Cours 24/11/21

Pertes de charge en conduite

Formule empirique de Blasius (1913)

$$\lambda \simeq \frac{0.3164}{Re_D^{1/4}} \qquad \text{pour } 5\,10^3 \leq Re_D \leq 5\,10^4$$

Autre formule empirique

$$\lambda \simeq \frac{0.184}{Re_D^{1/5}} \qquad \text{pour } 5\,10^4 \leq Re_D \leq 10^6$$

Formule générale de Prandtl (1935)

$$\iint \bar{U}\, dA \quad \text{avec} \quad \frac{\bar{U}}{\bar{U}_\tau} = \left(\frac{1}{K} \log y^+ + C\right) + \cancel{G(\eta)}$$

négligé par Prandtl

car zone $\overset{III}{\underline{III}}$ domine et contribution faible à l'intégrale

$$\hookrightarrow \frac{\bar{U}_m}{\bar{U}_\tau} = \frac{1}{K} \log\left(\frac{R\,\bar{U}_\tau}{\nu}\right) + \left(C - \frac{3}{2K}\right)$$

$$= \frac{1}{K} \log\left(\frac{D\,\bar{U}_m}{2\nu}\, \frac{\bar{U}_\tau}{\bar{U}_m}\right) + \left(C - \frac{3}{2K}\right)$$

$$\hookrightarrow \sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \frac{1}{K} \log\left(\frac{Re_D}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{8}}\right) + \left(C - \frac{3}{2K}\right)$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.035 \log_{10}\left(\frac{2.81}{Re_D}\, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

calibré sur résultats expérimentaux (voir figure)

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.0 \log_{10}\left(\frac{2.51}{Re_D}\, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)} \equiv \text{formule finale.}$$

Profil simplifiés en exposant pour la zone III

$$\frac{\bar{U}}{\bar{U}_c} = \eta^{\frac{1}{n}}$$

Approche "ad hoc" de Nikuradse

↳ voir figures

$$\begin{cases} Re_D = 4\,10^3 \longrightarrow 3.2\,10^6 \\ n = 6 \longrightarrow 10 \end{cases}$$

$\bar{U}_m A = \iint \bar{U}\, dA$ avec $A = \pi R^2$ et $dA = r\,d\theta\, dr$

$$\hookrightarrow \bar{U}_m \pi R^2 = 2\pi \int_0^R \bar{U}(r)\, r\, dr = 2\pi R^2 \int_0^1 \bar{U}(s)\, s\, ds$$

avec $y + r = R$

$\frac{y}{R} + \frac{r}{R} = 1$

$\eta + s = 1$

$\hookrightarrow s = 1 - \eta$

$ds = -d\eta$

$$= 2\pi R^2 \int_1^0 \bar{U}(\eta)(1-\eta)(-d\eta)$$

car zone III est dominante

$$= 2\pi R^2 \bar{U}_c \int_0^1 \eta^{\frac{1}{n}} (1-\eta)\, d\eta$$

$$= 2\pi R^2 \bar{U}_c \left(\int_0^1 \eta^{\frac{1}{n}}\, d\eta - \int_0^1 \eta^{\frac{1}{n}+1}\, d\eta \right)$$

$$= 2\pi R^2 \bar{U}_c \left(\left[\frac{\eta^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} \right]_0^1 - \left[\frac{\eta^{\frac{1}{n}+2}}{\frac{1}{n}+2} \right]_0^1 \right)$$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{\bar{U}_m}{\bar{U}_c} = \frac{2n^2}{(n+1)(n+2)}} \iff \boxed{\frac{\bar{U}_c}{\bar{U}_m} = \frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}}$$

Aussi

$$\iint \frac{(\bar{U}_c - \bar{U})}{\bar{U}_\tau} dA = \frac{(\bar{U}_c - \bar{U}_m)}{\bar{U}_\tau} A = \frac{\bar{U}_m}{\bar{U}_\tau}\left(\frac{\bar{U}_c}{\bar{U}_m} - 1\right) A$$

$$= \frac{\bar{U}_m}{\bar{U}_\tau} \frac{(3n+1)}{2n^2} A$$

$$= \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \frac{(3n+1)}{2n^2} A$$

en effet $\quad \dfrac{\bar{U}_\tau^2}{\bar{U}_m^2} = \dfrac{\bar{\tau}_w}{\rho \bar{U}_m^2} = \dfrac{C_f}{2} = \dfrac{\lambda}{8}$

(Rappel $\lambda = 4\, C_f$ en conduite)

Avec le profil universel :

$$\underbrace{\iint \frac{(\bar{U}_c - \bar{U})}{\bar{U}_\tau}}_{\equiv\, F(\eta)} dA \simeq 2\pi R^2 \int_0^1 F(\eta)(1-\eta)\, d\eta \simeq 4.06\, A$$

car zone III est dominante

↳ On obtient donc, par comparaison :

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}}\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{n}\left(1 + \cancel{\frac{1}{3n}}\right) \simeq 4.06$$

négligeable

↳ $n \simeq \dfrac{1.05}{\sqrt{\lambda}}$ Simple et très utile !

Ecoulements hydrauliquement rugueux

$\epsilon \equiv$ rugosité de la paroi

↳ voir figure et table

$$\epsilon^+ \triangleq \frac{\epsilon\, \bar{u}_\tau}{\nu}$$

- $\epsilon^+ \lesssim 2 \Rightarrow$ hydrauliquement lisse.
  existence d'une sous-couche quasi laminaire (zone I) près de la paroi.

- $\epsilon^+ \gtrsim 70 \Rightarrow$ hydrauliquement rugueux
  l'écoulement est turbulent jusqu'à la paroi.
  Tout est zone III ! $\nu_t \gg \nu$ partout.

- Région proche de la paroi (zone III-a : $0 \leq \eta \leq 0.15$)

$$\nu_t \frac{d\bar{u}}{dy} = \bar{u}_\tau^2 (1-\eta) \quad \text{et} \quad \nu_t = \kappa\, y\, \bar{u}_\tau (1-\eta)$$

$$\Rightarrow \kappa\, y \frac{d\bar{u}}{dy} = \bar{u}_\tau \quad \Rightarrow \kappa \left(\frac{y}{\epsilon}\right) \frac{d\bar{u}^+}{d\left(\frac{y}{\epsilon}\right)} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \log\left(\frac{y}{\epsilon}\right) + B}$$

↳ voir figure $\quad B \simeq C + 3.0$

- Toute la zone III = conduite complète,

$$\bar{u}^+ = \left(\frac{1}{\kappa} \log\left(\frac{y}{\epsilon}\right) + B\right) + G(\eta)$$

$$\hookrightarrow \bar{U}_c^+ = \left(\frac{1}{K} \log\left(\frac{R}{\epsilon}\right) + B\right) + G(1)$$

$$\hookrightarrow \bar{U}_c^+ - \bar{U}^+ = -\frac{1}{K} \log\left(\frac{y/\epsilon}{R/\epsilon}\right) + \left(G(1) - G(\eta)\right)$$

$$= -\frac{1}{K} \log \eta + \left(G(1) - G(\eta)\right) \triangleq F(\eta)$$

$\equiv$ loi du déficit de vitesse.

$\equiv$ idem que pour les cas hydrauliquement lisses!

$\equiv$ aussi idem pour les cas hydrauliquement mixtes.

Formule de Prandtl pour les pertes de charge

$$\iint \bar{U}\, dA \quad \text{avec} \quad \underbrace{\frac{\bar{U}}{\bar{U}_\tau}}_{\text{car zone III domine}} = \left(\frac{1}{K} \log\left(\frac{y}{\epsilon}\right) + B\right) + \cancel{G(\eta)}$$

négligé par Prandtl
et contribution faible à l'intégrale

$$\hookrightarrow \frac{\bar{U}_m}{\bar{U}_\tau} = \frac{1}{K} \log\left(\frac{R}{\epsilon}\right) + \left(B - \frac{3}{2K}\right)$$

$\hookrightarrow \ldots$

$$\hookrightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.035 \log_{10}\left(\frac{\epsilon/D}{3.34}\right)$$

calibré sur résultats expérimentaux

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.0 \log_{10}\left(\frac{\epsilon/D}{3.71}\right)} \equiv \text{formule finale}$$

Formule "générale" de Colebrook (1939)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.0 \log_{10}\left(\frac{2.51}{Re_D}\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\epsilon/D}{3.71}\right)$$

↳ Forme graphique ≡ diagramme de Moody

↳ voir figures

Profils simplifiés en exposant (Nikuradse)

$$\frac{\bar{U}}{\bar{U}_c} = \eta^{1/n}$$

↳ voir figure pour $Re_D = 10^6$ et divers $\frac{R}{\epsilon} = \frac{1}{2}\frac{D}{\epsilon}$

↳ divers n !

Effectivement

$n \simeq \frac{1.05}{\sqrt{\lambda}}$ car $\frac{\bar{U}_c - \bar{U}}{\bar{U}_\tau} = F(\eta)$ ≡ idem pour tous les cas

et $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ dépend de Re_D et de $\frac{\epsilon}{D}$

Ecoulements turbulents en couches limites

Voir slides 26 à 28 dans "RANS equations"

$$\hookrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{V}}{\partial y} = 0 \\ \bar{U}\dfrac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V}\dfrac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \underbrace{\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\overline{U'U'} - \overline{V'V'}\right)}_{\text{négligé}} = \bar{U}_e \dfrac{d\bar{U}_e}{dx} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\nu \dfrac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \underbrace{(-\overline{U'V'})}_{\equiv\, \nu_t \frac{\partial \bar{U}}{\partial y}}\right) \end{cases}$$

- Cas $\bar{U}_e$ constant :

$$\bar{U}\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V}\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{U'U'} - \overline{V'V'}\right)}_{\text{négligé}} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + (-\overline{U'V'})\right)$$

⚠ $\nu \dfrac{\partial \bar{U}}{\partial y} + (-\overline{U'V'})$ n'est pas linéaire en $\eta \triangleq \dfrac{y}{\delta}$

↳ voir figure

Rappel $\delta^* \triangleq \displaystyle\int_0^\delta \left(1 - \frac{\bar{U}}{\bar{U}_e}\right) dy$ ≡ épaisseur de déplacement

$\Theta \triangleq \displaystyle\int_0^\delta \frac{\bar{U}}{\bar{U}_e}\left(1 - \frac{\bar{U}}{\bar{U}_e}\right) dy$ ≡ épaisseur de quantité de mouvement

$C_f \triangleq \dfrac{\bar{\tau}_w}{\frac{1}{2}\rho \bar{U}_e^2}$ ≡ coefficient de frottement

↳ $C_f = 2\dfrac{\bar{U}_\tau^2}{\bar{U}_e^2}$

Cas $\bar{U}_e$ constant : $\boxed{\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{C_f}{2}}$ ≡ équation intégrale de von Karman

- **Région proche de la paroi** ($0 \leq \eta \lesssim 0.11$) :

- Cas hydrauliquement lisse : $\bar{U}^+ = f(y^+)$

  en zone I : $\bar{U}^+ = y^+$

  en zone III-a : $\bar{U}^+ = \frac{1}{\kappa} \log y^+ + C$

- Cas hydrauliquement rugueux

  tout est zone III-a : $\bar{U}^+ = \frac{1}{\kappa} \log\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) + B$

↳ idem qu'en canal !

- **Toute la zone III** :

- cas lisse : $\bar{U}^+ = \left(\frac{1}{\kappa} \log y^+ + C\right) + G(\eta)$

- cas rugueux : $\bar{U}^+ = \left(\frac{1}{\kappa} \log\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) + B\right) + G(\eta)$

↳ $\bar{U}_e^+ - \bar{U}^+ = -\frac{1}{\kappa} \log \eta + \left(G(1) - G(\eta)\right) = F(\eta)$

↳ voir figure

Calibration par Coles

$\kappa \simeq 0.41$ et $C \simeq 5.0$

$G(\eta) = A \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \alpha \eta\right)$ et $A \triangleq \frac{2\Pi}{\kappa}$ avec $\Pi \simeq 0.55$ (voir figures et slide 29)

↳ $A \simeq 2.68$

⚠ δ est défini comme la position y où le modèle pour U^+ atteint un maximum (i.e. à une pente nulle)

$$\frac{d\bar{U}^+}{dy} = \frac{1}{\kappa}\frac{1}{y} + G'(\eta)\frac{1}{\delta}$$

↳ $$\frac{d\bar{U}^+}{d\eta} = \frac{1}{\kappa}\frac{1}{\eta} + G'(\eta)$$

$$\frac{d\bar{U}^+}{d\eta}(\eta=1) = \frac{1}{\kappa} + G'(1) = 0 \iff G'(1) = -\frac{1}{\kappa}$$

$$\iff (\pi\alpha)\sin(\pi\alpha) = -\frac{1}{\kappa}\frac{2}{A} = -\frac{1}{\Pi}$$

$$\boxed{\Pi = 0.55 \implies \alpha = 1.165}$$

Calibration moderne sur base de simulation numérique directe (DNS) à $Re_\tau \simeq 2300$ de Sillero, Jiménez et Moser (2013)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\kappa} \simeq 2.61 \iff \kappa \simeq 0.383 \\ C \simeq 4.25 \end{cases}$$

($\equiv$ près idem qu'en canal à $Re_\tau \simeq 5200$)

↳ $A \simeq 2.85 \iff \Pi \simeq 0.546$