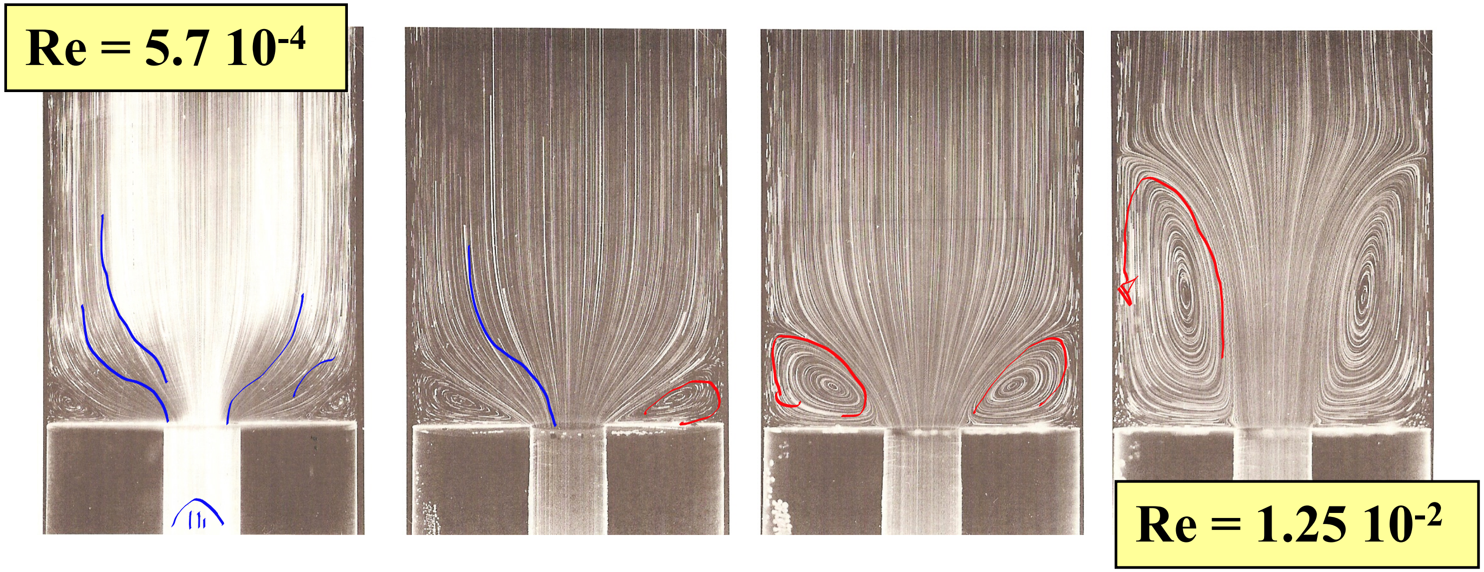
Ecoulements incompressibles stationnaires

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} &= 0 \\
\rho(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} &= -\boldsymbol{\nabla} p + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

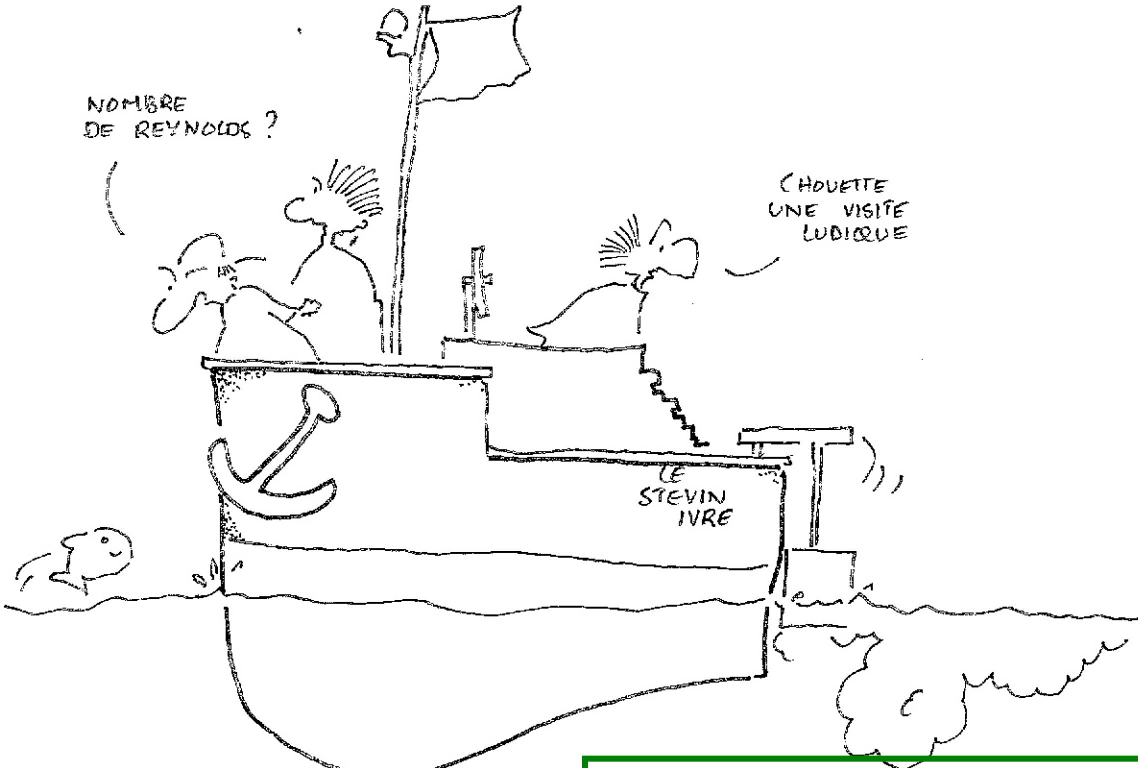
Ecoulement incompressible stationnaire d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants, sans forces de volume.



(Boger, Hur, Binnington, JNFM 1986)

Adimensionaliser : pourquoi ?

$Re = \rho \frac{VL}{\mu}$



$$
\begin{aligned}
U &= 0.1 \; m/s \\
L &= 10 \; m \\
\rho &= 10^3 \; kg/m^3 \\
\mu &= 10^{-3} \; kg/ms
\end{aligned}
$$

$$\boxed{Re = \frac{\rho U L}{\mu} = 10^6}$$

$\boxed{1}$ ADIMENSIONNALISER !

SO FUN :-)

SO HARD :-C

FLUIDE NEWTONIEN
PR. MAT CONSTANTES
ECOUL. INCOMPRESS. STATIONNAIRE

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla \cdot v = 0 \\ &\rho (v \cdot \nabla) v = -\nabla p + \mu \nabla^2 v \end{aligned}}$$

$$\Big\downarrow \quad x' = \frac{x}{L} \qquad v' = \frac{v}{U} \qquad p' = \frac{p - p_0}{\rho U^2}$$

$$[kg/m^3][m^2/s^2] = [kg/ms^2]$$
$$[N/m^2] = [Pa]$$

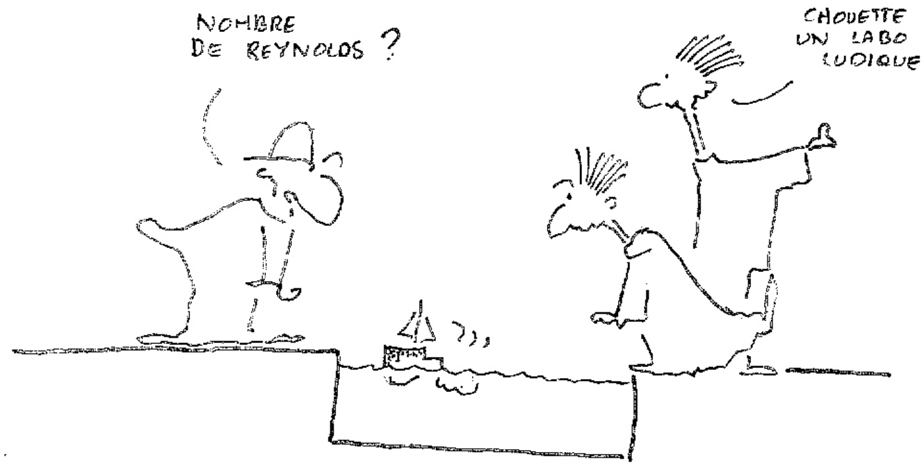
$$\nabla' \cdot v' = 0$$

$$\frac{\rho U^2}{L} (v' \cdot \nabla') v' = -\frac{\rho U^2}{L} \nabla' p' + \underbrace{\mu \frac{U}{L^2}}_{} (\nabla'^2 v')$$

$$\underbrace{\frac{\mu U}{L^2} \quad \frac{L}{\rho U^2}}_{} \quad \frac{\rho U^2}{L}$$

$$\frac{\mu}{\rho U L} = \frac{1}{Re}$$

Adimensionaliser : pourquoi ?



$$\begin{aligned} U &= 10\ m/s \\ L &= 0.1\ m \\ \rho &= 10^3\ kg/m^3 \\ \mu &= 10^{-3}\ kg/ms \end{aligned}$$

$$\boxed{Re = \frac{\rho U L}{\mu} = 10^6}$$

Adimensionaliser

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\
\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= \frac{\mathbf{x}}{L}, \\
\mathbf{v}' &= \frac{\mathbf{v}}{U}, \\
p' &= \frac{p - \boxed{p_0}}{\rho U^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla' \cdot \mathbf{v}' &= 0 \\
(\mathbf{v}' \cdot \nabla')\mathbf{v}' &= -\nabla' p' + \frac{1}{Re}(\nabla')^2 \mathbf{v}'
\end{aligned}
$$

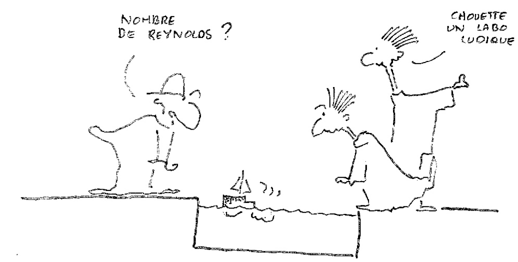
Dans un écoulement incompressible, seul un écart de pression peut être caractéristique… Ajouter ou retirer une pression constante ne change rien à l'écoulement !

En variables adimensionnelles,

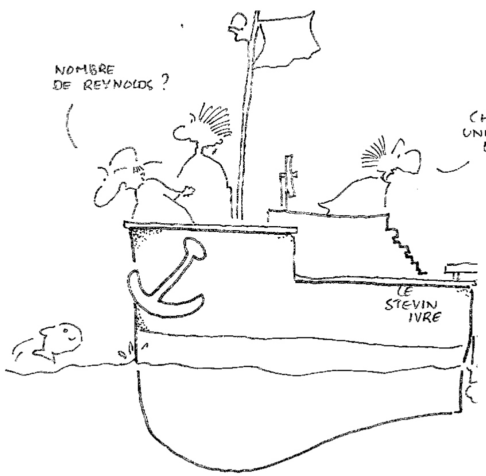
$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} = 10^6$$

Ils ont le même nombre de Reynolds :-)

$$\begin{aligned} U &= 10\ m/s \\ L &= 0.1\ m \\ \rho &= 10^3\ kg/m^3 \\ \mu &= 10^{-3}\ kg/ms \end{aligned}$$



$$\frac{p_{mer}(\mathbf{x}) - p_{mer}(0)}{\rho U_{mer}^2} = p'_{mer}(\mathbf{x}') = p'_{labo}(\mathbf{x}') = \frac{p_{labo}(\mathbf{x}) - p_{labo}(0)}{\rho U_{labo}^2}$$



$$\begin{aligned} U &= 0.1\ m/s \\ L &= 10\ m \\ \rho &= 10^3\ kg/m^3 \\ \mu &= 10^{-3}\ kg/ms \end{aligned}$$

…ces deux écoulements sont identiques.

C'est quoi physiquement le nombre de Reynolds ?

Effets visqueux
Diffusion de la quantité de mouvement

$$\boxed{\rho(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} \quad \mathcal{O}(\rho U^2/L)} = -\boldsymbol{\nabla}p + \boxed{\mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{v} \quad \mathcal{O}(\mu U/L^2)}$$

Effets d'inertie
Transport de la quantité de mouvement

$\rho U^2/L$

$\mu U/L^2$

$$Re = \frac{\boxed{\text{Forces d'inertie}}}{\boxed{\text{Forces visqueuses}}} = \frac{\rho U^2/L}{\mu U/L^2} = \frac{\rho U L}{\mu}$$

Nombre de Reynolds

caractérise un écoulement d'un fluide !

$$Re = \frac{\rho_0 u_0 L}{\mu}$$

à éventuellement savoir, à titre de *double check*

Born: 23 Aug 1842 in Belfast, Ireland

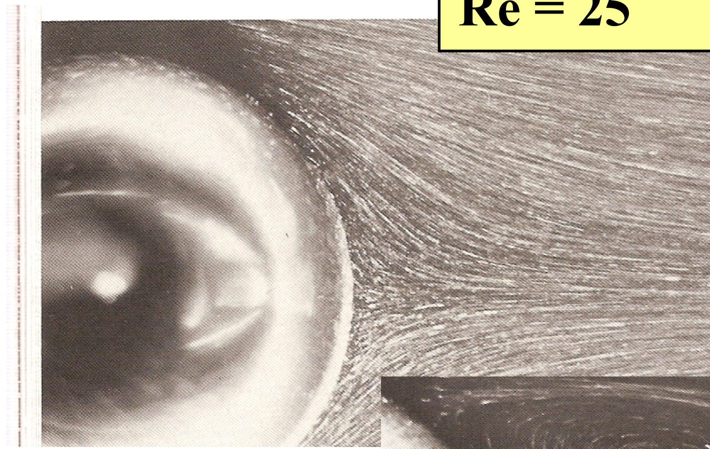
Died: 21 Feb 1912 in Watchet, Somerset, England

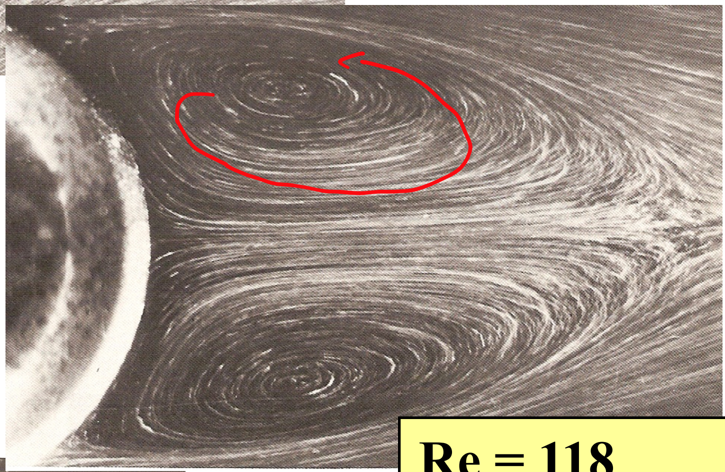
$$\frac{\textbf{Forces d'inertie}}{\textbf{Forces de viscosité}}$$

à savoir !

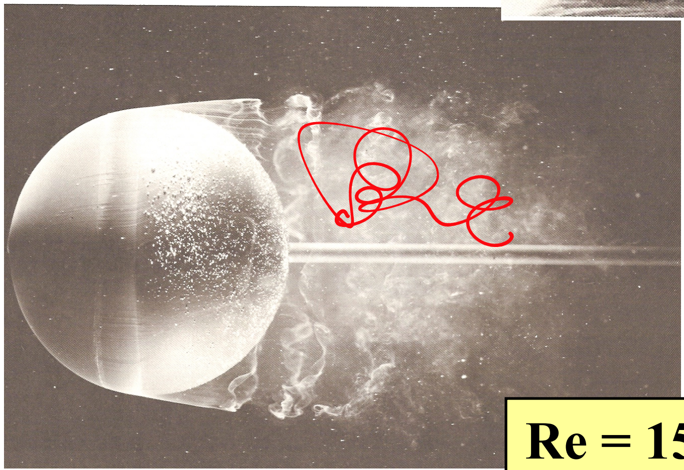
Que se passe-t-il lorsque l'on augmente le nombre de Re ?

Re = 25





Re = 118



Re = 15000

(Van Dyke, 1982)

Re très très petit…

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} &= 0 \\
0 &= -\boldsymbol{\nabla} p + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

Le terme d'inertie est négligeable

Ecoulements incompressibles rampants

Equations de Stokes

Le terme visqueux est négligeable

Ecoulements incompressibles irrotationnels

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} &= 0 \\
\rho (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \mathbf{v} &= -\boldsymbol{\nabla} p
\end{aligned}
$$

…et Re très très grand !

Equations d'Euler

Et le thermique…

Ecoulement incompressible d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants.

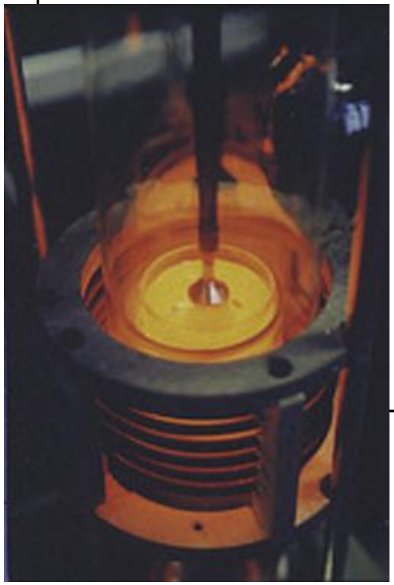
Les équations de continuité et de quantité de mouvement ne font pas intervenir la température : on peut résoudre la dynamique de l'écoulement sans tenir compte des aspects thermiques !

Etape 1

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}, \end{aligned}$$

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + k\nabla^2 T,$$

Etape 2



Une fois la dynamique de l'écoulement connue, on peut ensuite résoudre le problème thermique…

$\boxed{2}$ VISCOSITE CINEMATIQUE
DIFFUSIVITE THERMIQUE

$P \triangleq \frac{p}{\rho}$

VISCOSITE DYNAMIQUE

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} = \underbrace{\frac{\mu}{\rho}}_{\nu}\,\nabla^2 \mathbf{v} \;\overbrace{-\; \frac{1}{\rho}\,\nabla p}^{-\nabla P}$$

ν VISCOSITE CINEMATIQUE $\left[\frac{m^2}{s}\right]$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,T = \underbrace{\frac{k}{\rho c}}_{\alpha}\,\nabla^2 T + \frac{2\mu}{\rho c}\,\mathbf{d} : \mathbf{d}$$

α DIFFUSIVITE THERMIQUE $\left[\frac{m^2}{s}\right]$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$Re = \rho \frac{UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu}$$

$\nabla \underset{\sim}{v}$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \qquad \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

WINCKELMANS

CHATELAIN
GAZOU

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$(\nabla \underset{\sim}{v}) \cdot \underset{\sim}{v} = (\underset{\sim}{v} \cdot \nabla) \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v} \cdot \nabla \underset{\sim}{v}$$

WINCKELMAN

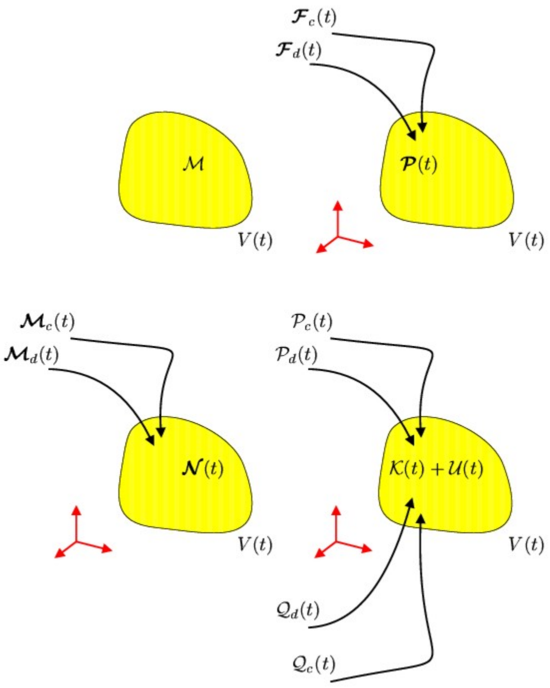
GAZOU

Principes physiques universels !

Lois de conservation

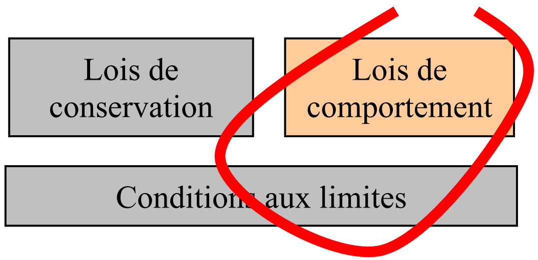
Lois de comportement

Conditions aux limites



Conservation de la masse,
de la quantité de mouvement,
du moment de la quantité de mouvement
et de l'énergie.

Lois de comportement très approximatives…



$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= -p\boldsymbol{\delta} + 3\hat{\kappa}(p,T)\mathbf{d}^s + 2\hat{\mu}(p,T)\mathbf{d}^d, \\
&\boxed{\mathbf{q} = -\hat{k}(p,T)\boldsymbol{\nabla}T,} \\
\rho &= \hat{\rho}(p,T), \\
H &= \hat{H}(p,T), \\
S &= \hat{S}(p,T).
\end{aligned}
$$

Loi de Fourier

Modèle du fluide visqueux Newtonien

Mécanismes
du transfert conductif

L'énergie se propage du chaud vers le froid

Le point de vue microscopique…

On examine le transfert d'énergie entre porteurs du milieu considéré. La fonction de distribution des porteurs est régie par l'équation de Boltzmann de la théorie cinétique.

$$\mathbf{q} = -k\boldsymbol{\nabla}T$$

Matériau	$k\,(W/mK)$
eau (à pression atmosphérique)	0.67
cuivre	380
aluminium	260
acier	45

Isolants	***10^{-2} W/mK***
Métaux	***10^{2} W/mK***

Lois de conservation

Lois de comportement

Conditions aux limites

L'approche phénomélogique…

Un flux thermique dans un corps est lié à l'existence d'un gradient de température. L'équation de Fourier relie ces deux grandeurs.

Validité
de la loi de Fourier…

$$\boxed{\mathbf{q}} = -k\boxed{\boldsymbol{\nabla} T}$$

L'effet (le flux de chaleur) est proportionnel
à la cause (le gradient de température)

Toutefois, lorsqu'on observe un déséquilibre thermique initial, il faut un temps très faible, mais fini de l'ordre de grandeur du temps moyen entre collisions pour que les porteurs donnent naissance au flux thermique…

L'absence d'inertie dans l'expression de Fourier conduit à une vitesse de propagation infinie dans l'équation de la chaleur (équation parabolique)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = r + \boldsymbol{\nabla} \cdot (k \boldsymbol{\nabla} T)$$

Diffusivité thermique

$$\boxed{\alpha = \frac{k}{\rho c}}$$

Caractérise la facilité avec laquelle un flux de chaleur transmis à un solide se traduit par un relèvement de température

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = r + \nabla \cdot (k \nabla T)$$

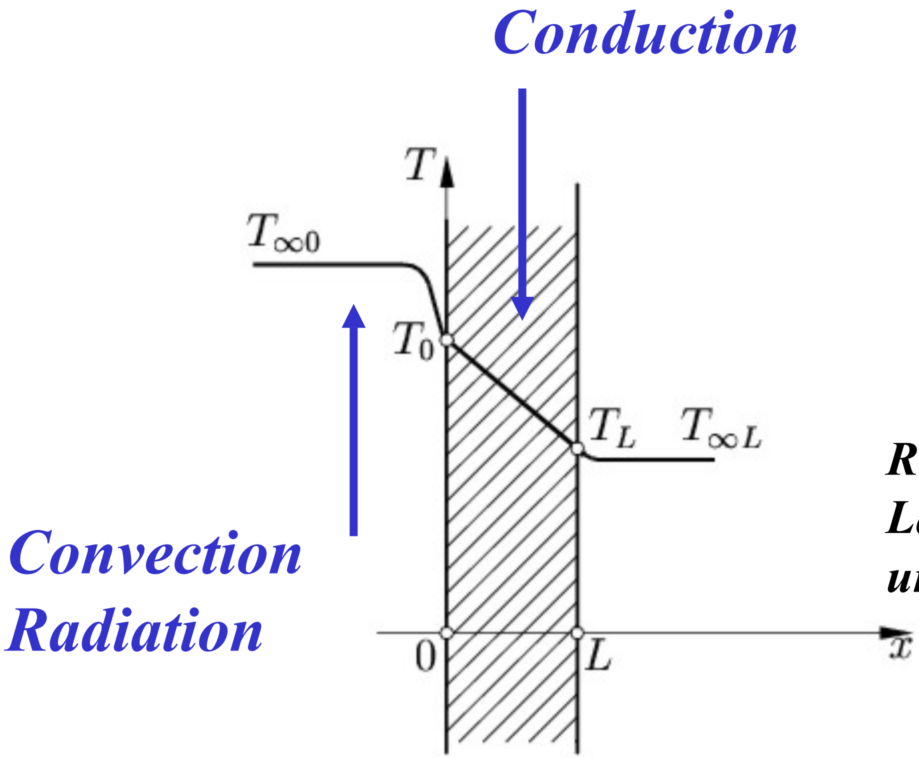
$$\downarrow$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{r}{k} + \nabla^2 T$$

Matériau	Argent	Cuivre	Acier	Verre
$10^6 \alpha \, m^2/s$	170	103	12.9	0.59
	$9.5 \, min$	$16.5 \, min$	$2.2 \, h$	$2.0 \, jours$

Milieu semi infini soumis initialement à température nulle
Surface externe mise à 100 degrés.
Temps requis pour avoir 50 degrés à 30 cm

Conduction dans une plaque soumise à la convection



Radiateur domestique : h = 15 W/m²K
La convection libre et le rayonnement ont une contribution plus ou moins identique

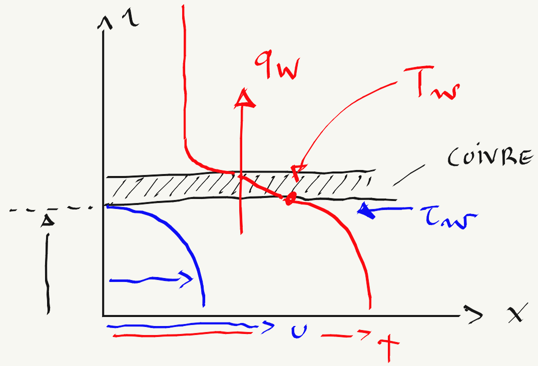
régime permanent

$\boxed{3}$

ECOULEMENT DE L'EAU CHAUDE DANS UN TUYAU :-)

C'EST MARCEL LE PLOMBIER

CHAUFFAGE WINCKY & FILS



ECOULEMENT DANS LE TUYAU

$$u(r) = 2u_m\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

$$\frac{du}{dr}(r) = -\frac{4u_m}{R}\,\frac{r}{R}$$

ECOULEMENT ETABLI

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0$$

u :-)

TRANSFERT THERMIQUE ETABLI

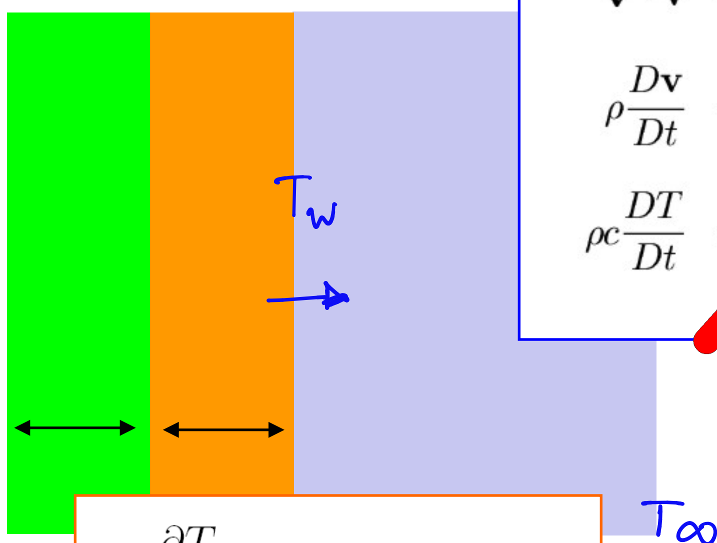
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T_w(x) - T(x,r)\right] = 0$$

$$\frac{dT_w}{dx} = \frac{\partial T}{\partial x}$$

$\boxed{2\ \text{CAS}}$

- T_w CST
- T_w LINEAIRE

Un problème pas aussi élémentaire que prévu…



$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} &= 0,\\
\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\boldsymbol{\nabla}p + \boldsymbol{\nabla}\cdot(2\mu\mathbf{d}) + \rho\mathbf{g},\\
\rho c\frac{DT}{Dt} &= 2\mu(\mathbf{d}:\mathbf{d}) + r + \boldsymbol{\nabla}\cdot(k\boldsymbol{\nabla}T),
\end{aligned}$$

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n} = -h\Delta T$$

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = r + \boldsymbol{\nabla}\cdot(k\boldsymbol{\nabla}T)$$

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = r + \boldsymbol{\nabla}\cdot(k\boldsymbol{\nabla}T)$$

Simplifions-le !

Loi de Newton

$$\boxed{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -h\Delta T}$$

Lois de conservation

Lois de comportement

Conditions aux limites

Type de transfert	Fluide	$h(W/m^2K)$
Convection forcée	gaz	10...300
	liquide aqueux	500...12000
	huile	50...1700
	métal liquide	6000...110000
Convection naturelle	gaz	5...30
	liquide aqueux	100...1000
Changement de phase	eau, ébullition	3000...60000
	eau, condensation	5000...110000

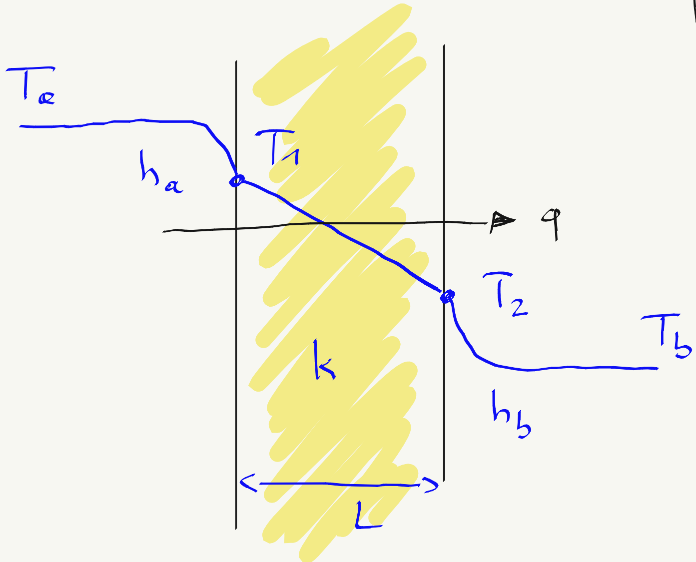
4

DANS LA PAROI !

$$k \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad \sim \quad \frac{\partial}{\partial x}(q) = 0$$

$$q = -k \frac{dT}{dx} \qquad \text{FOURIER}$$

$$q = h \, \Delta T \qquad \text{NEWTON}$$



$\longrightarrow$ q CST

$$q = h_a (T_a - T_1)$$

$$q = k \left(\frac{T_1 - T_2}{L} \right)$$

$$q = h_b (T_2 - T_b)$$

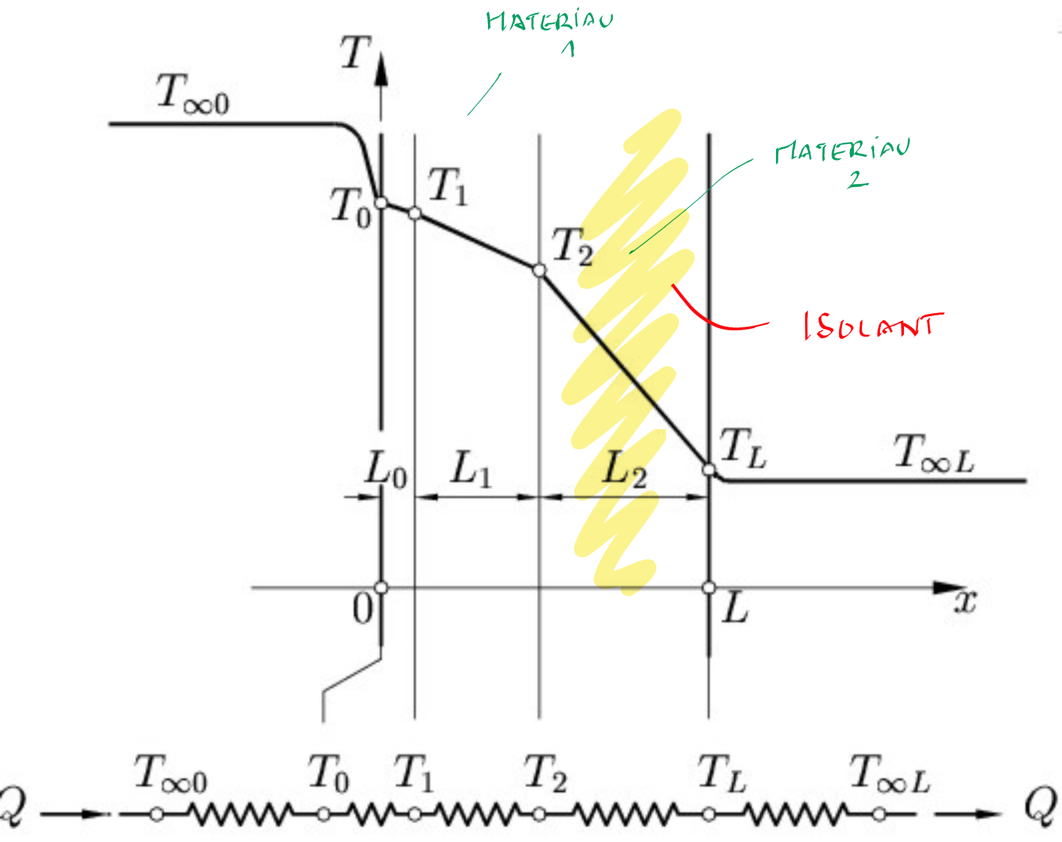
$$T_a - \cancel{T_1} = \frac{q}{h_a}$$

$$\cancel{T_1} - \cancel{T_2} = \frac{q}{k/L}$$

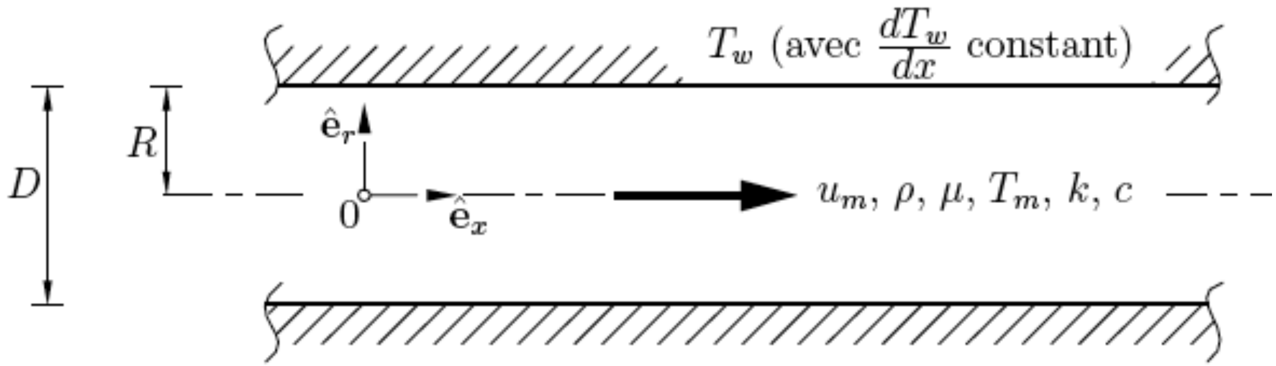
$$\cancel{T_2} - T_b = \frac{q}{h_b}$$

$$\left[T_a - T_b \right] = q \left[\frac{1}{h_a} + \frac{L}{k} + \frac{1}{h_b} \right]$$

Conduction dans une plaque soumise à la convection



analogie avec l'électricité
- résistance convective
- résistance conductive

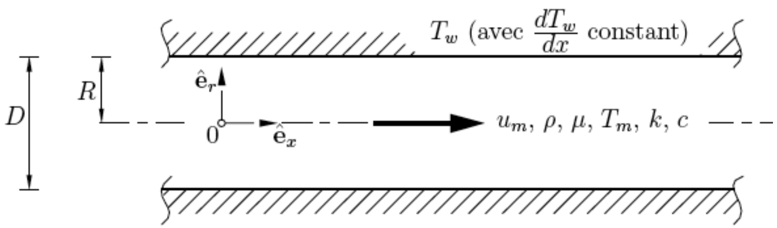


$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}(T - T_w) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_w}{dx}}$$

Transfert de chaleur établi

L'écoulement est établi lorsque le profil de la différence de températures du fluide et de la paroi reste constante le long de l'axe de la coonduite !

Cela suppose que l'écoulement est établi !

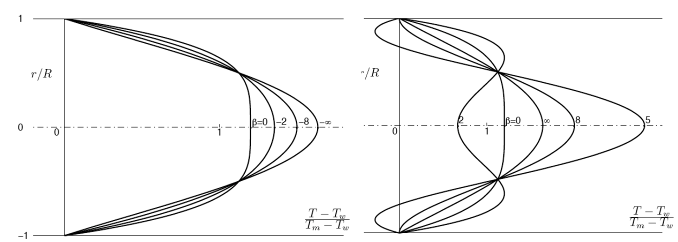


T_w constante

Si T_w constante…

$$\rho\, c \frac{dT_w}{dx}\, 2\, u_m \cancel{\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)} = k \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}(T-T_w)\right) + 16\,\mu \frac{{u_m}^2}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Deux cas particuliers



T_w linéaire

$\boxed{5}$ DANS LE TUYAU...

$$\underbrace{\cancel{\rho c u \frac{\partial T}{\partial x}}}_{\text{CHALEUR TRANSPORTÉE}} = \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r k \frac{\partial T}{\partial r}\right)}_{\text{DIFFUSION}} + \underbrace{\mu \left(\frac{du}{dr}\right)^2}_{\text{DISSIPATION VISQUEUSE}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{CAS } 1 \\ T_w = ct\end{array}}$$

$$\frac{du}{dr} = -\frac{4 u_m}{R}\frac{r}{R}$$

$$2 \rho c u_m \cancel{\frac{dT_w}{dx}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = k \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r \frac{dT}{dr}\right] + 16 \mu \frac{u_m^2}{R^2}\frac{r^2}{R^2}$$

$$k \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r \frac{dT}{dr}\right] = -16 \mu u_m^2 \frac{r^2}{R^4}$$

$$\frac{d}{dr}\left[r \frac{dT}{dr}\right] = -\frac{16 \mu u_m^2}{k}\frac{r^3}{R^4}$$

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{4 \mu u_m^2}{k}\frac{r^4}{R^4} + A$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{4 \mu u_m^2}{k}\frac{r^3}{R^4} + \frac{A}{r}$$

$$T(r) = -\frac{\mu u_m^2}{k}\frac{r^4}{R^4} + \cancel{A \ln(r)} + B$$

$$\boxed{\eta = \frac{r}{R}}$$

$$T(r) - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k}\left(1 - \eta^4\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{CAS 2}\\ \dfrac{dT_w}{dx} = cst\end{array}}$$

$$2\rho c u_m \frac{dT_w}{dx}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) = k\,\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\,\frac{dT}{dr}\right] + 16\mu\,\frac{u_m^2}{R^2}\,\frac{r^2}{R^2}$$

$$k\,\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\,\frac{dT}{dr}\right] = -16\mu u_m^2\,\frac{r^2}{R^4} + 2\rho c u_m \frac{dT_w}{dx}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$\frac{d}{dr}\left[r\,\frac{dT}{dr}\right] = -\frac{16\mu u_m^2}{k}\,\frac{r^3}{R^4} + \frac{2\rho c u_m}{k}\frac{dT_w}{dx}\left(r-\frac{r^3}{R^2}\right)$$

$$r\,\frac{dT}{dr} = -\frac{4\mu u_m^2}{k}\,\frac{r^4}{R^4} + A + \ldots\ldots\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4R^2}\right)$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{4\mu u_m^2}{k}\,\frac{r^3}{R^4} + \frac{A}{r} + \ldots\ldots\left(\frac{r}{2}-\frac{r^3}{4R^2}\right)$$

$$T(r) = -\frac{\mu u_m^2}{k}\,\frac{r^4}{R^4} + \cancel{A\log(r)} + B + \ldots\ldots\left(\frac{r^2}{4}-\frac{r^4}{16R^2}\right)$$

$$T(r) - T_w = \boxed{\underbrace{\frac{\mu u_m^2}{k}}\left(1-\eta^4\right)} - \boxed{\underbrace{\frac{2\rho c u_m}{k}\,\frac{dT_w}{dx}\,\frac{R^2}{16}}_{\frac{\mu u_m^2}{k}\,\frac{\mathcal{B}}{8}}\left(\eta^4-4\eta^2+3\right)}$$

POUR QUE

$T(R) - T_w = 0$

$$\left[\frac{kg}{m\,s}\right]\left[\frac{m^2}{s^2}\right]\left[\frac{m\,K}{W}\right]$$

$$\left[\frac{\cancel{kg}}{\cancel{m}\,\cancel{s}}\right]\left[\frac{\cancel{m}\,\cancel{m}}{\cancel{s}\,\cancel{s}}\right]\left[\frac{\cancel{m}\,K\,\cancel{s^2}\,\cancel{s}}{\cancel{kg}\,\cancel{m}\,\cancel{m}}\right]$$

$$\boxed{\mathcal{B} \triangleq \rho c\,\frac{dT_w}{dx}\,\frac{R^2}{u_m\,\mu}}$$

$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)$$

T_w constante

Si T_w constante…

$$\rho\, c\, \frac{dT_w}{dx}\, 2\, u_m \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) = k\, \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{d}{dr}\left(T - T_w\right)\right) + 16\, \mu \frac{{u_m}^2}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right) - \frac{1}{8}\, \frac{\rho\, c}{k}\, \frac{dT_w}{dx}\, u_m\, R^2 \left(3 - 4\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)$$

T_w linéaire

Un nombre adimensionnel qui mesure le rapport entre deux effets !

$$\beta = \rho\, c\, \frac{dT_w}{dx}\, \frac{R^2}{\mu\, u_m}$$

$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left[\boxed{\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)} - \frac{1}{8}\beta\, \boxed{\left(3 - 4\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)}\right]$$

Effets de dissipation visqueuse
Transformation d'énergie

Effets de convection
Transport de l'énergie