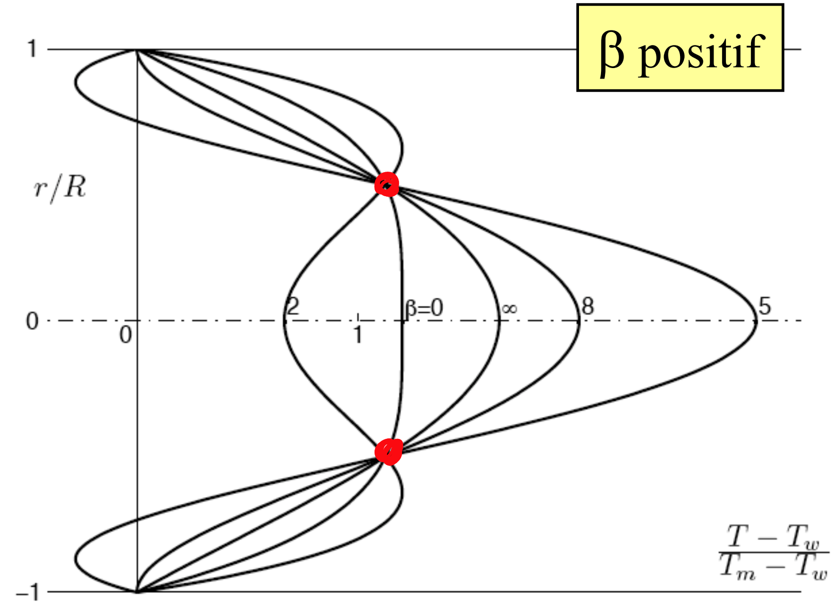
Conduction thermique dans le tuyau : tension thermiques (thermoélasticité !)

Flux conductif dans le plomb

A mi-rayon,
la température
est indépendante
de la valeur
de β !

$$\frac{T-T_w}{T_m-T_w}=\frac{9}{8} \qquad \text{en} \qquad \underbrace{\frac{r}{R}}_{\eta}=\frac{1}{2}$$

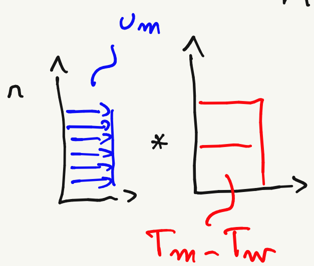




$\boxed{3}$

TEMPERATURE MOYENNE..... QUI N'EST PAS UNE MOYENNE USUELLE :-)

$$\pi R^2 u_m (T_m - T_w) = 2\pi R^2\, 2 u_m \frac{\mu u_m^2}{k} \left[\int_0^1 \overbrace{(1-\eta^2)(1-\eta^4)\,\eta}\, d\eta - \frac{\beta}{8}\int_0^1 \underbrace{(1-\eta^2)}\underbrace{(3-4\eta^2+\eta^4)\,\eta}\, d\eta \right]$$



$$* \; * \; \pi R^2 = \iint$$

$$\int_0^1 \eta - \eta^3 - \eta^5 + \eta^7 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{12-6-4+3}{24} = \frac{5}{24}$$

$$\int_0^1 3\eta - 4\eta^3 + \eta^5 - 3\eta^3 + 4\eta^5 - \eta^7$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{4}{4} + \frac{1}{6} - \frac{3}{4} + \frac{4}{6} - \frac{1}{8}$$

$$= \frac{\underbrace{72-48}_{\vdots\; 32}\underbrace{+8-36}_{48}\underbrace{+32}\underbrace{-6}_{-10}}{48} = \frac{22}{48} = \frac{11}{24}$$

$$u = 2u_m(1-\eta^2)$$

$$T - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k}\left[(1-\eta^4) - \frac{\beta}{8}(3-4\eta^2+\eta^4)\right]$$

Température moyenne

$$u_m \, \pi R^2 \, (T_m - T_w) = 2\pi \, R^2 \, \frac{\mu \, {u_m}^2}{k} \, 2 \, u_m \left[\underbrace{\int_0^1 (1-\eta^2)\,(1-\eta^4)\,\eta \, d\eta}_{=\frac{10}{48}} - \frac{\beta}{8} \underbrace{\int_0^1 (1-\eta^2)\,(3-4\eta^2+\eta^4)\,\eta \, d\eta}_{=\frac{22}{48}} \right]$$

$$T_m - T_w \quad = \quad \frac{\mu \, {u_m}^2}{k} \left[\frac{5}{6} - \frac{11}{48} \beta \right]$$

Cup mixing temperature

Flux de chaleur à la paroi

$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left[\boxed{\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^4\right)} - \frac{1}{8}\beta\, \boxed{\left(3-4\left(\frac{r}{R}\right)^2+\left(\frac{r}{R}\right)^4\right)}\right]$$

$$q_w = -k\left[\frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left[-\left(\frac{4r^3}{R^4}\right)\Big|_{r=R} - \frac{1}{8}\beta\left(-4\left(\frac{2r}{R^2}\right)\Big|_{r=R} + \left(\frac{4r^3}{R^4}\right)\Big|_{r=R}\right)\right]\right]$$

$$q_w = -k\left[\frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left[-\frac{4}{R} - \frac{1}{8}\beta\left(-\frac{8}{R}+\frac{4}{R}\right)\right]\right]$$

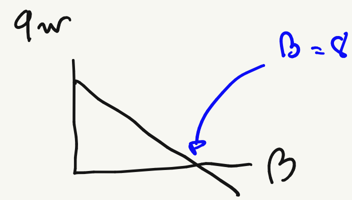
$$q_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{2R}\left(8 - \beta\right)$$

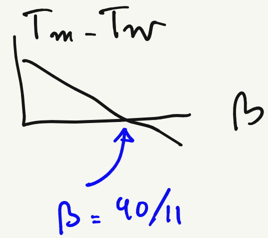
4

FLUX DE CHALEUR DISSIPE ?

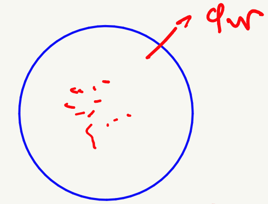
$$q_w = \frac{\mu U_m^2}{2R}\left[8-\beta\right]$$

$$T_m - T_w = \frac{\mu U_m^2}{k}\left[\frac{5}{6} - \frac{11}{48}\beta\right]$$





CAS ADIABATIQUE



$$2\pi R\, q_w = \iint \mu\, \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}}$$

BILAN D'ENERGIE OK

- CONSIDERONS $\beta = 0$

$$q_w = \frac{4\mu U_m^2}{R}$$

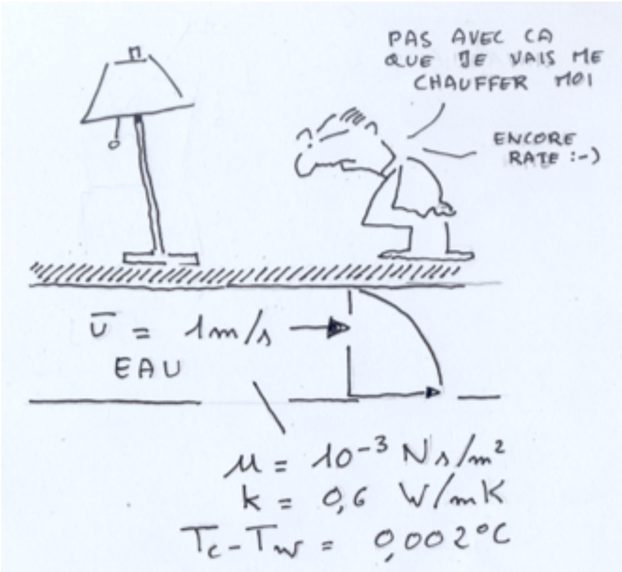
PUISSANCE GENEREE PAR DISSIPATION VISQUEUSE

$$= 2\pi \int_0^R \overbrace{(2U_m)^2 \mu \left(\frac{2r}{R^2}\right)^2}^{\mu\left(\frac{du}{dr}\right)^2} r\, dr$$

$$= 2\pi\, \frac{16\mu U_m^2}{R^4} \underbrace{\int_0^R r^3\, dr}_{\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{R^4}{4}} = \underbrace{2\pi R\, \overbrace{\frac{4\mu U_m^2}{R}}^{q_w}}_{\text{FLUX DE CHALEUR PAR LE MUR :-)}}$$

$$u = 2U_m(1-\eta^2)$$

$$T - T_w = \frac{\mu U_m^2}{k}\left[(1-\eta^4) - \frac{\beta}{8}(3 - 4\eta^2 + \eta^4)\right]$$



$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)$$

$$q_w = -k\,\frac{dT}{dr}\Big|_{r=R} = 4\,\frac{\mu\, {u_m}^2}{R} = 4\,k\,\frac{(T_c - T_w)}{R}$$

C'est la chaleur générée par dissipation visqueuse qui s'échappe par la paroi du tuyau !

Flux de chaleur à la paroi T_w constante

$$\boxed{q_w = -k \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=R} = 4\,\frac{\mu\, {u_m}^2}{R}}$$

Estimation du flux de chaleur à la paroi par rapport aux effets de diffusion !

$$\boxed{T_m - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\;\frac{5}{6}}$$

L'écart de température caractéristique est pris avec la température moyenne !

$$Nu = 4\,\frac{\mu\, {u_m}^2}{R}\;\frac{k}{\mu\, {u_m}^2}\;\frac{6}{5}\;\frac{2R}{k} = \frac{48}{5} = 9.6$$

T_w constante
Nombre de Nusselt

$$q_w = \frac{\mu \, u_m{}^2}{2R}\left(8 - \beta\right)$$

Estimation du flux de chaleur à la paroi
par rapport aux effets de diffusion !

$$T_m - T_w = \frac{\mu \, u_m{}^2}{k}\left[\frac{5}{6} - \frac{11}{48}\beta\right]$$

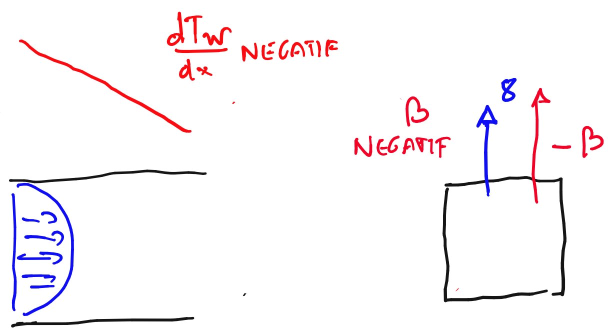
L'écart de température caractéristique est pris avec la température moyenne !

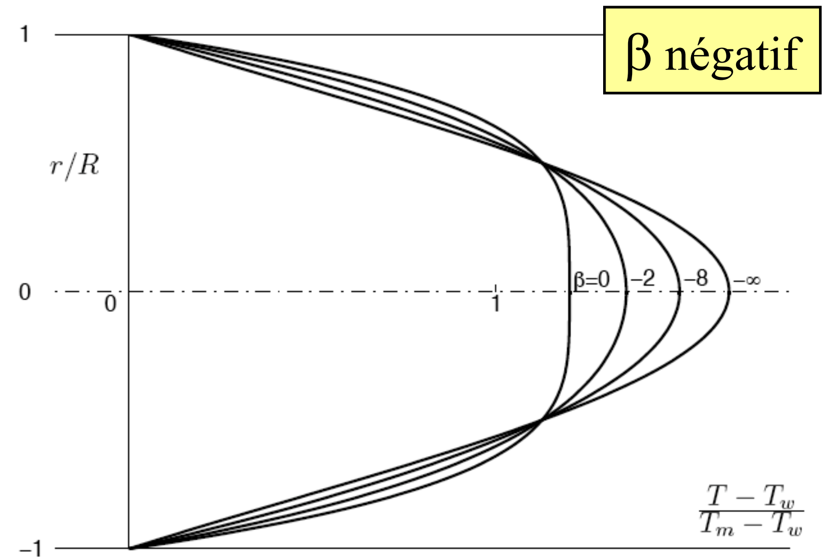
$$Nu = \frac{\left(\ 8 - \beta\ \right)}{\left(\frac{5}{6} - \frac{11}{48}\beta\right)}$$

T_w linéaire
Nombre de Nusselt

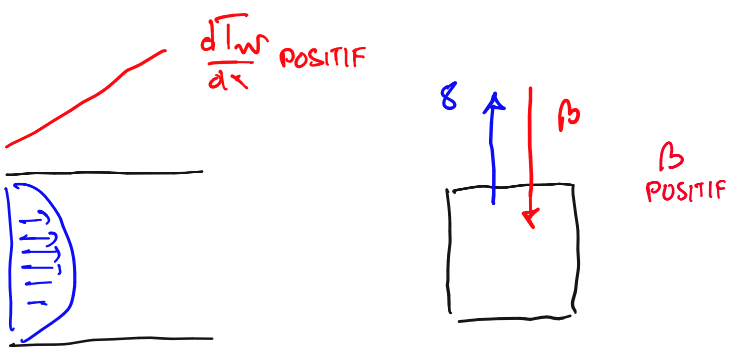
$\boxed{5}$

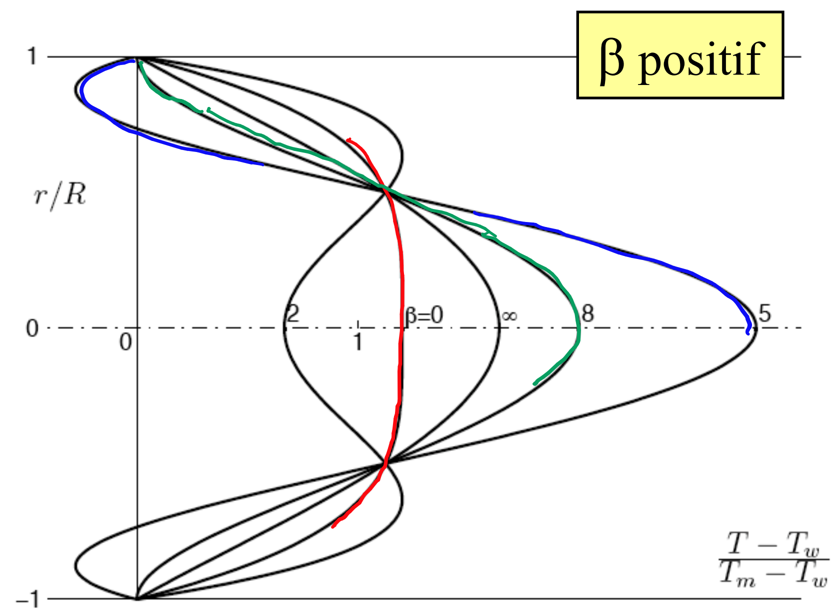
COMPRENDRE LA SOLUTION ANALYTIQUE !





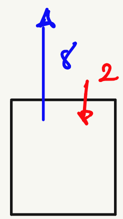
$q_w = (8 - \beta)$



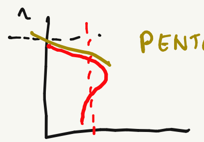


$\boxed{T_w = 0}$

$\beta = 2$

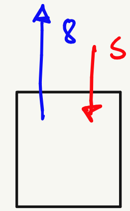


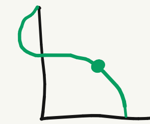
T/Tm



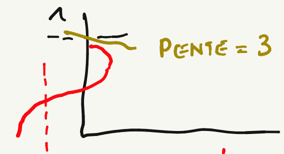
$T_m = 0{,}375$

$\beta = 5$



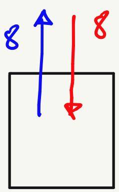


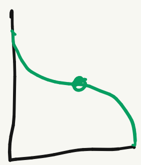
T/Tm } TEMP ADIME



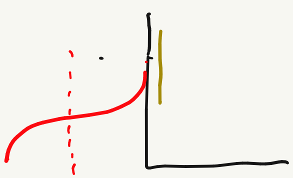
$T_m = -0{,}38$

$\beta = 8$



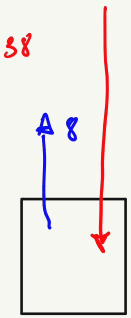


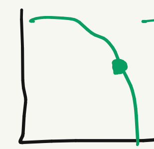
T/Tm



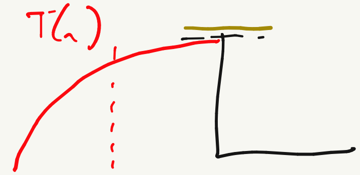
$T_m - 1$

$\beta = \infty$





T/Tm



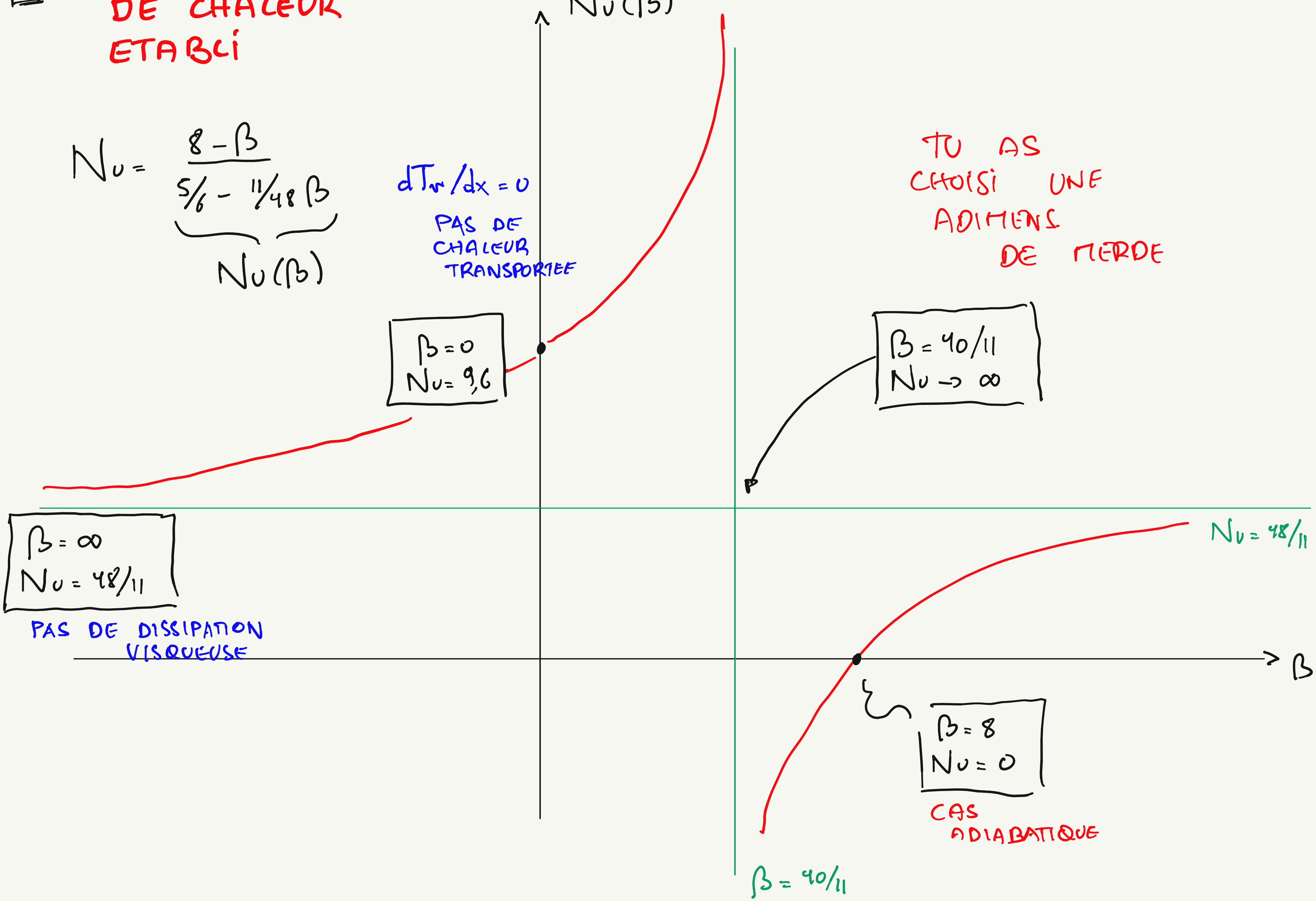
T_m

LE FLUIDE EST CHAUFFE PAR L'EXTERIEUR :-)

$$T_m = \underbrace{C^{!!!}}_{=1}\left(\frac{5}{6} - \frac{11}{48}\beta\right)$$

6 TRANSFERT DE CHALEUR ETABLI

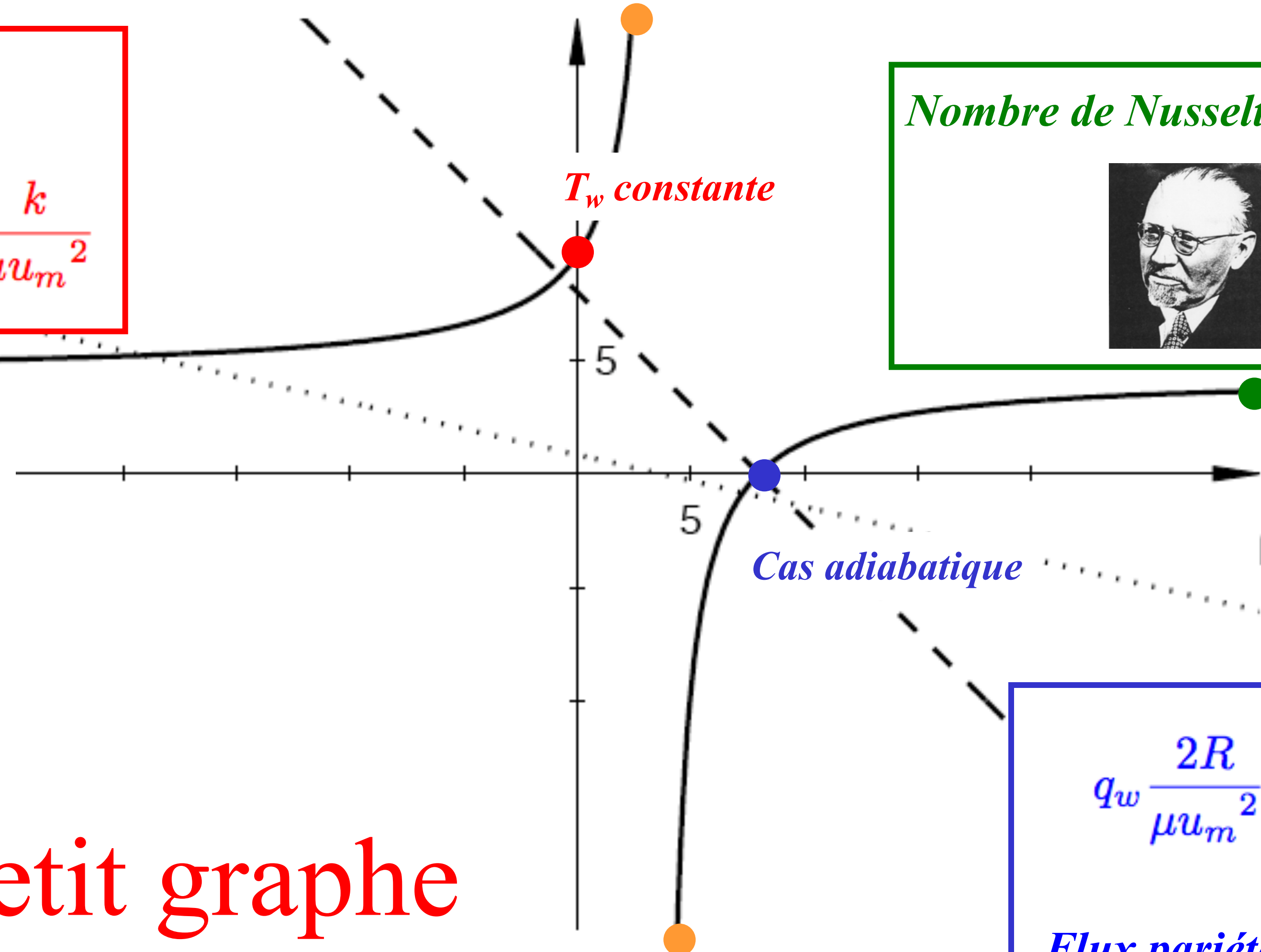
$$Nu = \underbrace{\frac{8-\beta}{5/6 - 11/48\,\beta}}_{Nu(\beta)}$$



Ecart de température

$$(T_m - T_w)\frac{k}{\mu {u_m}^2}$$

Pas de dissipation visqueuse



Nombre de Nusselt

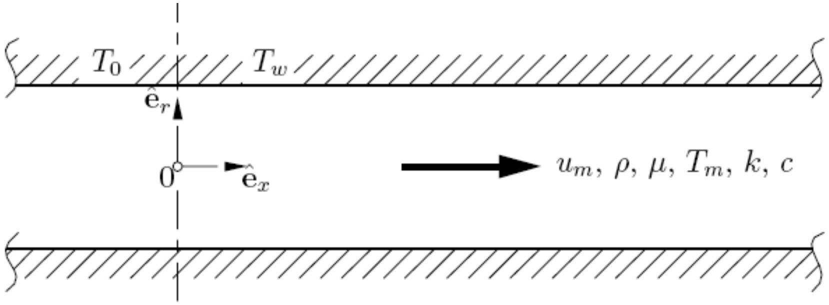
Adimensionnalisation inadéquate !

$$q_w \frac{2R}{\mu {u_m}^2}$$

Flux pariétal

Un petit graphe récapitulatif !

Transfert non-établi dans un écoulement établi…

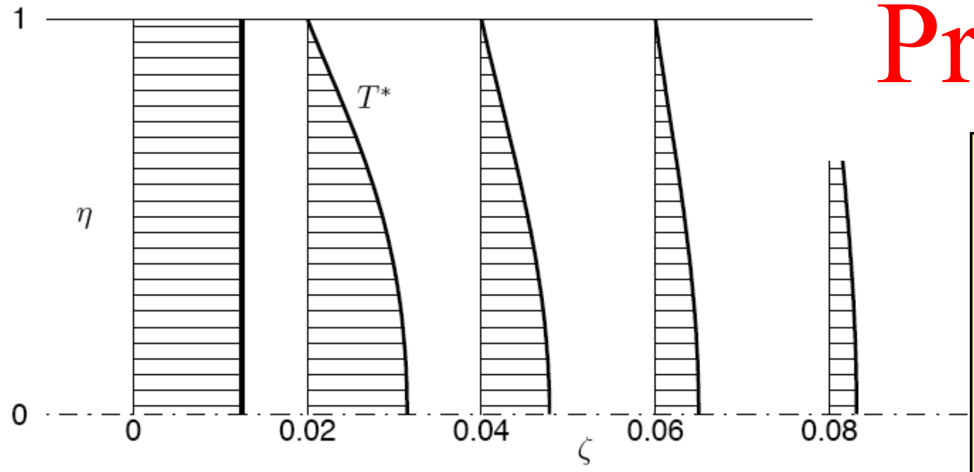


$$\rho\, c\, u\, \frac{\partial T}{\partial x} = k\, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\, \frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

Transfert thermique stationnaire dans un écoulement établi d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants, sans dissipation visqueuse et diffusion axiale

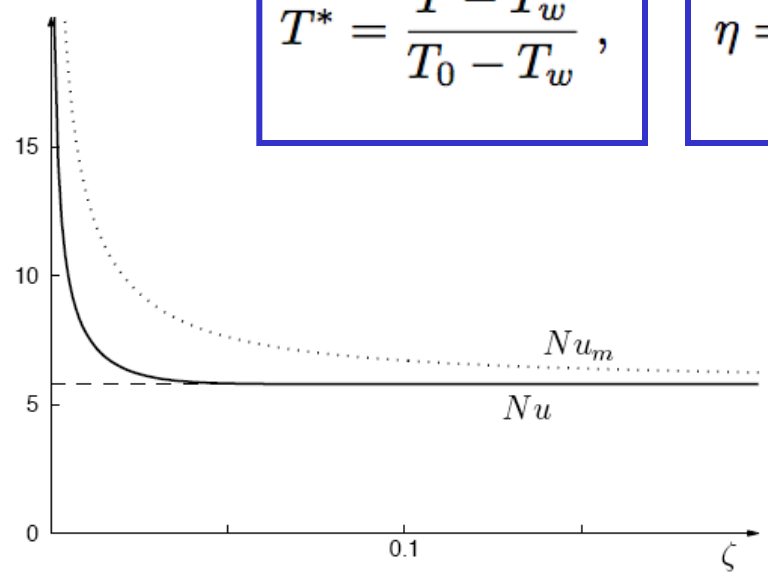
Ecoulement de Hagen-Poiseuille : problème de Poiseuille (1885)
Ecoulement bouchon : problème de Grätz (1883)

Problème de Grätz



Transfert thermique stationnaire dans un écoulement établi d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants, sans dissipation visqueuse et sans diffusion axiale

Ecoulement bouchon



$$T^* = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w} \,,$$

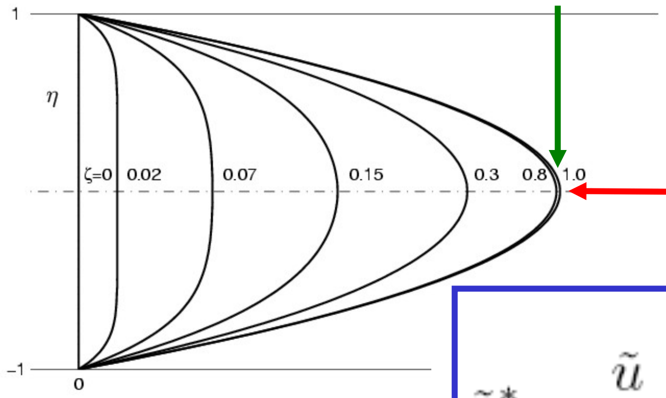
$$\eta = \frac{r}{R} \,,$$

$$\zeta = \frac{\alpha\ x}{u_m R^2} = \frac{\alpha}{u_m R}\,\frac{x}{R} = \frac{1}{Pe}\,\frac{x}{R} \,,$$

La coordonnée horizontale est relié à la vitesse par le temps de diffusion caractéristique !

Beaucoup d'algèbre inutile !
Seul, le choix de l'adimensionnalisation est vraiment utile à retenir !

$$\boxed{\zeta_{c,0.95} = \frac{\nu\, t_{c.95}}{R^2} \approx 0.536}$$



$$\boxed{\zeta_{c,0.99} = \frac{\nu\, t_{c.99}}{R^2} \approx 0.814}$$

$$\boxed{\tilde{u}^* = \frac{\tilde{u}}{u_c}\ ,} \qquad \boxed{\eta = \frac{r}{R}\ ,} \qquad \boxed{\zeta = \frac{\nu\, t}{R^2}\ ,}$$

Adimensionalisation du temps sur base de la viscosité qui est l'unique donnée contenant une unité de temps !

En ζ=1, on a un écoulement de régime

$$u(r,t) \; = \; \underbrace{u_c\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)}_{u(r,t\to\infty)} - \tilde{u}(r,t)$$

Même approche pour le démarrage d'un écoulement !

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}^*}{\partial \zeta} = \dfrac{1}{\eta}\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta \dfrac{\partial \tilde{u}^*}{\partial \eta}\right) \\ \tilde{u}^*(\eta, 0) = 1 - \eta^2 \\ \tilde{u}^*(1, \zeta) = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{u}^*(\eta,\zeta) = f(\eta) g(\zeta)$$

$$f\frac{dg}{d\zeta} = \frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{df}{d\eta}\right) g$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{g}\frac{dg}{d\zeta} = \frac{1}{\eta f}\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{df}{d\eta}\right) = -\lambda^2$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dg}{d\zeta} + \lambda^2 g = 0 \qquad g(\zeta) = A e^{-\lambda^2 \zeta}$$

$$\eta\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{df}{d\eta} + \lambda^2 \eta f = 0 \qquad f(\eta) = B J_0(\lambda\eta) + \cancel{C Y_0(\lambda\eta)}$$

Solutions obtenues par la technique de séparation de variables

(i)

(ii)

$$\tilde{u}^*(1,\zeta) = 0$$

$$\downarrow$$

$$J_0(\lambda_n) = 0$$

Condition à la paroi

$$\tilde{u}^*(\eta, 0) = (1-\eta^2)$$

$$\downarrow$$

$$(1-\eta^2) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n \eta)$$

$$8 = C_n \lambda_n^3 J_1(\lambda_n)$$

Condition initiale

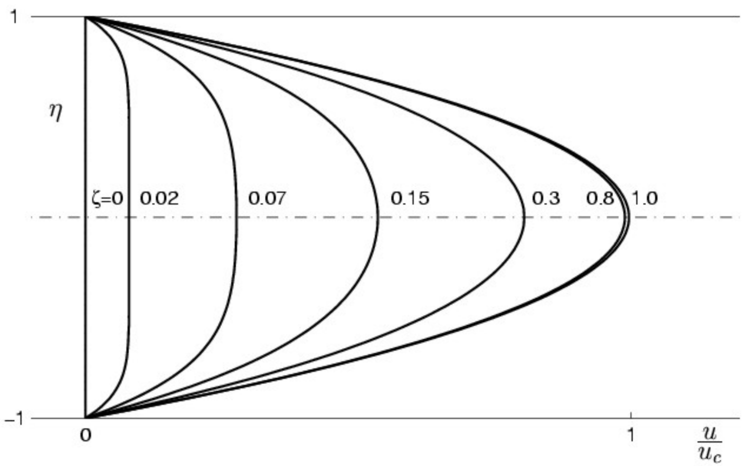
(iii)

Résolution analytique :-(

$$\tilde{u}^*(\eta,\zeta) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n \eta)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \zeta}$$

Temps d'établissement

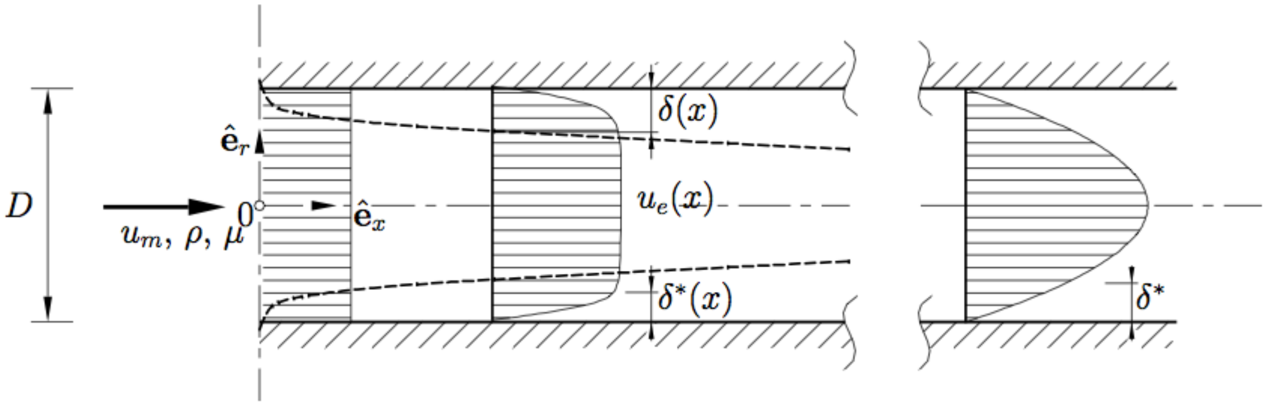
$$\frac{u}{u_c}(0, \zeta > \zeta_c) \approx 1 - \frac{8}{\lambda_1^3\, J_1(\lambda_1)}\, e^{-\lambda_1^2 \zeta} = 1 - 1.108\, e^{-5.783\, \zeta}$$



Temps d'établissement nécessaire afin que la vitesse au centre de la conduite vaille un pourcentage critique de la valeur du profil de Poiseuille

$$\zeta_c \approx \frac{1}{\lambda_1^2} = 0.173 \qquad \zeta_{c,0.99} = \frac{\nu\, t_{c.99}}{R^2} \approx 0.814$$

Longueur d'établissement… Analogie spatio-temporelle



Pas de solution analytique : il est possible de trouver une solution approchée par la théorie des couches limites pour le cas axisymétrique…

Ou d'effectuer une petite analogie :-)

Longueur d'établissement nécessaire afin que la vitesse au centre de la conduite vaille un pourcentage critique de la valeur du profil de Poiseuille

$$\frac{x_c}{u_m}\,\frac{\nu}{R^2} \approx t_c\,\frac{\nu}{R^2} = \zeta_c\ ,$$

$$4\,\frac{x_c}{D}\,\frac{\nu}{u_m\,D} \approx \zeta_c \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x_c}{D} \approx \frac{\zeta_c}{4}\,Re_D \approx 0.2\,Re_D$$