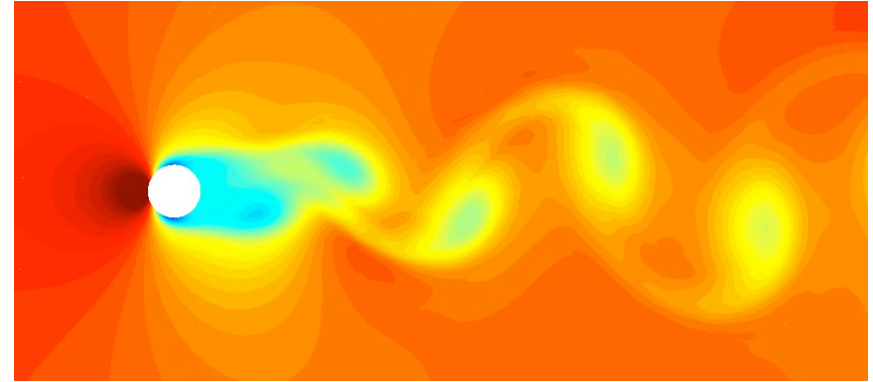
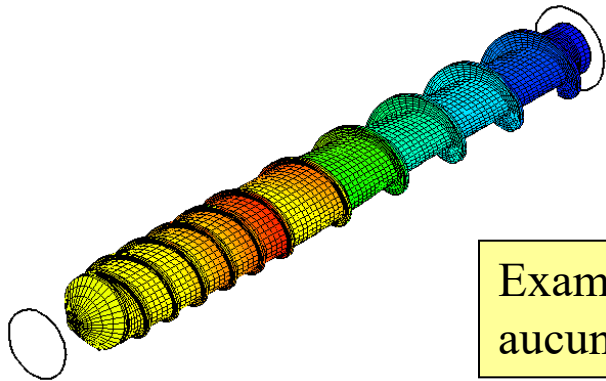


MECA1321 :
tout ce dont vous
avez rêvé

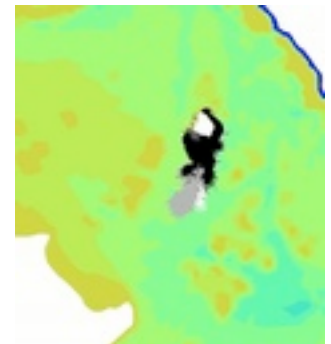
à propos des fluides newtoniens...



Equations de conservation et de comportement (VL)
Ecoulements et transferts laminaires (VL)
Théorie de la lubrification (VL)
Couches limites - convection forcée et naturelle (VL)
Ecoulements et transferts turbulents (GW)



Examen d'exercices à livre fermé sans
aucun document ou formulaire !



Equipe enseignante :-)



MECA1321 : Mécanique des fluides et transferts

MECA1321 News Documents Login

Mécanique des fluides et transferts (MECA1321)
Vincent Legat
Grégoire Winckelmans
Louvain School of Engineering
Université catholique de Louvain

News Documents

News

Nouveauté 2020 : aide à la réussite :-)

Afin d'encourager et de promouvoir la réussite au cours, quelques toutes petites interrogations seront organisées au début des séances d'exercices. La réussite éventuelle des interrogations pourrait intervenir de manière positive pour 2 points de l'évaluation finale.

Les détails vous seront expliqués lors du premier cours.

Pour chaque séance d'exercice, vous êtes invités à faire un exercice AVANT la séance... Pour la première séance, il s'agit de l'exercice 1 : la correction sera faite pendant la séance et les interrogations porteront principalement sur l'exercice à préparer pour la séance en cours.

Les solutions des séances seront disponibles après les séances.

(Vincent Legat, 29/01/2020)

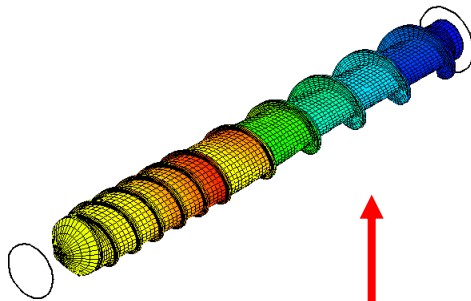
Premières activités :-)

La toute première séance d'exercice a lieu le LUNDI 3 février à 14h00 dans le A03 ou le MERCREDI 5 février à 10h45 dans le BARB92. **Attention, les séances d'exercices sont dédoublées : il est donc possible de venir soit à la séance du lundi 3 février à 14h00 ou du mercredi 5 février à 10h45. Vous pouvez choisir la séance qui permet d'éviter des conflits horaire avec d'autres activités. Par contre, il est essentiel de venir au même créneau horaire pendant toute l'année en raison des évaluations continues qui seront faites pendant les séances d'exercices.**

© 2017 Vincent Legat

Contact - Support

La mécanique des milieux continus...



Construction
d'un modèle pour prédire l'évolution
d'un milieu continu

Equations aux dérivées partielles

Equations de conservation
Equations de comportement

Conditions aux limites

Conditions frontières
Conditions initiales

MASSE
QUANTITE DE MVT
ENERGIE

MOMENT
QUANTITE DE MVT

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T$$

Dynamique moléculaire de l'air

3.5 litres d'air
 10^{23} molécules



Construction
d'un **modèle** pour **prédire** l'évolution
d'un milieu **continu**

La **prédiction** avec la **dynamique
moléculaire** est **tout-à-fait
impossible** pour des **écoulements
complexes**

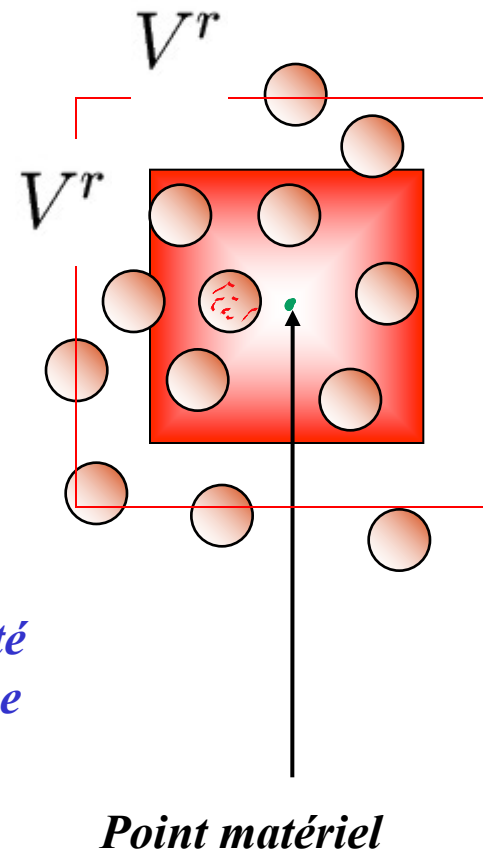
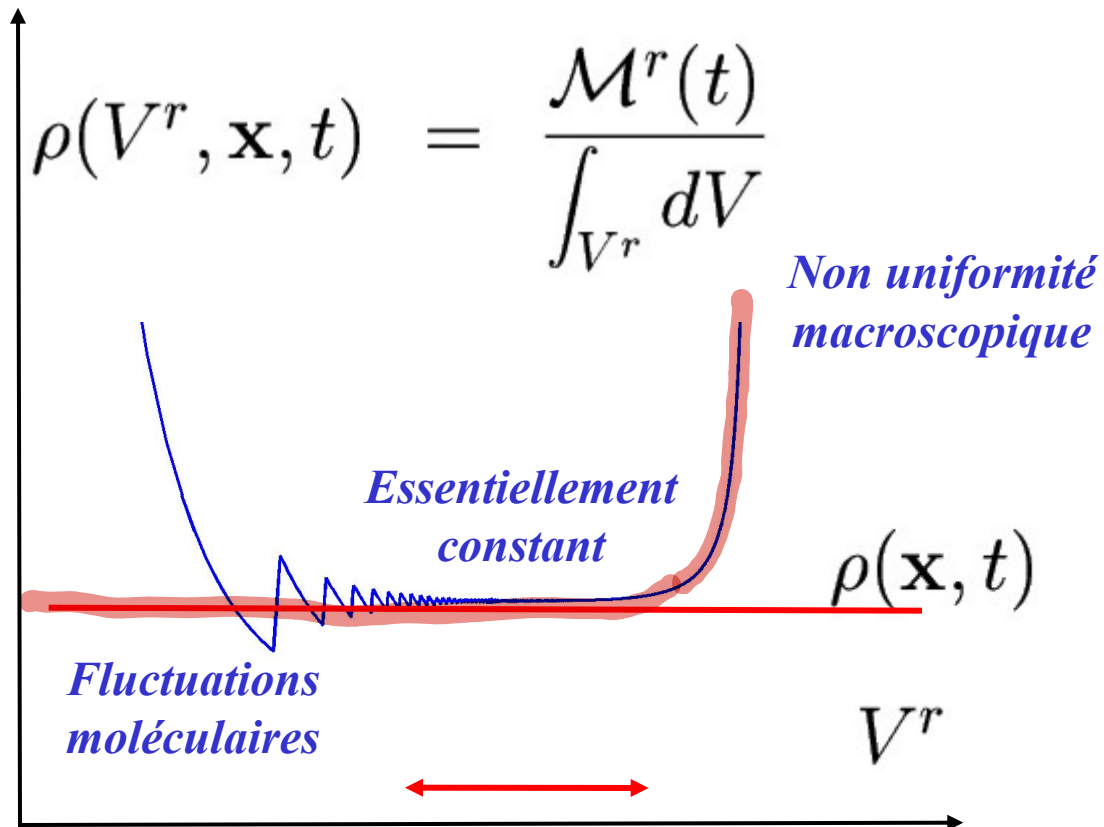
Ordinateur

10^{10} opérations par seconde
 10^{13} secondes ou 100.000 années
juste pour référencer une fois chaque molécule



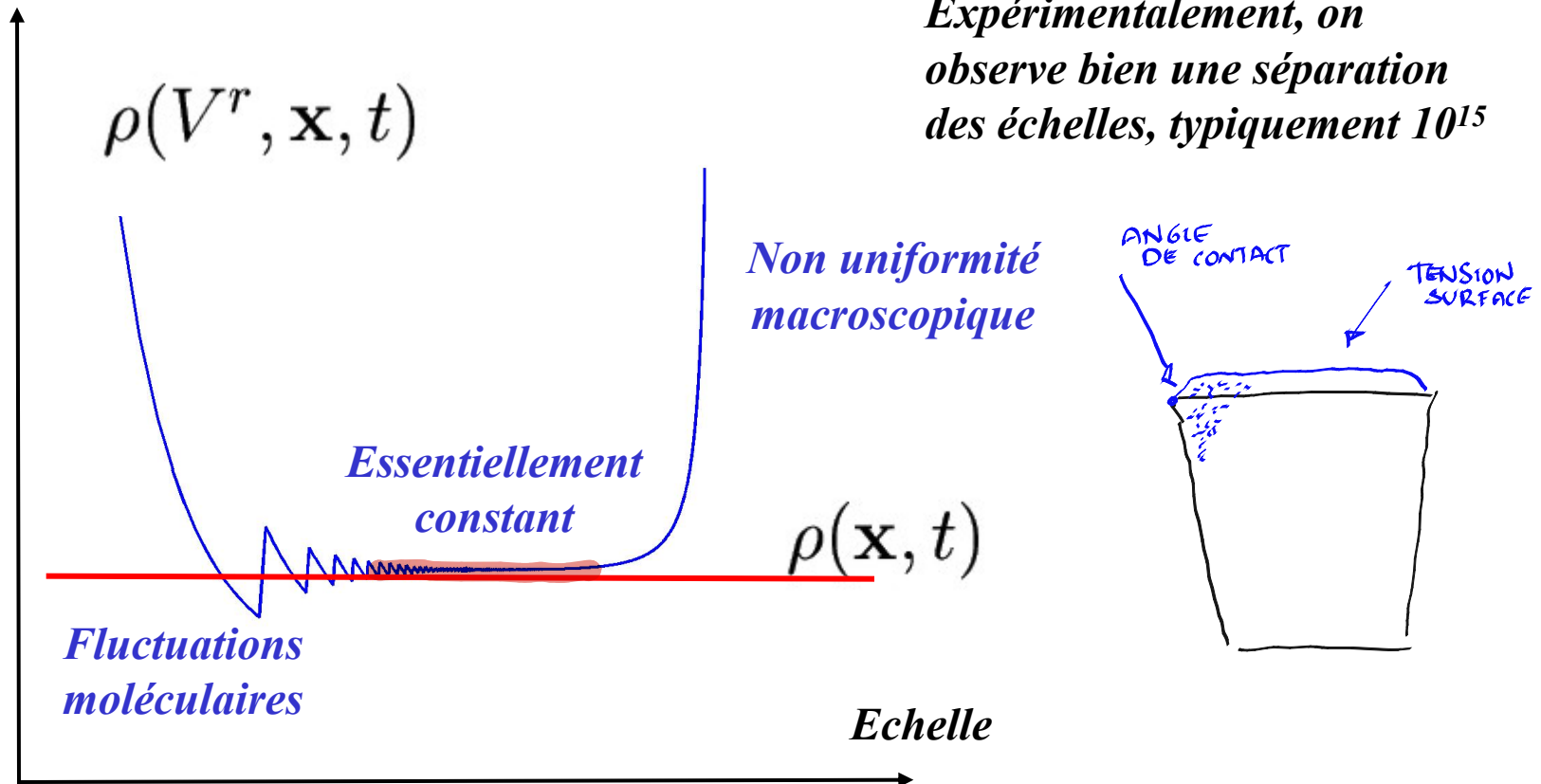
**Hypothèse du
modèle continu**

La densité obtenue comme une moyenne...



Hypothèse des milieux continus

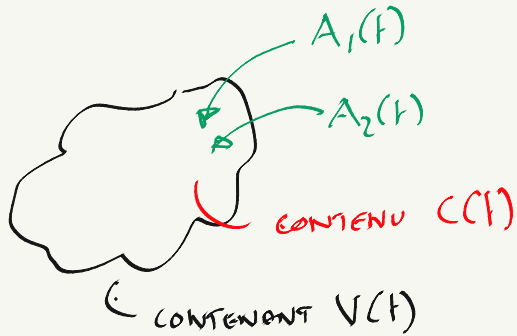
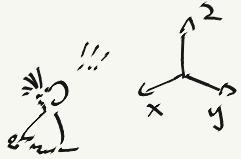
Le comportement de nombreux systèmes est essentiellement le même que si on supposait qu'ils étaient parfaitement continus.



Expérimentalement, on observe bien une séparation des échelles, typiquement 10^{15}




LOIS DE CONSERVATION OU DE BILAN



$$\frac{d}{dt} C(t) = A_1(t) + A_2(t)$$

MASSE 

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0$$

QUANTITE DE MOUVEMENT 

$$\frac{\partial (\rho \underline{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v} \underline{v}) = \rho \underline{g} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}$$

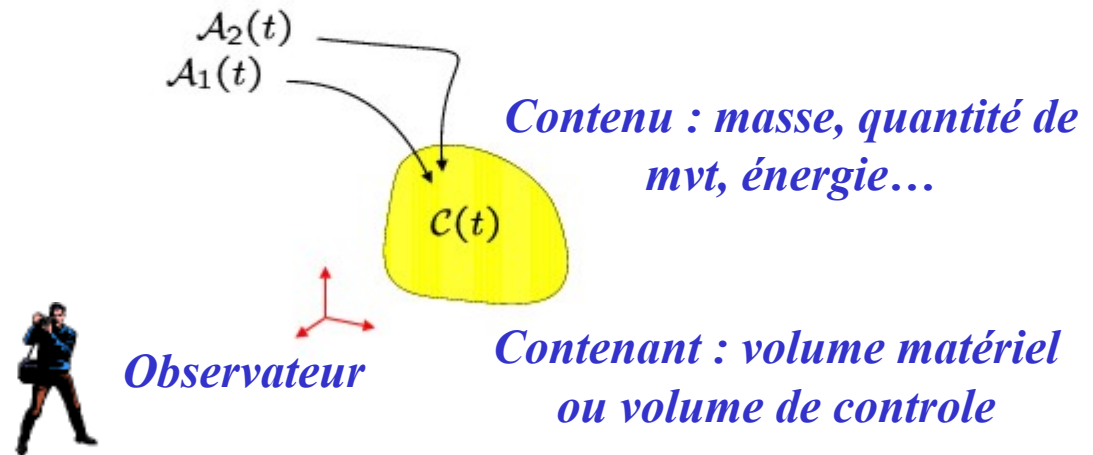
$\underline{t} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$

ENERGIE

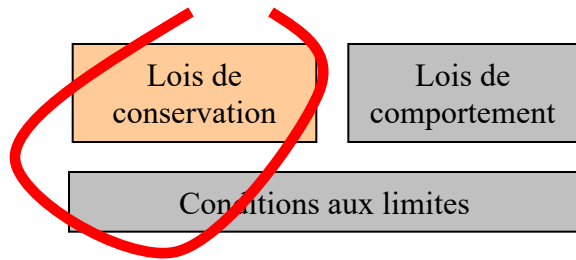
Lois de conservation

$$\frac{dC}{dt}(t) = \mathcal{A}_1(t) + \mathcal{A}_2(t) + \dots$$

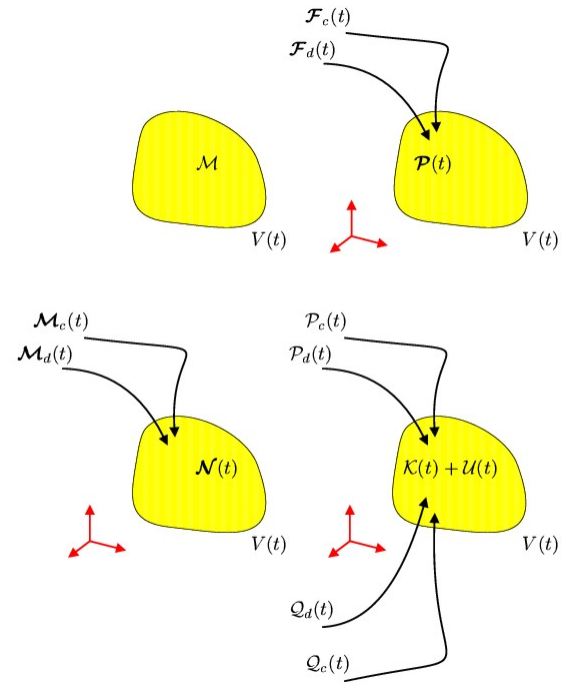
Apports extérieurs



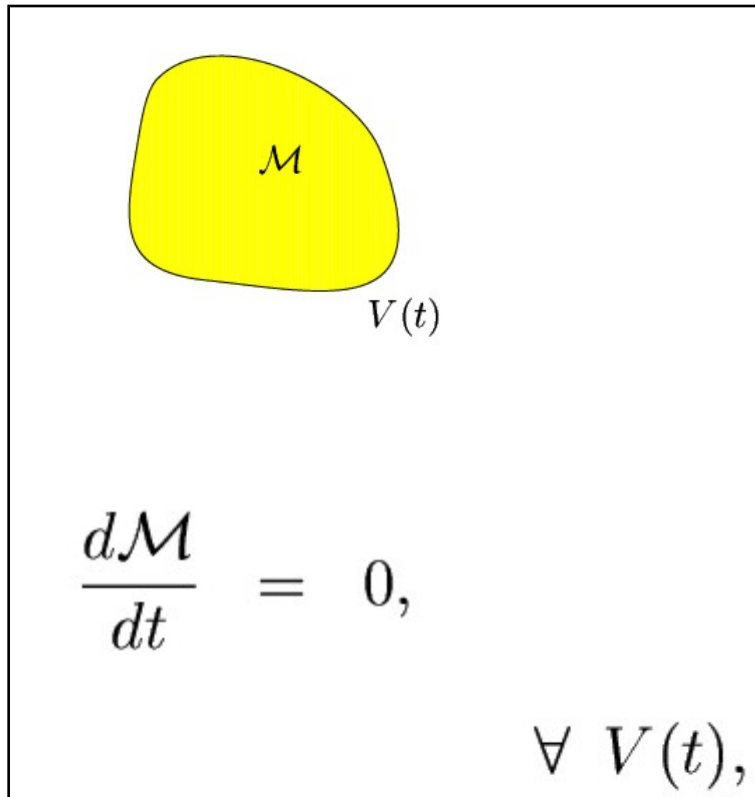
Lois de conservation, lois de comportement, conditions aux limites.



*Conservation de la masse,
de la quantité de mouvement,
du moment de la quantité de mouvement
et de l'énergie.*

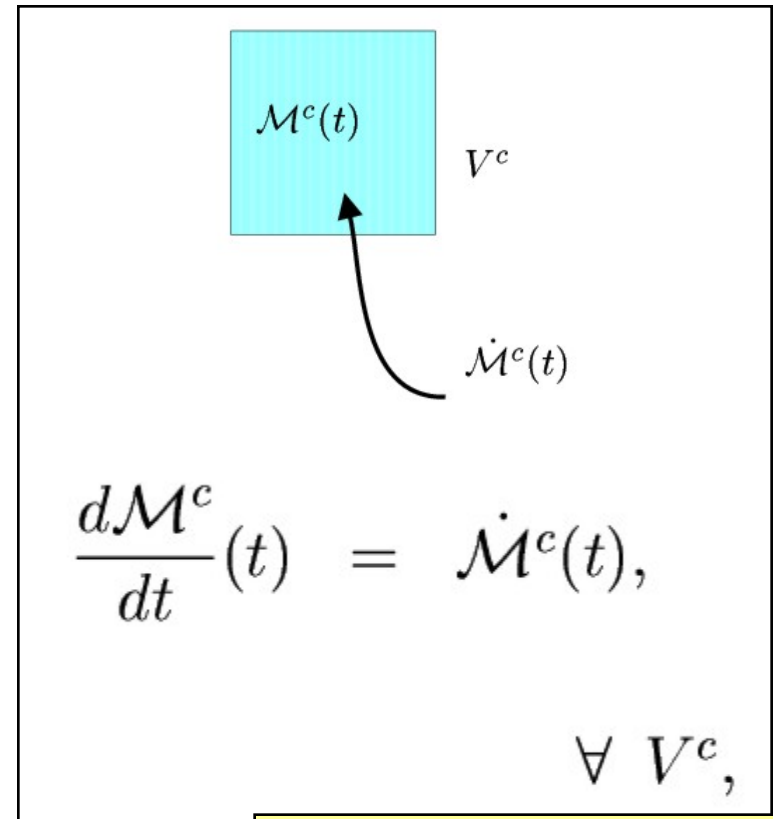


Formes globales de la conservation de la masse



Volume matériel

Ensemble de points matériels en mouvement se déplaçant à une vitesse macroscopique $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$



Volume de controle

Ensemble de points eulériens

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v_i(x_j, t)\mathbf{e}_i$$

Conservation de la masse

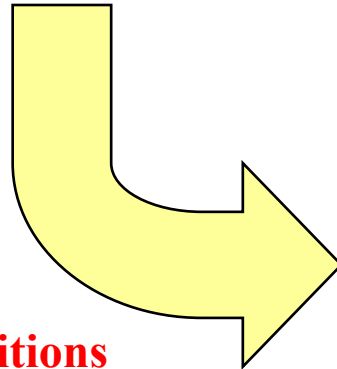
Forme globale

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = 0, \quad \forall V(t),$$

satisfaite pour une certaine classe de systèmes, à tout instant

$$\mathcal{M} = \int_{V(t)} \rho dV$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \rho}_{\text{advection}} + \underbrace{\rho \nabla \cdot \mathbf{v}}_{\text{divergence}} = 0$$



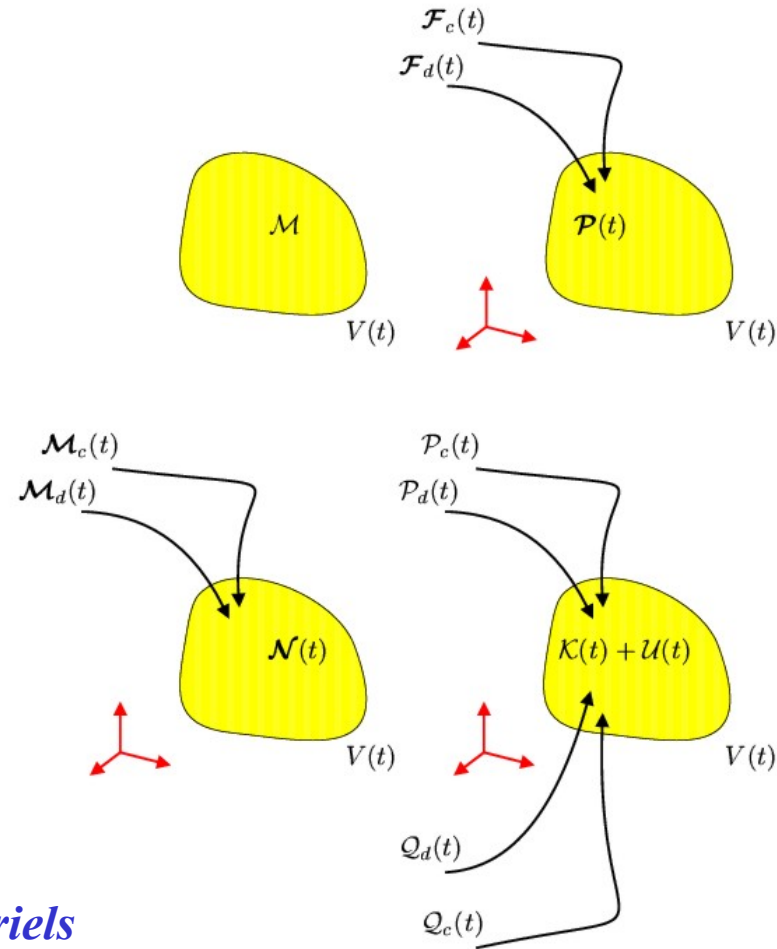
sous certaines conditions de continuité..

Forme locale $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

satisfaite en tout point et à tout instant

Toutes les lois de conservation, en un clin d'oeil...



*Forme globale
pour des volumes matériels*

2

THEOREME DE L'ENERGIE MECANIQUE

$$\underbrace{\underline{v} \cdot \rho \frac{D\underline{v}}{Dt}}_{\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\underline{v} \cdot \underline{v}}{2} \right)} = \underbrace{\underline{v} \cdot \nabla \cdot \underline{\sigma}}_{\rho \underline{g} \cdot \underline{v}} + \underbrace{\rho \underline{g} \cdot \underline{v}}_{\text{DENSITE DE PUISSANCE DES FORCES A DISTANCE}}$$

VARIATION TEMPORELLE DE LA DENSITE D'ENERGIE CINETIQUE

$$\rho \underline{g} \cdot \underline{v}$$

DENSITE DE PUISSANCE DES FORCES A DISTANCE

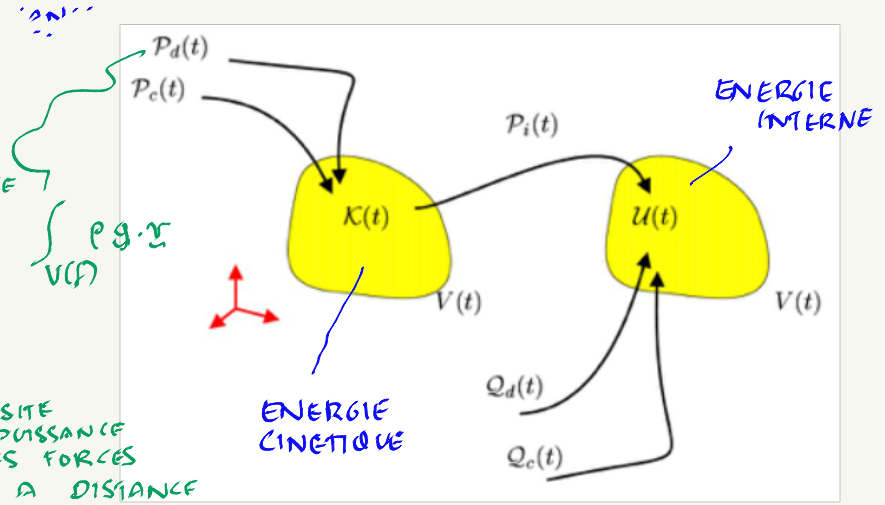
$$\nabla \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{v}) - (\nabla \cdot \underline{v}) : \underline{\sigma}$$

$$- \underbrace{\left(\frac{\nabla \cdot \underline{v} + \nabla \cdot \underline{v}^T}{2} \right) : \underline{\sigma}}_{\underline{d} \text{ TENSEUR DES TAUX DE DEFORMATION}} - \underbrace{\left(\frac{\nabla \cdot \underline{v} - \nabla \cdot \underline{v}^T}{2} \right) : \underline{\sigma}}_{\text{ANTI SYM}} = 0$$

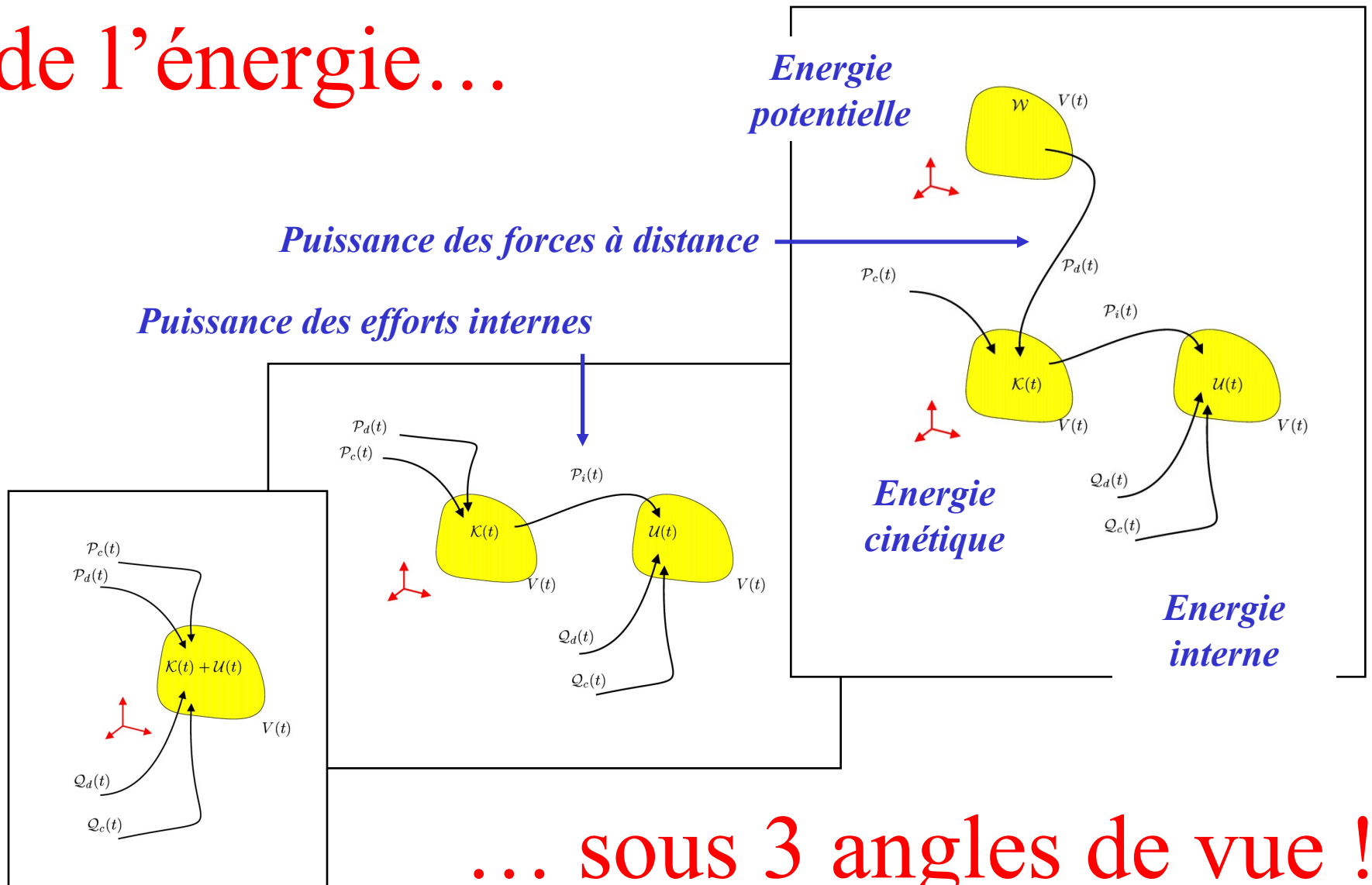
$$P_i = \int_{V(t)} \underline{\sigma} : \underline{d} \, d\Omega$$

PUISSANCE DES EFFORTS INTERNES

DISSIPATION VISQUEUSE



Conservation de l'énergie...



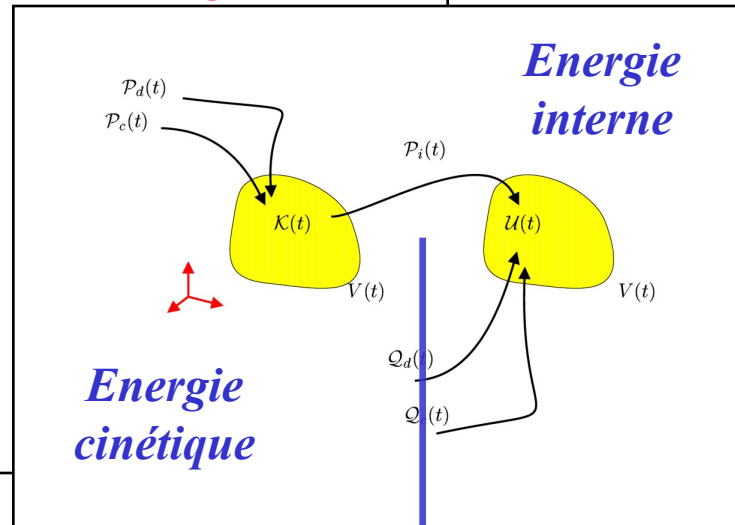
... sous 3 angles de vue !

Puissance des efforts internes

Forme locale non-conservative de la conservation de l'énergie interne

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \sigma : \mathbf{d} + r - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

Formes globales



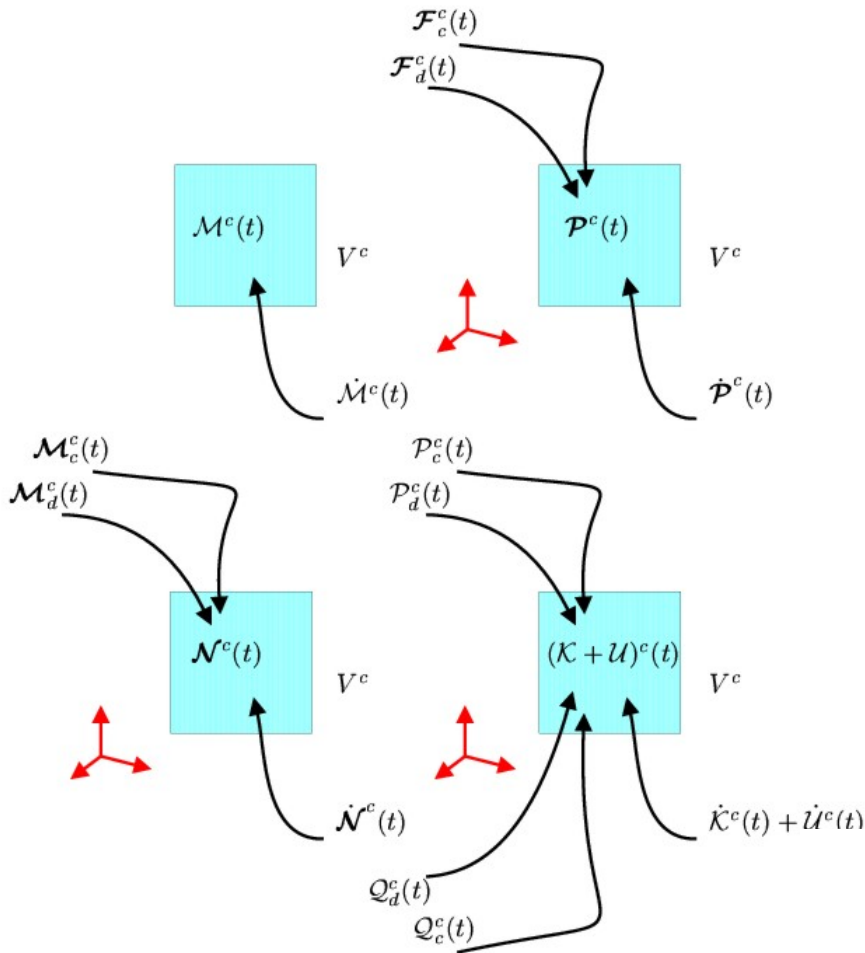
$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}$$

Forme locale non-conservative de la conservation de l'énergie cinétique

Puissance des efforts internes

$$\mathcal{P}_i(t) = \int_{V(t)} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV$$

Comment retrouver les équations locales ?



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g},$$

$$\frac{\partial (\rho U)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} U) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \nabla \cdot \mathbf{q}.$$

...dont on peut déduire des formes locales

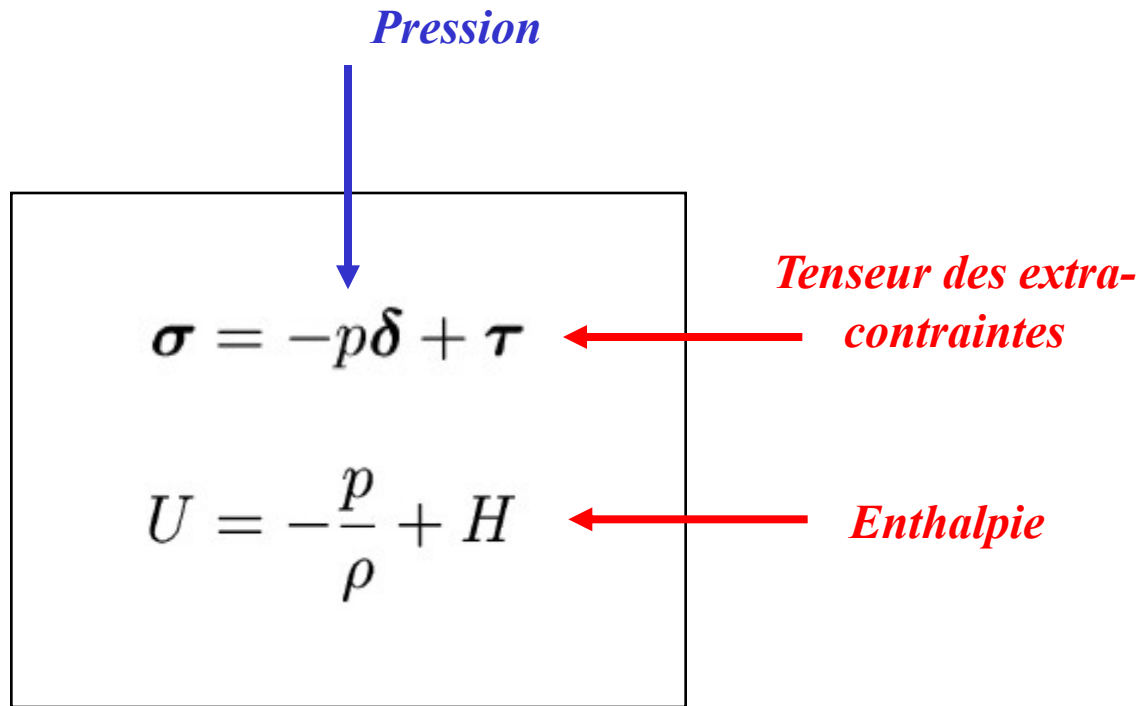
$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n}$ $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ $\mathbf{q}(\mathbf{n}) = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$	$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$ $\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}$ $\rho \frac{DU}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \nabla \cdot \mathbf{q}$
---	---

*Forme locale
dite non-conservative*

*Forme locale
dite conservative*

$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n}$ $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ $\mathbf{q}(\mathbf{n}) = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ $\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}$ $\frac{\partial (\rho U)}{\partial T} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} U) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \nabla \cdot \mathbf{q}$
---	---

Trois nouveaux acteurs dans notre modèle !



Un peu d'algèbre

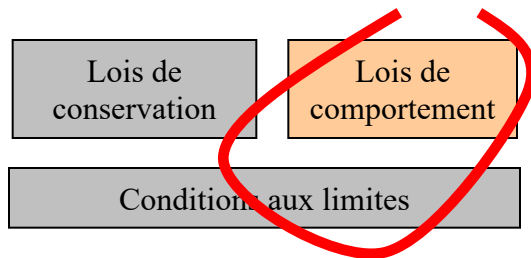
$$H = U + \frac{p}{\rho}$$

$$\begin{aligned}\rho \frac{DH}{Dt} &= \rho \left(\frac{DU}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \right) \\ &= \rho \frac{DU}{Dt} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}.\end{aligned}$$

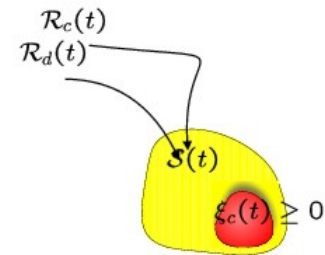


$$\begin{aligned}\rho \frac{DH}{Dt} &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}, \\ &= -p \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}, \\ &= \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \underbrace{\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} \right)}_{=0}.\end{aligned}$$

Lois de conservation, lois de comportement, conditions aux limites.



*Second principe de la thermodynamique,
Modèle du fluide visqueux newtonien*



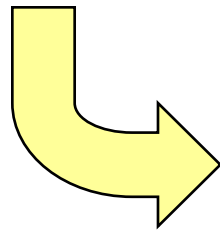
Les équations de comportement ne peuvent pas être écrites n'importe comment !
Il faut respecter certaines règles !

En particulier, il faut les écrire afin que le **second principe de la thermodynamique soit toujours satisfait.**

Quelques jolis tenseurs pour construire notre modèle...

$$\nabla \mathbf{v} = \underbrace{\left(\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \right)}_{\mathbf{d}} + \left(\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T) \right)$$

Tenseur des taux de déformation



$$\mathbf{d} = \underbrace{(\boldsymbol{\delta} : \mathbf{d}) \frac{\boldsymbol{\delta}}{3}}_{\mathbf{d}^s} + \underbrace{\left(\mathbf{d} - (\boldsymbol{\delta} : \mathbf{d}) \frac{\boldsymbol{\delta}}{3} \right)}_{\mathbf{d}^d}$$

Partie sphérique du tenseur des taux de déformation

Partie déviatoire du tenseur des taux de déformation

*Viscosité de
volume*

*Viscosité de
cisaillement*

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 3\hat{\kappa}(p, T)\mathbf{d}^s + 2\hat{\mu}(p, T)\mathbf{d}^d,$$

$$\mathbf{q} = -\hat{k}(p, T)\nabla T, \quad \text{Conductivité
thermique}$$

$$\begin{aligned}\rho &= \hat{\rho}(p, T), \\ H &= \hat{H}(p, T), \\ S &= \hat{S}(p, T).\end{aligned}$$

L'équation de comportement pour
l'entropie n'est utile que pour vérifier que
le second principe est bien satisfait !

$$TdS = dH - \frac{dp}{\rho} = dU - \frac{pd\rho}{\rho^2},$$

$$\begin{aligned}k &\geq 0, \\ \kappa &\geq 0, \\ \mu &\geq 0.\end{aligned}$$

**Contraintes à
respecter
pour satisfaire
Clausius-Duhem**

**Modèle du fluide
visqueux newtonien**

Quelques ordres de grandeur

TABLE 2.3.1 / The Viscosity of Some Familiar Materials at Room Temperature

<i>Liquid</i>	<i>Approximate Viscosity (Pa·s)</i>
Glass	10^{40}
Molten glass (500°C)	10^{12}
Asphalt	10^8
Molten polymers	10^3
Heavy syrup	10^2
Honey	10^1
Glycerin	10^0
Olive oil	10^{-1}
Light oil	10^{-2}
Water	10^{-3}
Air	10^{-5}

Adapted from Barnes et al. (1989).

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 3\hat{\kappa}(p, T)\mathbf{d}^s + 2\hat{\mu}(p, T)\mathbf{d}^d,$$

$$\mathbf{q} = -\hat{k}(p, T)\nabla T,$$

$$\rho = \hat{\rho}(p, T),$$

$$H = \hat{H}(p, T),$$

$$S = \hat{S}(p, T).$$

Le compte
est bon !

conservation locale de la masse	ρ	1
conservation locale de la quantité de mouvement	\mathbf{v}	3
conservation locale de l'énergie	T	1
constitution pour les contraintes	$\boldsymbol{\sigma}$	6
constitution pour le flux calorifique	\mathbf{q}	3
constitution pour la masse volumique	p	1
constitution pour l'enthalpie	H	1
constitution pour l'entropie	S	1

Remarque : si une équation de comportement pour l'enthalpie est donnée... on en déduit automatique l'énergie interne et vice-versa.

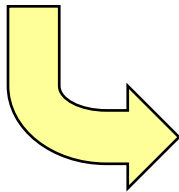
$$U = -\frac{p}{\rho} + H$$

Modèle de gaz idéal

$$\hat{\rho}(p, T) = \frac{p}{R_* T}$$

Constante du gaz

Un exemple
d'équation d'état pour
la masse volumique



Ecoulements compressibles

Propagation des sons au sein de l'air : c'est un effet de la compressibilité de l'écoulement.

Caractérisation par le nombre de Mach

Presque comme en thermo...

*Concentration molaire
[mole/m³]*

$$\boxed{\rho} = \boxed{c} \boxed{M}$$

*Masse volumique
[kg/m³]*

*Masse molaire
[kg/mole]*

$$pV = nRT$$

$$c = \frac{n}{V}$$

$$c = \frac{p}{RT}$$

Constante des gaz

$$R = 8.314 \text{ [J/moleK]}$$

$$\rho = \frac{p}{R_* T}$$

Constante du gaz

$$R_{*,air} = \frac{R}{M_{air}} = 287 \text{ [m}^2\text{/s}^2\text{K]}$$

$$\hat{H}(p, T)$$

Et la relation
d'état pour
l'enthalpie (1) ?

$$\hat{H}(p, T) = \left[\frac{\partial H}{\partial T} \right] T + \frac{\partial H}{\partial p} p = U(p, T) + \frac{p}{\rho(p, T)}$$

*Chaleur massique à
pression constante*

$$= \left(\left[\frac{\partial U}{\partial T} \right] - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial T} \right) T + \left(\frac{\partial U}{\partial p} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{1}{\rho} \right) p$$

*Chaleur massique à
volume constant*

$$\beta \triangleq - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{1}{T}$$

*Coefficient de
dilatation
thermique*

$$\gamma \triangleq \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{1}{p}$$

*Coefficient de
compressibilité*

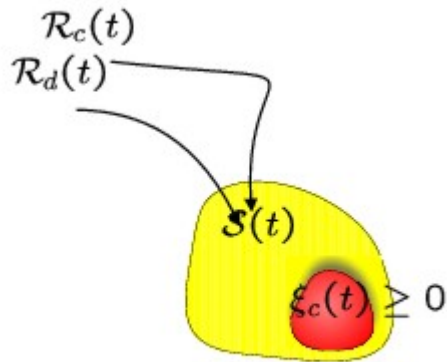
(1) ou l'énergie interne

Il s'agit
donc de définir
une équation d'état pour la
chaleur massique à pression
constante et ...

*Chaleur massique à
pression constante*

$$c_p(p, T) \triangleq \frac{\partial \hat{H}}{\partial T}$$

$$f(p, T) \triangleq \frac{\partial \hat{H}}{\partial p}$$



On ne peut pas écrire
n'importe comment
ces relations d'état !

Second principe de la thermodynamique

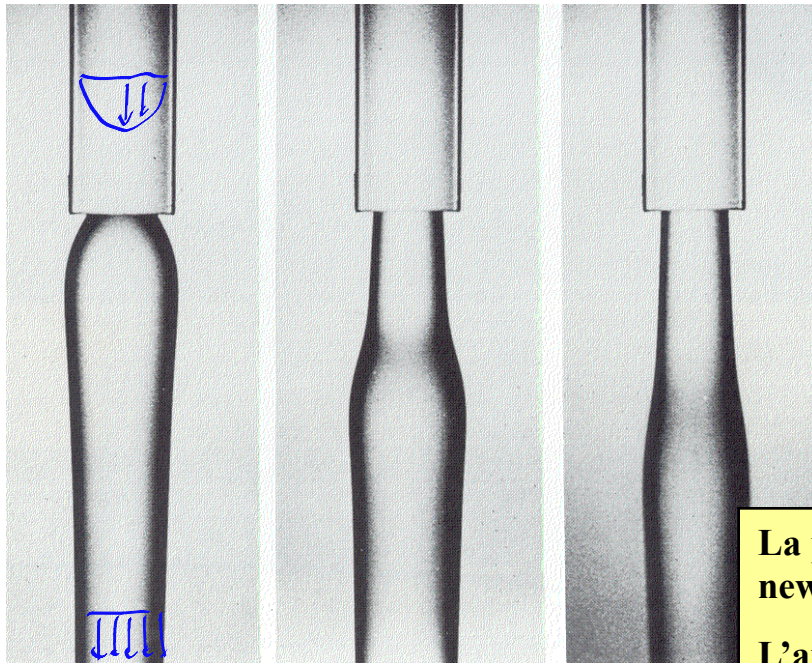
$$\rho \frac{DS}{Dt} \geq \frac{r}{T} - \frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{\mathbf{q}}{T^2} \cdot \nabla T,$$

Inégalité de Clausius-Duhem : $\rho T \frac{DS}{Dt} - \rho \frac{DU}{Dt} \geq -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla T$

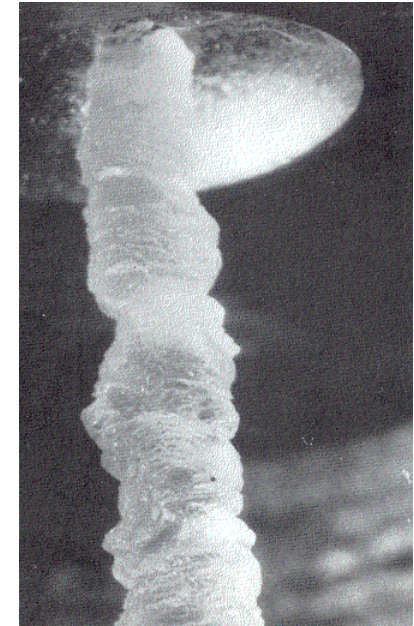
Il faut respecter certaines règles !

En particulier, il faut les écrire afin que le **second principe de la thermodynamique soit toujours satisfait.**

De tels gonflement de jets
sont imprévisibles avec ce
modèle newtonien



(Giesekus, Rheologica Acta, 68)

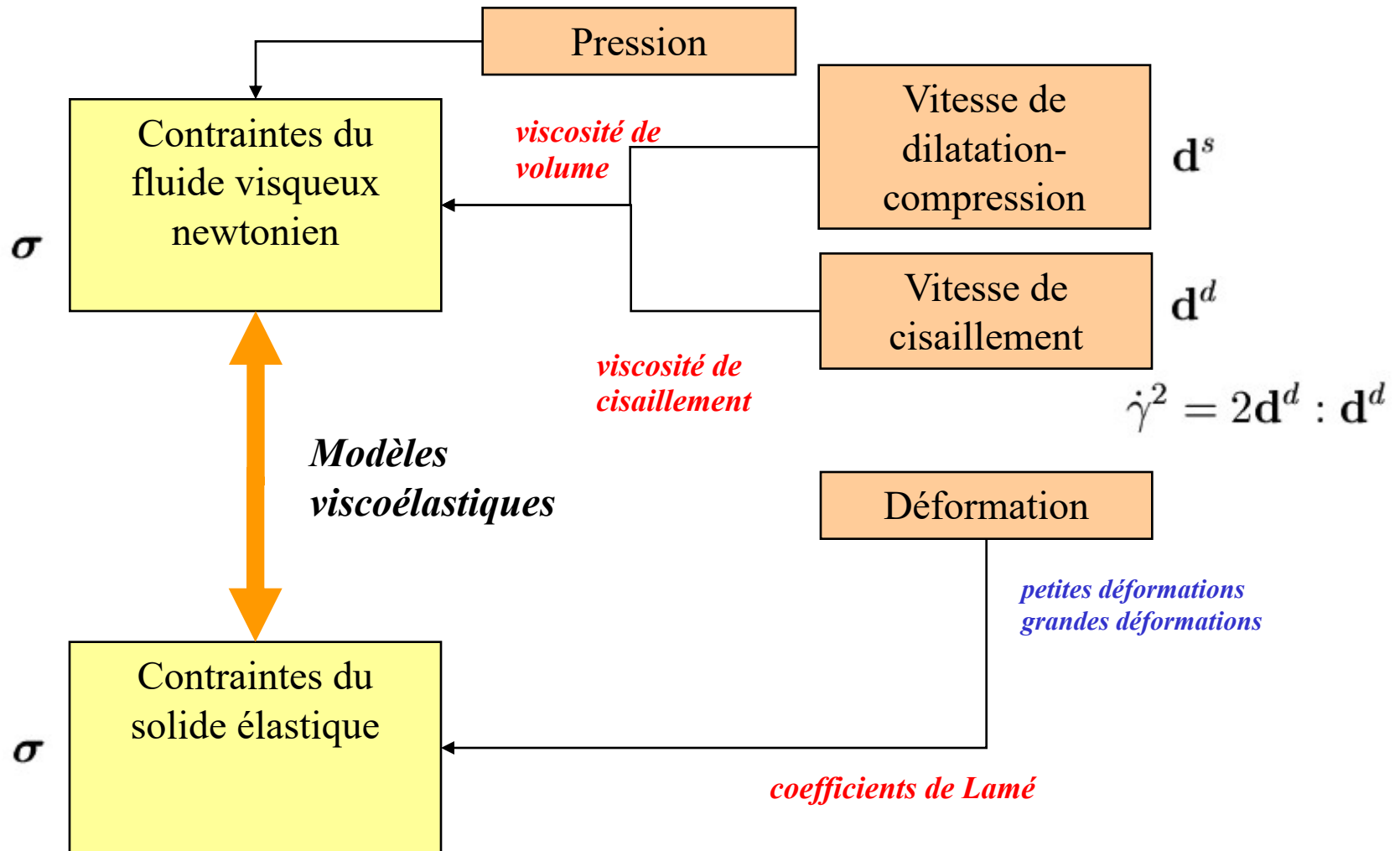


(Piau, JNNFM, 90)

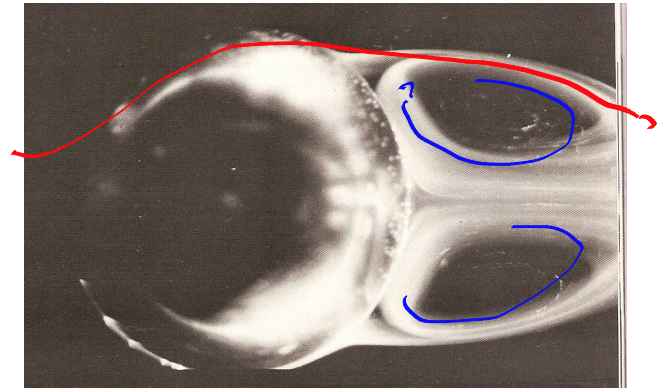
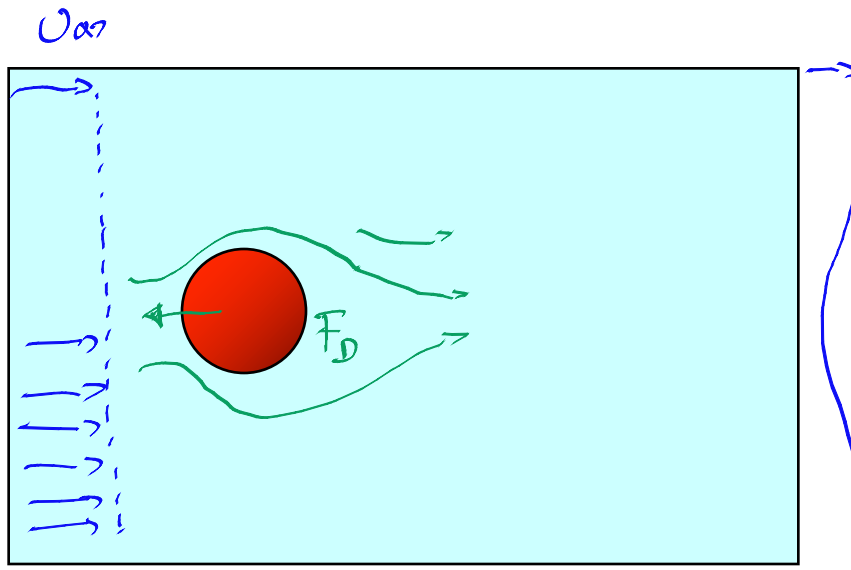
La plupart de fluides réels NE SONT PAS des fluides newtoniens...

L'air et l'eau sont toutefois newtoniens et constituent les fluides les plus largement répandus...

Rhéologie : la science du monde magique des équations de comportement...



Evaluer la force de trainée à partir d'une mesure du profil de vitesses en aval...



Taneda 1956
(from *An Album of Fluid Motion*, Van Dyke)

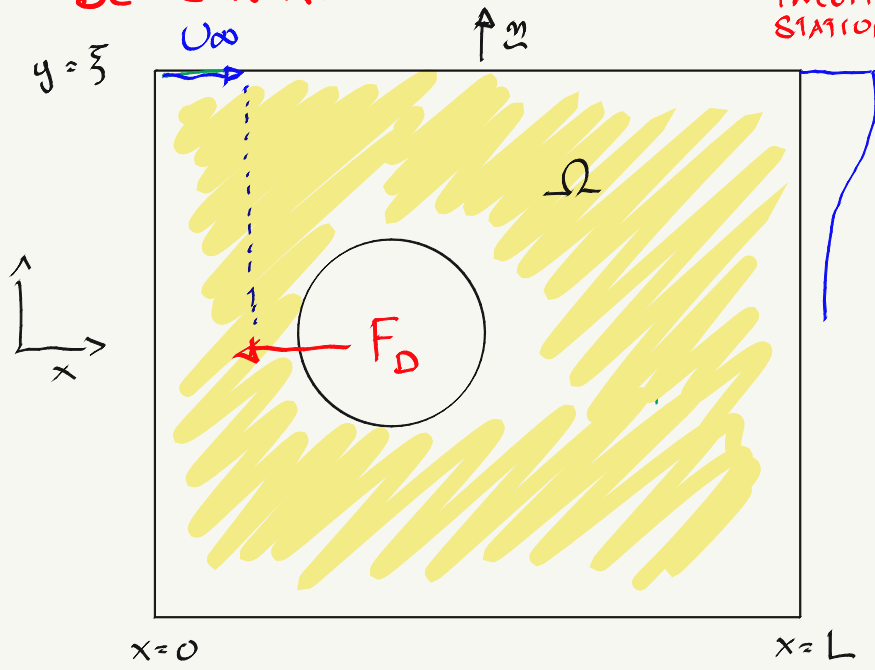
Volume de controle
Ensemble de points eulériens

3

VOLUME DE CONTROLE

ECOULEMENT 2D INCOMPRESSIBLE STATIONNAIRE HORIZONTAL

$$\underline{v} = [u, v]$$



BILAN QUANTITE MOUVEMENT HORIZ

$$\int_{\partial\Omega} \rho \underline{v} \cdot \underline{n} = -F_D$$

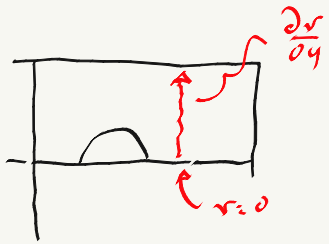
$$2 \left[\int_0^{\xi} -\rho U_{\infty}^2 + \int_0^{\xi} \rho u^2 + \int_0^L \rho U_{\infty} v \right]$$

$$2 \left[\int_0^{\delta} \cancel{-\rho U_\infty^2} + \int_0^{\delta} \rho u^2 + \int_0^L \rho U_\infty v \right]$$

$$\rho U_\infty \int_0^L v dx$$

CONS
GLOBALE
DE LA
MASSE

$$\int_0^{\delta} U_\infty - u dy$$



$$= \rho U_\infty \int_0^L \int_0^{\delta} \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{-\frac{\partial u}{\partial x}} dy dx$$

CONS.
LOCALE
DE LA
MASSE

$$= \rho U_\infty \int_0^{\delta} \underbrace{\int_0^L -\frac{\partial u}{\partial x} dx}_{(U_\infty - u)} dy = \int_0^{\delta} \cancel{\rho U_\infty^2} - \rho u U_\infty dy$$

$$- F_D = 2\rho \int_0^{\delta} u^2 - u U_\infty dy$$

$$- F_D = 2\rho \int_0^{\delta} v^2 - v U_\infty dy$$

$$\frac{F_D}{2\rho U_\infty^2} = \int_0^{\delta} \frac{v}{U_\infty} \left(1 - \frac{v}{U_\infty}\right) dy$$

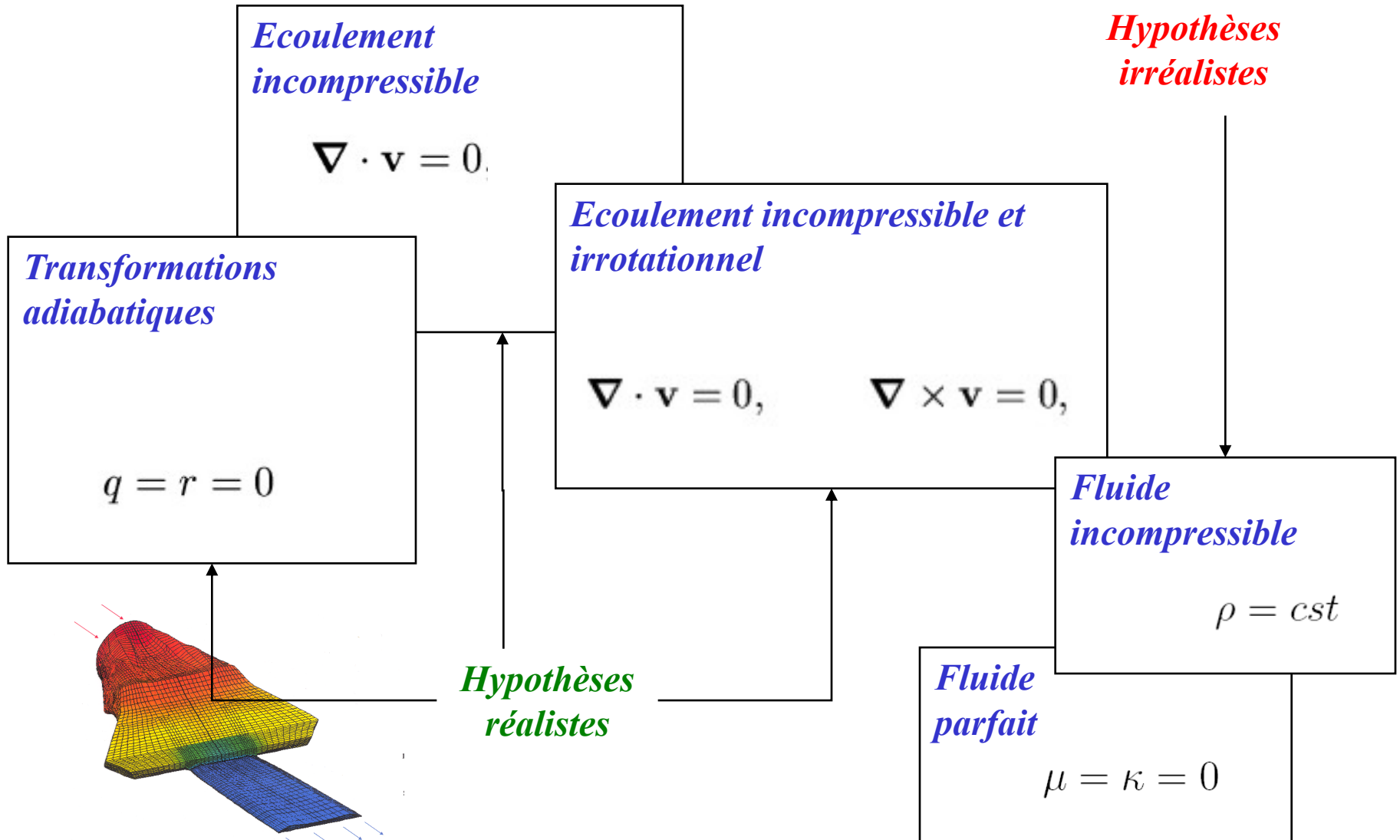
$[m]$

$[kg/m^3]$ $[m^2/s^2]$

$$[N/m]$$

DENSITÉ
DE FORCE DE TRAINÉE
PAR UNITÉ DE PROFONDEUR
DE LA COLONNE

Simplifications usuelles...



Donc, simplifions...

Dans un écoulement incompressible, il n'y a pas de raison de distinguer chaleur spécifique à volume ou à pression constante.

On écrit simplement le symbole c !

$$\sigma(p, \mathbf{v}) = -p\delta + \mu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)$$

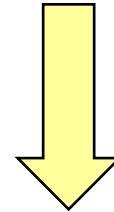
$$\mathbf{q}(T) = -k\nabla T$$

$$U(T) = cT$$

*Fluide newtonien
à paramètres
matériels constants*

*Ecoulement
incompressible*

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$



Les équations de continuité et de quantité de mouvement ne font pas intervenir la température : on peut résoudre la dynamique de l'écoulement sans tenir compte des aspects thermiques !

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g},$$

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + k \nabla^2 T,$$

**Ecoulement incompressible d'un
fluide visqueux newtonien à
paramètres constants.**

Ecoulements incompressibles stationnaires plans

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

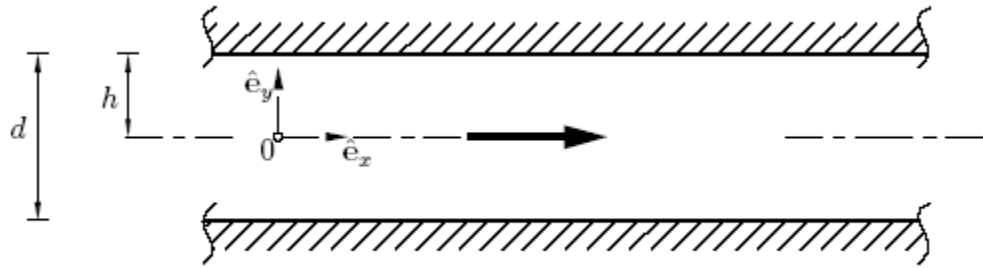
Ecoulement incompressible stationnaire d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants, sans forces de volume.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Écoulements 3D – 2D – 1D



Écoulements établis :

- Une seule vitesse u
- Pas de variations de u le long de l'axe de la conduite (c'est-à-dire x)

Un écoulement établi est un écoulement dont le profil transversal de vitesse est le même quelle que ce soit la section transversale à l'écoulement.

La section doit évidemment être constante !

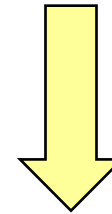
Écoulements incompressibles stationnaires plans établis

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

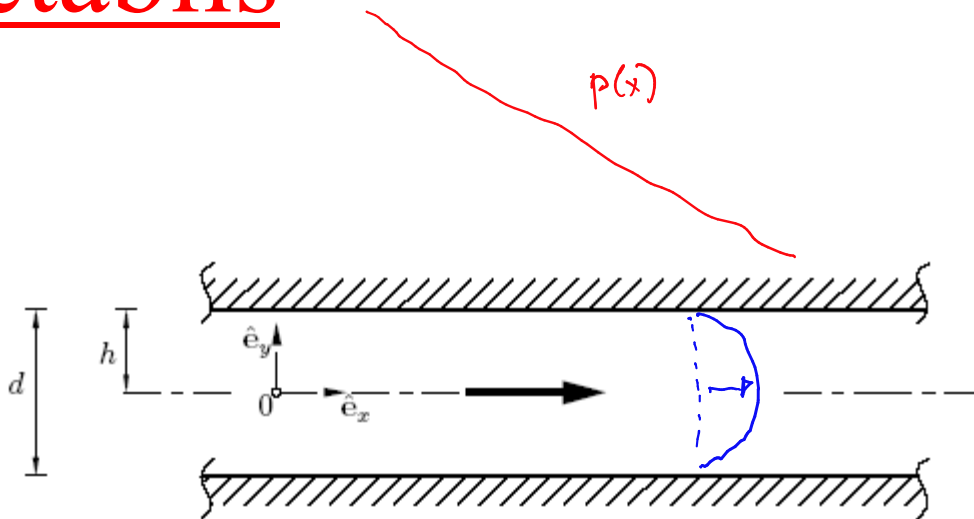
$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

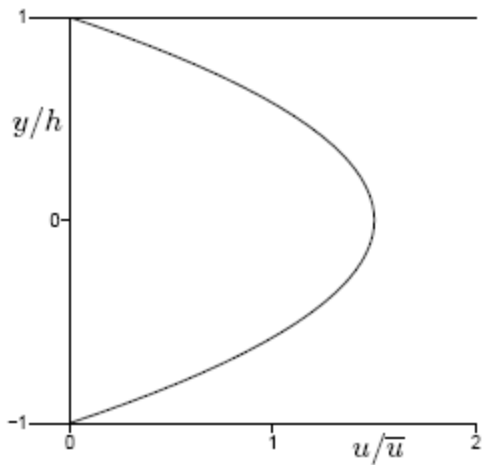
$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

*En imposant $v=0$
sur une des parois...*

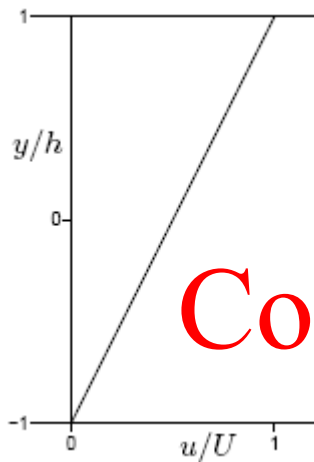
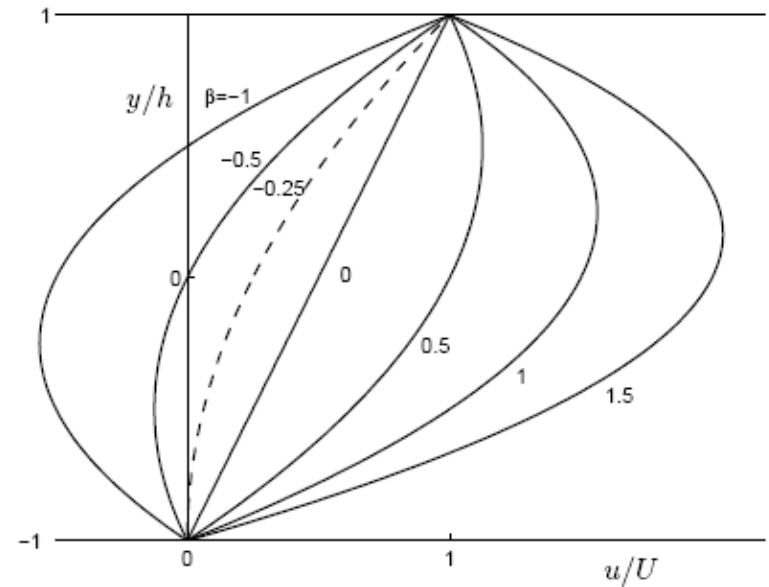


$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$$



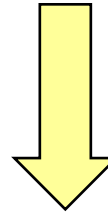


Poiseuille



Couette

$$\begin{aligned}
 \cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} + \frac{1}{r} \cancel{\frac{\partial}{\partial r}}(r v) &= 0 \\
 \rho \left(u \cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} + v \cancel{\frac{\partial v}{\partial r}} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) \\
 \rho \left(u \cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} + v \cancel{\frac{\partial v}{\partial r}} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \frac{1}{r} \cancel{\frac{\partial}{\partial r}} \left(r \cancel{\frac{\partial v}{\partial r}} \right) - \cancel{\frac{v}{r^2}} \right)
 \end{aligned}$$



$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right)$$

Ecoulements
 incompressibles
 stationnaires
 axisymétriques
établis

