Cours 8/12/21

Nombre de Stanton

$$S_t \triangleq \frac{\bar{q}_w}{\rho \bar{v}_e c(\bar{T}_w - \bar{T}_e)}$$

Nombre de Nusselt

$$Nu \triangleq \frac{\bar{q}_w x}{k(\bar{T}_w - \bar{T}_e)} = \frac{\rho \bar{v}_e x}{\mu} \frac{\mu c}{k} \frac{\bar{q}_w}{\rho \bar{v}_e c(\bar{T}_w - \bar{T}_e)}$$

$$= Re \; Pr \; S_t$$

Pour le cas $Pr = 1$ et $Pr_t = 1$ ($\equiv$ Crocco)

$$S_t = \frac{\bar{q}_w}{\rho \bar{v}_e c(\bar{T}_w - \bar{T}_e)} = -\frac{A}{\rho \bar{v}_e c(\bar{T}_w - \bar{T}_e)} \bar{\tau}_w$$

$$= \frac{\left(c(\bar{T}_w - \bar{T}_e) - \frac{\bar{v}_e^2}{2}\right)}{\rho \bar{v}_e^2 c(\bar{T}_w - \bar{T}_e)} \bar{\tau}_w = \left(1 - \frac{\frac{\bar{v}_e^2}{2}}{c(\bar{T}_w - \bar{T}_e)}\right) \frac{\bar{\tau}_w}{\rho \bar{v}_e^2}$$

Ainsi $\quad C_f \triangleq \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho \bar{v}_e^2}$ et $E_c \triangleq \frac{\bar{v}_e^2}{c|\bar{T}_w - \bar{T}_e|}$

$$\hookrightarrow \boxed{S_t = \left(1 \mp \frac{E_c}{2}\right) \frac{C_f}{2}}$$

$$\begin{cases} \bar{T}_w > \bar{T}_e \Rightarrow \text{signe } - \\ \bar{T}_w < \bar{T}_e \Rightarrow \text{signe } + \end{cases}$$

Cas $E_c \ll 1$ ($\equiv$ cas avec dissipation négligeable)

$$\hookrightarrow \boxed{S_t = \frac{C_f}{2}}$$

Cas $Pr \gtrsim 0.5$ et dissipation négligeable

Besoin que : $(\mu+\mu_t)\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y}\right)^2 \ll \frac{\partial}{\partial y}\left((k+k_t)\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}\right)$

$$\parallel\!\!|$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\frac{\mu}{Pr}+\frac{\mu_t}{Pr_t}\right) c\,\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}\right)$$

⚠ Ce sont les mêmes tourbillons turbulents qui font le transfert turbulent de qté de mouvement

via $\bar{\tau}^t = -\rho\overline{U'V'} = \mu_t \frac{\partial \bar{U}}{\partial y}$

et qui font le transfert turbulent de chaleur

via $\bar{q}^t = \rho c\overline{T'V'} = -k_t\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = -\frac{\mu_t}{Pr_t}\, c\,\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$

$\hookrightarrow \boxed{Pr_t \simeq 1}$

$\hookrightarrow \boxed{\delta_T \simeq \delta}$ car zone III est dominante

Conditions suffisantes pour que la dissipation soit négligeable :

$$\mu\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y}\right)^2 \ll \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \mu_t\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y}\right)^2 \ll \frac{\partial}{\partial y}\left(k_t\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}\right)$$

$$\mu\frac{\bar{U}_e^2}{\delta^2} \ll k\frac{|\bar{T}_w-\bar{T}_e|}{\delta^2} \quad \text{et} \quad \mu_t\frac{\bar{U}_e^2}{\delta^2} \ll k_t\frac{|\bar{T}_w-\bar{T}_e|}{\delta^2}$$

$$\frac{\mu c}{k}\,\frac{\bar{U}_e^2}{c|\bar{T}_w-\bar{T}_e|} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{\mu_t c}{k_t}\,\frac{\bar{U}_e^2}{c|\bar{T}_w-\bar{T}_e|} \ll 1$$

$\hookrightarrow \quad P_r E_c \ll 1 \quad$ et $\quad P_{r_t} E_c \ll 1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \equiv$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad E_c \ll 1 \quad$ car $P_{r_t} \simeq 1$

Comme $P_r \gtrsim 0.5$, il reste $\boxed{P_r E_c \ll 1}$

- <u>Cas lisse</u>

<u>zone I thermique</u> $(k \gg k_t)$

$$\bar{q} = -k \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \bar{q}_w$$

$$-\frac{\mu}{P_r} c \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \bar{q}_w$$

$$-\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = P_r \frac{\bar{q}_w}{\mu c} = P_r \left(\frac{\bar{q}_w}{\rho c \bar{v}_\tau}\right) \frac{\bar{v}_\tau}{\nu}$$

$\boxed{\bar{T}_\tau \triangleq \dfrac{\bar{q}_w}{\rho c \bar{v}_\tau}}$ $\equiv$ Température de transfert

$\equiv$ Température de frottement-transfert

$$\hookrightarrow -\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = P_r \bar{T}_\tau \frac{\bar{v}_\tau}{\nu}$$

$$\hookrightarrow \bar{T}_w - \bar{T} = P_r \bar{T}_\tau \frac{y \bar{v}_\tau}{\nu}$$

$$\boxed{\bar{T}^+ \triangleq \frac{(\bar{T}_w - \bar{T})}{\bar{T}_\tau} = P_r y^+}$$

<u>Cas $P_r = 1$</u> : $\bar{T}^+ = y^+ = v^+$ comme attendu

zone III-a thermique ($k_t \gg k$)

$$\bar{q}^t = -k_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \bar{q}_w$$

$$-\frac{\mu_t c}{P_{r_t}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \bar{q}_w$$

$$-\nu_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = P_{r_t} \frac{\bar{q}_w}{\rho c}$$

$$-\nu_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = P_{r_t} \left(\frac{\bar{q}_w}{\rho c \bar{u}_\tau}\right) \bar{u}_\tau = P_{r_t} \bar{T}_\tau \bar{u}_\tau$$

avec $\nu_t = \kappa y \bar{u}_\tau$

$$\hookrightarrow -\kappa y \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = P_{r_t} \bar{T}_\tau$$

$$-\kappa y^+ \frac{\partial \bar{T}}{\partial y^+} = P_{r_t} \bar{T}_\tau$$

$$\hookrightarrow \bar{T}^+ \triangleq \frac{(\bar{T}_w - \bar{T}_w)}{\bar{T}_\tau} = \frac{P_{r_t}}{\kappa} \log y^+ + A(P_r, P_{r_t})$$

Avec $P_{r_t} = 1$:

$$\boxed{\bar{T}^+ = \frac{1}{\kappa} \log y^+ + A(P_r)} \quad \text{voir figure}$$

avec $A(P_r) = 13\left(P_r^{2/3} - 1\right) + C$

Cas $P_r = 1$: $\bar{T}^+ = \frac{1}{\kappa} \log y^+ + C = \bar{u}^+$ comme attendu

Profil pour toute la zone III (III-a et III-b)

$$\bar{T}^+ = \left(\frac{1}{K}\log y^+ + A(P_r)\right) + G(\eta)$$

Cas $P_r = 1$: $\bar{T}^+ = \bar{U}^+$ comme attendu

Evaluation des profils en $y = \delta$:

$$\frac{\bar{U}_e}{\bar{U}_\tau} = \left(\frac{1}{K}\log\left(\frac{\delta \bar{U}_\tau}{\nu}\right) + C\right) + G(1)$$

$$\frac{(\bar{T}_w - \bar{T}_e)}{\bar{T}_\tau} = \left(\frac{1}{K}\log\left(\frac{\delta \bar{U}_\tau}{\nu}\right) + A\right) + G(1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\bar{U}_e}{\bar{U}_\tau} + (A - C) = \frac{(\bar{T}_w - \bar{T}_e)}{\bar{T}_\tau}$$

$$= (\bar{T}_w - \bar{T}_e)\frac{\rho c \bar{U}_\tau}{\bar{q}_w}$$

$$\frac{\bar{q}_w}{\rho \bar{U}_e c(\bar{T}_w - \bar{T}_e)}\left(\frac{\bar{U}_e}{\bar{U}_\tau} + (A - C)\right) = \frac{\bar{U}_\tau}{\bar{U}_e}$$

$$S_t\left(\sqrt{\frac{2}{C_f}} + (A - C)\right) = \sqrt{\frac{C_f}{2}}$$

$$S_t = \frac{\frac{C_f}{2}}{\left(1 + (A - C)\sqrt{\frac{C_f}{2}}\right)}$$

$$\boxed{S_t = \frac{\frac{C_f}{2}}{\left(1 + 13\left(P_r^{2/3} - 1\right)\sqrt{\frac{C_f}{2}}\right)}} \equiv \text{Petukhov (1970)}$$

Formule approximative de Colburn

$$St \simeq P_r^{-2/3} \frac{C_f}{2}$$ ≡ pris comme en couches limites laminaires ≡ incorrect !

et $C_f \simeq 0.0594 \, R_e^{-1/5}$ ≡ formule approximative de Prandtl

$\hookrightarrow$ $St \simeq 0.0297 \, P_r^{-2/3} R_e^{-1/5}$

$\hookrightarrow$ $Nu = R_e P_r St \simeq 0.0297 \, P_r^{1/3} R_e^{4/5}$

- Cas rugueux (Tout est zone III)

$$\bar{T}^+ \simeq \left(\frac{1}{K} \log\left(\frac{y}{\epsilon}\right) + B \right) + C_T(\eta) = \bar{u}^+$$

$\hookrightarrow$ $\boxed{St \simeq \frac{C_f}{2}}$

Conduites

$\overline{T}^+ = \ldots$ idem qu'en couche limite pour la région proche de la paroi

Seul $G(\eta)$ est différent

$$S_t \triangleq \frac{\overline{q}_w}{\rho \overline{U}_m c (\overline{T}_w - \overline{\overline{T}}_m)}$$

$$N_u \triangleq \frac{\overline{q}_w D}{k(\overline{T}_w - \overline{\overline{T}}_m)} = R_e P_r S_t$$

avec $\overline{U}_m A \triangleq \iint \overline{U}\, dA \iff \overline{U}_m \triangleq \dfrac{\iint \overline{U}\, dA}{A}$

$\overline{\overline{T}}_m \overline{U}_m A \triangleq \iint \overline{T}\,\overline{U}\, dA \iff \overline{\overline{T}}_m \triangleq \dfrac{\iint \overline{T}\,\overline{U}\, dA}{\overline{U}_m A}$

Cas lisse: $\boxed{S_t \simeq \dfrac{\lambda/8}{\left(1 + 13 (P_r^{2/3} - 1)\sqrt{\lambda/8}\right)}}$ = Petukhov

voir figure

Formule approximative de Colburn

$$S_t \simeq 0.023\, P_r^{-2/3} R_e^{-1/5}$$

$\hookrightarrow N_u = R_e P_r S_t \simeq 0.023\, P_r^{1/3} R_e^{4/5}$

Cas rugueux: $\boxed{S_t \simeq \dfrac{\lambda}{8}}$

Cas d'écoulements de gaz

$a = \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$ ≡ vitesse du son

$M = \frac{|u|}{a}$ ≡ nombre de Mach

Condition pour que l'écoulement puisse être considéré comme localement incompressible (voir lmeca 2322):

$\frac{M^2}{4} \ll 1$ (l'erreur relative est $\simeq \frac{M^2}{4}$)

Rappel: $dH = c_p \, dT$ avec c_p la "chaleur spécifique" à pression constante.

$P_r \triangleq \frac{\mu c_p}{k} = \frac{\nu}{\alpha}$ avec $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ et $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$

On remplace c par c_p dans tout ce qui précède

- Couches limites : $\bar{p}$ est constant
  ↳ $\bar{\rho}$ varie peu ⟹ OK

- Conduites : $\bar{p}$ décroit en x car il y a des pertes de charge

$$-\frac{d\bar{p}}{dx} \triangleq \frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{u}_m^2 \frac{\lambda}{D}$$

↳ $\bar{\rho}$ décroit aussi en x car $\bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T}$

↳ pour une conduite avec un grand $\Delta \bar{p} = \bar{p}_{in} - \bar{p}_{out}$, il faut aussi tenir compte de la variation de ρ en x.

↳ **Mieux:** utiliser les équations pour écoulement compressibles! (voir lmeca 2322)