Et le thermique…

Ecoulement incompressible d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants.

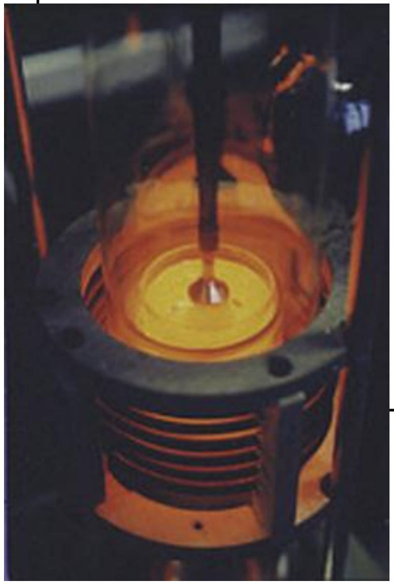
Les équations de continuité et de quantité de mouvement ne font pas intervenir la température : on peut résoudre la dynamique de l'écoulement sans tenir compte des aspects thermiques !

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g},\end{aligned}$$

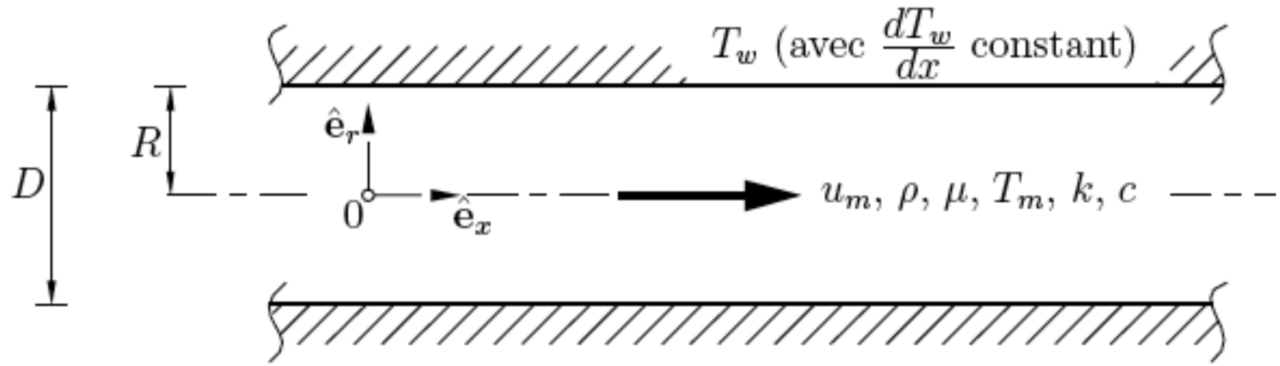
Etape 1

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + k\nabla^2 T,$$

Etape 2



Une fois la dynamique de l'écoulement connue, on peut ensuite résoudre le problème thermique…

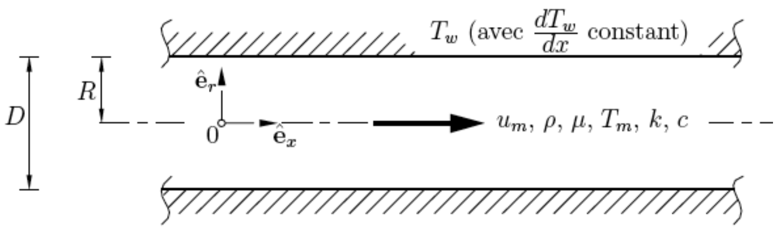


$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}(T - T_w) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_w}{dx}}$$

Transfert de chaleur établi

L'écoulement est établi lorsque le profil de la différence de températures du fluide et de la paroi reste constante le long de l'axe de la coonduite !

Cela suppose que l'écoulement est établi !

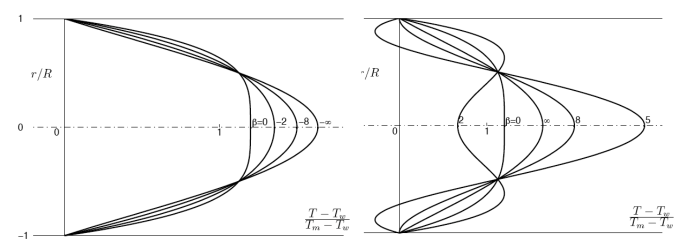


T_w constante

Si T_w constante…

$$\rho\, c\, \frac{dT_w}{dx}\, 2\, u_m \left(\cancel{1} - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) = k\, \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} (T - T_w) \right) + 16\, \mu \frac{{u_m}^2}{R^2} \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Deux cas particuliers



T_w linéaire

$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)$$

T_w constante

Si T_w constante…

$$\rho\, c\, \frac{dT_w}{dx}\, 2\, u_m \cancel{\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)} = k\, \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} (T - T_w)\right) + 16\, \mu \frac{{u_m}^2}{R^2} \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right) - \frac{1}{8} \frac{\rho\, c}{k} \frac{dT_w}{dx}\, u_m\, R^2 \left(3 - 4 \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)$$

T_w linéaire

Un nombre adimensionnel qui mesure le rapport entre deux effets !

$$\beta = \rho\, c\, \frac{dT_w}{dx}\, \frac{R^2}{\mu\, u_m}$$

$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left[\boxed{\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)} - \frac{1}{8}\,\beta\, \boxed{\left(3 - 4\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)}\right]$$

Effets de dissipation visqueuse
Transformation d'énergie

Effets de convection
Transport de l'énergie

1 LE PETIT FRERE DE Re : PECLET :-)

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad \alpha = \frac{k}{\rho c}$$

$$\underbrace{\rho(\underline{v}\cdot\underline{\nabla})\underline{v}}_{\text{TRANSPORT DE QUANTITE DE MVT}} = \underbrace{\mu \nabla^2 \underline{v}}_{\text{DIFFUSION QUANTITE DE MVT}} - \underline{\nabla} p$$

$$\underbrace{\rho c(\underline{v}\cdot\underline{\nabla})T}_{\text{TRANSPORT DE PUISSANCE}} = 2\mu\, \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}} + \underbrace{k \nabla^2 T}_{\text{DIFFUSION DE PUISSANCE}}$$

$$\boxed{Re = \frac{\rho U^2/L}{\mu U/L^2} = \frac{\rho U L}{\mu}}$$

$$\boxed{P_e = \frac{\rho c U \cancel{\Delta T}/L}{k \cancel{\Delta T}/L^2} = \frac{\rho c U L}{k}}$$

$$\boxed{P_r = \frac{P_e}{R_e} = \frac{\mu c}{k} = \frac{\nu}{\alpha}}$$

Le petit frère de Reynolds : Péclet

Effets de conduction
Diffusion de l'énergie

$$\boxed{\underset{\mathcal{O}(\rho c U \Delta T / L)}{\rho c(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})T}} = 2\mu(\mathbf{d}:\mathbf{d}) + r + \boxed{\underset{\mathcal{O}(k\Delta T/L^2)}{k\boldsymbol{\nabla}^2 T}}$$

Effets de convection
Transport de l'énergie

$$Pe = \frac{\boxed{\text{Energie transportée}}}{\boxed{\text{Energie diffusée}}} = \frac{\rho c U \Delta T / L}{k \Delta T / L^2} = \frac{\rho c U L}{k}$$

Oui : c’est bien le petit frère !

Effets visqueux
Diffusion de la quantité
de mouvement

$$\boxed{\rho(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} \quad \mathcal{O}(\rho U^2/L)} = -\boldsymbol{\nabla}p + \boxed{\mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{v} \quad \mathcal{O}(\mu U/L^2)}$$

Effets d’inertie
Transport de la quantité
de mouvementc

$$Re = \frac{\boxed{\text{Forces d'inertie}}}{\boxed{\text{Forces visqueuses}}} = \frac{\rho U^2/L}{\mu U/L^2} = \frac{\rho U L}{\mu}$$

Nombre de Péclet

caractérise le transfert de chaleur d'un écoulement d'un fluide !

$$Pe = \frac{\rho_0 u_0 L c_p}{k}$$

Born: 10 Feb 1793 in Besancon, France

Died: 6 Dec 1857 in Paris, France

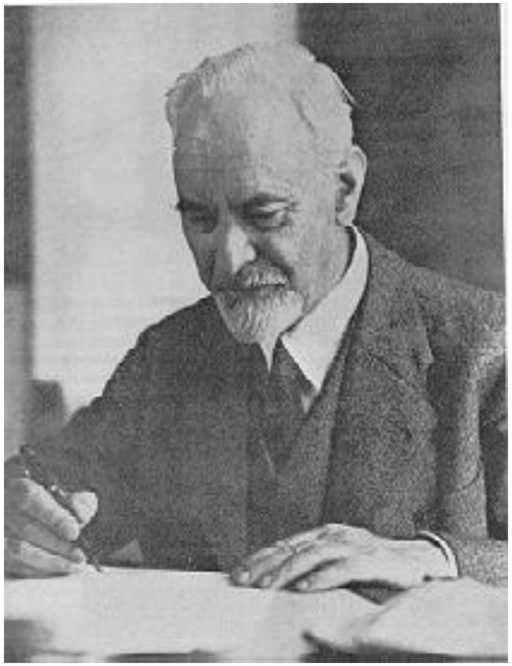
$$\frac{\text{Puissance transportée}}{\text{Puissance diffusée}}$$

à savoir !

Nombre de Prandtl

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k}$$

caractérise un fluide !



Born: 1875 in Freising, Germany

Died: 1953 in Gottingen, Germany

$$\frac{\text{Peclet} = \text{Effets de convection / effets de conduction}}{\text{Reynold} = \text{Effets d'inertie / effets de viscosité}}$$

à savoir !

Une grande famille !

Effets de conduction
Diffusion de l'énergie

$$\rho c(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})T = 2\mu(\mathbf{d}:\mathbf{d}) + r + k\boldsymbol{\nabla}^2 T$$

$\mathcal{O}(\rho c U \Delta T/L)$ $\mathcal{O}(\mu U^2/L^2)$ $\mathcal{O}(k\Delta T/L^2)$

Effets de convection
Transport de l'énergie

Effets de dissipation visqueuse
Transformation d'énergie

$$Pe = \frac{{\color{red}\blacksquare}}{{\color{green}\blacksquare}} \qquad Pr\ Ec = \frac{{\color{blue}\blacksquare}}{{\color{green}\blacksquare}} \qquad \beta = \frac{Re}{Ec} = \frac{{\color{red}\blacksquare}}{{\color{blue}\blacksquare}}$$

$$Ec = \frac{\text{Energie cinétique}}{\text{Energie interne}} = \frac{\rho U^2}{\rho c\Delta T} = \frac{U^2}{c\Delta T}$$

$\boxed{2}$ $\beta = \rho c \dfrac{dT_w}{dx} \dfrac{R^2}{\mu U_m}$

$$\rho c \, \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{\nabla} T = 2\mu \, \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}} + k \, \underset{\sim}{\nabla}^2 T$$

TRANSPORT DE PUISSANCE

DISSIPATION VISQUEUSE

DIFFUSION DE PUISSANCE

- $\beta = 0$ PAS DE PUISSANCE TRANSPOREE $\dfrac{dT_w}{dx} = 0$

- $\beta \to \infty$ PAS DE DISSIPATION VISQUEUSE MAIS $\dfrac{dT_w}{dx} \neq 0$

$$\beta = \rho c \frac{dT_w}{dx}\frac{R^2}{\mu U_m}$$

TRANSPORT DE QUANTITE DE MVT

$\rho U^2/L$

$\mu U^2/L^2$

DIFFUSION QUANTITE DE MVT

$$\rho(\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{\nabla})\underset{\sim}{v} = \mu \nabla^2 \underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{\nabla} p$$

$$\rho c(\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{\nabla})T = 2\mu\, \underset{\approx}{d} : \underset{\approx}{d} + k\nabla^2 T$$

$k\Delta T/L^2$

DIFFUSION DE PUISSANCE

TRANSPORT DE PUISSANCE $\rho c U \Delta T/L$

$$E_c = \frac{\overbrace{\rho U^2/L}^{\text{FORCE}}\ \overset{\text{VITESSE}}{U}}{\underbrace{\rho c U \Delta T/L}_{\text{PUISSANCE}}} = \frac{U^2}{c\Delta T} = \frac{\text{ENERGIE CINETIQUE}}{\text{ENERGIE INTERNE}}$$

$$= \frac{\mu U^2/L^2}{k\Delta T/L^2} = \underbrace{\frac{\mu U^2}{k\Delta T}}_{Pr\ Ec}$$

$$= \frac{Re}{E_c} = \beta$$

$$\sim$$

$$\frac{\rho c \Delta T L}{\mu U} = \frac{\rho c \cancel{U} \Delta T}{\cancel{L}}\frac{L^{\cancel{2}}}{\mu U^{\cancel{2}}}$$

Nombre d'Eckert

$$Ec = \frac{u_e^2}{c(T_w - T_e)}$$

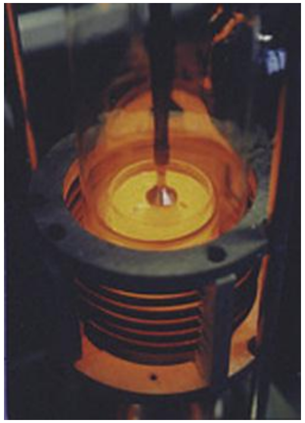
Picture was taken on August 22, 2000

caractérise un écoulement d'un fluide !

$$\frac{\text{Energie cinétique}}{\text{Energie interne}}$$

Transferts de chaleur stationnaires

$$\rho c(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})T = 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + k\boldsymbol{\nabla}^2 T$$



$\hat{C}_f = \frac{\tau_w}{\mu U/L}$

Nombre de Reynolds : Re

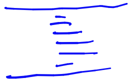
Nombre de Péclet : Pe

Nombre de Prandtl : Pr $= \frac{Pe}{Re}$

Nombre d'Eckert : Ec

$Bi = \frac{q_w}{k_s \Delta T/L}$

$C_f = \frac{\tau_w}{\rho U^2/2}$



Nombre de Nusselt : Nu

Nombre de Biot : Bi

Coeff de frottement : C_f

Nombre de Stanton : St

$Nu = \frac{q_w}{k_f \Delta T/R}$

Pertes de charges : λ

$St = \frac{q_w}{\rho c U \Delta T}$

Nombre de Nusselt

$$Nu = \frac{q_w}{k\Delta T/2R}$$

caractérise une condition d'interface !

Born: 25 Nov 1882 in Nurnberg, Germany

Died: 1 Sep 1957 in Munchen, Germany

$$\frac{\textbf{Flux de chaleur à la paroi}}{\textbf{Flux de chaleur diffusé dans l'écoulement}}$$

Nombre de Biot

Born: 21 April 1774, Paris, France

Died: 3 Feb 1862, Paris, France

$$Bi = \frac{q_w}{k\Delta T/L}$$

caractérise une condition d'interface !

Flux de chaleur à la paroi

Flux de chaleur diffusé dans le solide

Le Nusselt et le Biot de l'ex-tuyau en plomb de ma salle de bain :-)

$$Nu = \frac{q_w}{k\Delta T/2R}$$

Ecoulement de l'air dans la salle de bain

Flux conductif de l'air !

Ecoulement de l'eau dans le tuyau !

Flux conductif de l'eau chaude

$$Nu = \frac{q_w}{k\Delta T/2R}$$

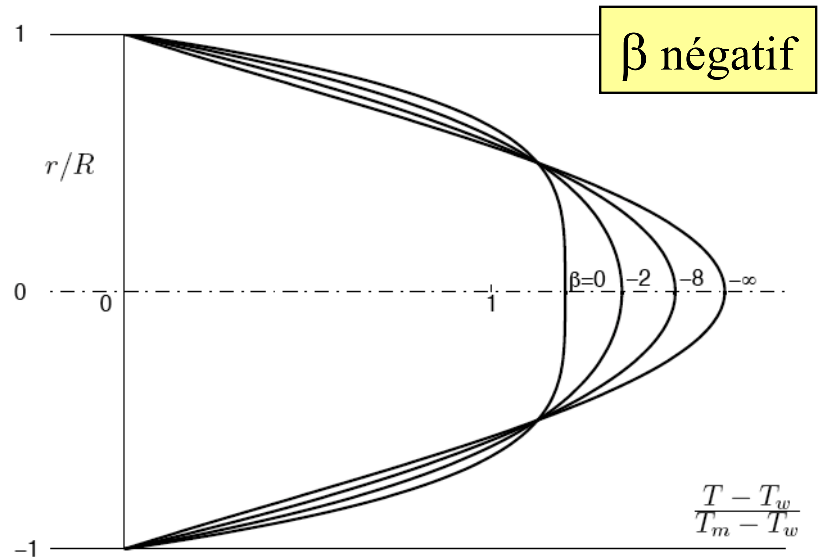
$$Bi = \frac{q_w}{k\Delta T/L}$$

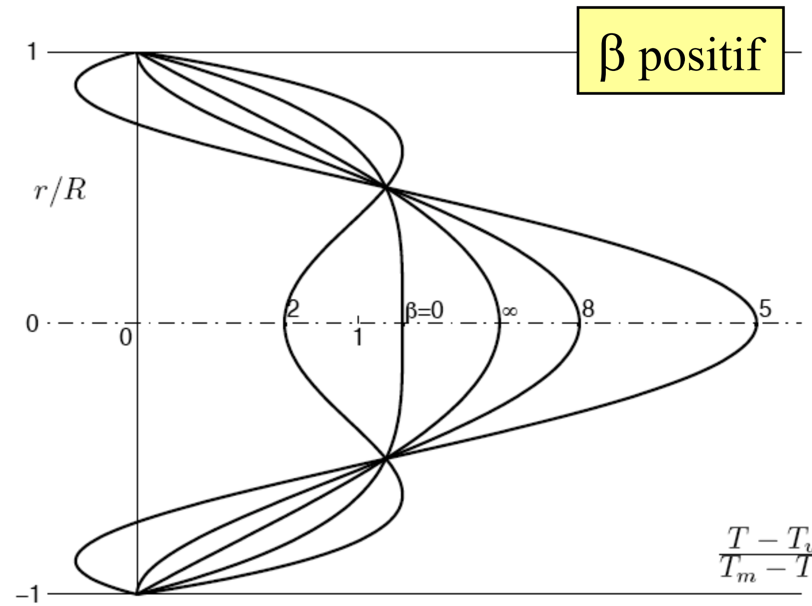
Conduction thermique dans le tuyau : tension thermiques (thermoélasticité !)

Flux conductif dans le plomb

A mi-rayon,
la température
est indépendante
de la valeur
de β !

$$\frac{T - T_w}{T_m - T_w} = \frac{9}{8} \qquad \text{en} \qquad \frac{r}{R} = \frac{1}{2}$$



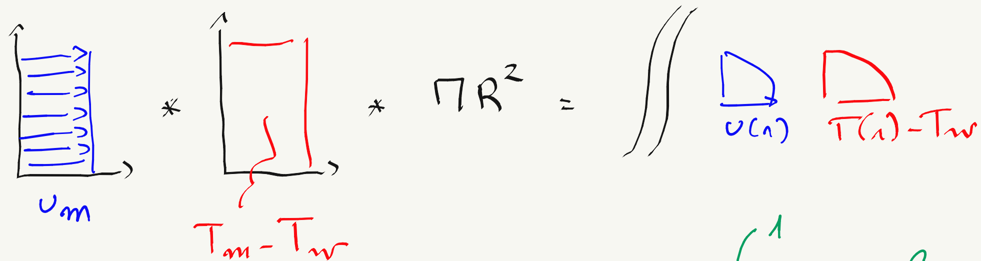


3

TEMPERATURE MOYENNE..... QUI N'EST PAS UNE MOYENNE USUELLE :-)

$$\int_0^1 \eta - \eta^3 - \eta^5 + \eta^7 = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right] = \frac{12-6-4+3}{24} = \frac{5}{24}$$

$$\pi R^2 u_m (T_m - T_w) = 2\pi R^2\, 2u_m \frac{\mu u_m^2}{k}\left[\underbrace{\int_0^1 (1-\eta^2)(1-\eta^4)\,\eta\, d\eta}_{} - \frac{\beta}{8}\underbrace{\int_0^1 (1-\eta^2)(3-4\eta^2+\eta^4)\,\eta\, d\eta}_{}\right]$$



$$\int_0^1 3\eta - 4\eta^3 + \eta^5 - 3\eta^3 + 4\eta^5 - \eta^7$$

$$= \left[\frac{3}{2} - \frac{4}{4} + \frac{1}{6} - \frac{3}{4} + \frac{4}{6} - \frac{1}{8}\right]$$

$$= \frac{\underbrace{72-48+8}_{32} \underbrace{-36+32-6}_{-10}}{48} = \frac{22}{48} = \frac{11}{24}$$

Température moyenne

$$u_m \, \pi R^2 \, (T_m - T_w) = 2\pi \, R^2 \, \frac{\mu \, {u_m}^2}{k} \, 2 \, u_m \left[\boxed{\underbrace{\int_0^1 (1-\eta^2)\,(1-\eta^4)\,\eta \, d\eta}_{= \frac{10}{48}}} - \frac{\beta}{8} \boxed{\underbrace{\int_0^1 (1-\eta^2)\,(3 - 4\eta^2 + \eta^4)\,\eta \, d\eta}_{= \frac{22}{48}}} \right]$$

$$T_m - T_w \quad = \quad \frac{\mu \, {u_m}^2}{k} \left[\frac{5}{6} - \frac{11}{48} \beta \right]$$

Cup mixing temperature

Flux de chaleur à la paroi

$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left[\boxed{\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^4\right)} - \frac{1}{8}\,\beta\,\boxed{\left(3-4\left(\frac{r}{R}\right)^2+\left(\frac{r}{R}\right)^4\right)}\right]$$

$$q_w = -k\left[\frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left[-\left(\frac{4r^3}{R^4}\right)\Big|_{r=R} - \frac{1}{8}\,\beta\left(-4\left(\frac{2r}{R^2}\right)\Big|_{r=R} + \left(\frac{4r^3}{R^4}\right)\Big|_{r=R}\right)\right]\right]$$

$$q_w = -k\left[\frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left[-\frac{4}{R} - \frac{1}{8}\,\beta\left(-\frac{8}{R}+\frac{4}{R}\right)\right]\right]$$

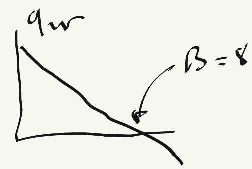
$$q_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{2R}\left(8 - \beta\right)$$

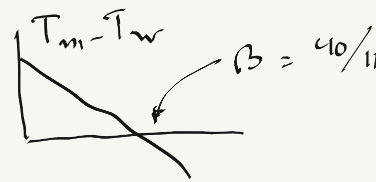
4

FLUX DE CHALEUR DISSIPE ?

$$q_w = \frac{\mu u_m^2}{2R}\left[8-\beta\right]$$

$$T_m - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k}\left[\frac{5}{6} - \frac{11}{48}\beta\right]$$





· considérons $\beta = 0$

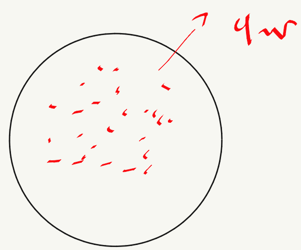
$$q_w = \frac{4\mu u_m^2}{R}$$

Puissance générée par dissipation visqueuse

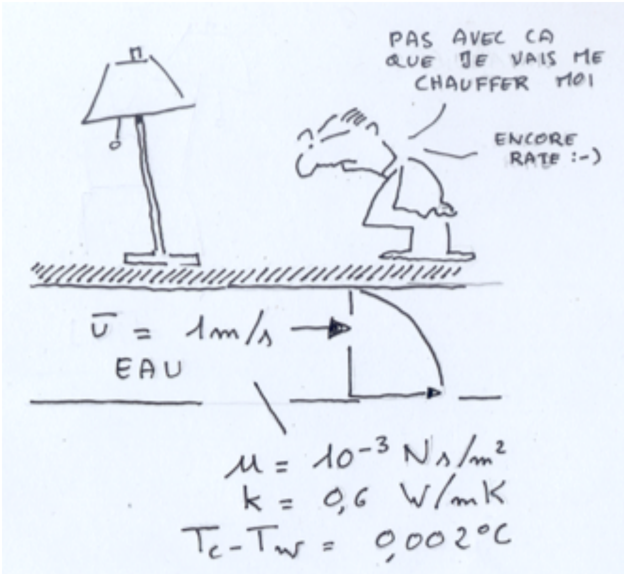
$$= 2\pi \int_0^R \mu\,(2u_m)^2 \left(\frac{2r}{R^2}\right)^2 r\,dr$$

$$= 2\pi\,\frac{16\mu u_m^2}{R^4}\underbrace{\int_0^R r^3\,dr}_{\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{R^4}{4}}$$

$$= 2\pi R\,\frac{4\mu u_m^2}{R}$$



Flux de chaleur à la paroi T_w constante



$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)$$

$$q_w = -k\,\frac{dT}{dr}\Big|_{r=R} = 4\,\frac{\mu\,{u_m}^2}{R} = 4\,k\,\frac{(T_c - T_w)}{R}$$

C'est la chaleur générée par dissipation visqueuse qui s'échappe par la paroi du tuyau !

$$q_w = -k \frac{dT}{dr}\bigg|_{r=R} = 4 \frac{\mu {u_m}^2}{R}$$

Estimation du flux de chaleur à la paroi par rapport aux effets de diffusion !

$$T_m - T_w = \frac{\mu {u_m}^2}{k} \frac{5}{6}$$

L'écart de température caractéristique est pris avec la température moyenne !

$$Nu = 4 \frac{\mu {u_m}^2}{R} \frac{k}{\mu {u_m}^2} \frac{6}{5} \frac{2R}{k} = \frac{48}{5} = 9.6$$

T_w constante
Nombre de Nusselt

$$q_w = \frac{\mu \, {u_m}^2}{2R}\left(8 - \beta\right)$$

Estimation du flux de chaleur à la paroi par rapport aux effets de diffusion !

$$Nu = \frac{q_w}{k(T_m - T_w)/R}$$

$$T_m - T_w = \frac{\mu \, {u_m}^2}{k}\left[\frac{5}{6} - \frac{11}{48}\beta\right]$$

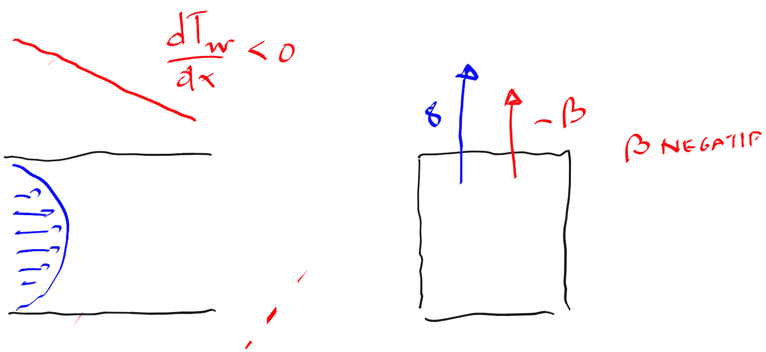
L'écart de température caractéristique est pris avec la température moyenne !

$$Nu = \frac{\left(8 - \beta\right)}{\left(\frac{5}{6} - \frac{11}{48}\beta\right)}$$

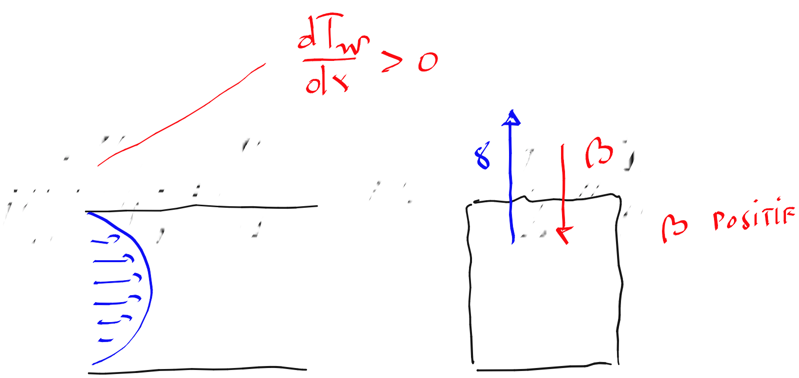
T_w linéaire
Nombre de Nusselt

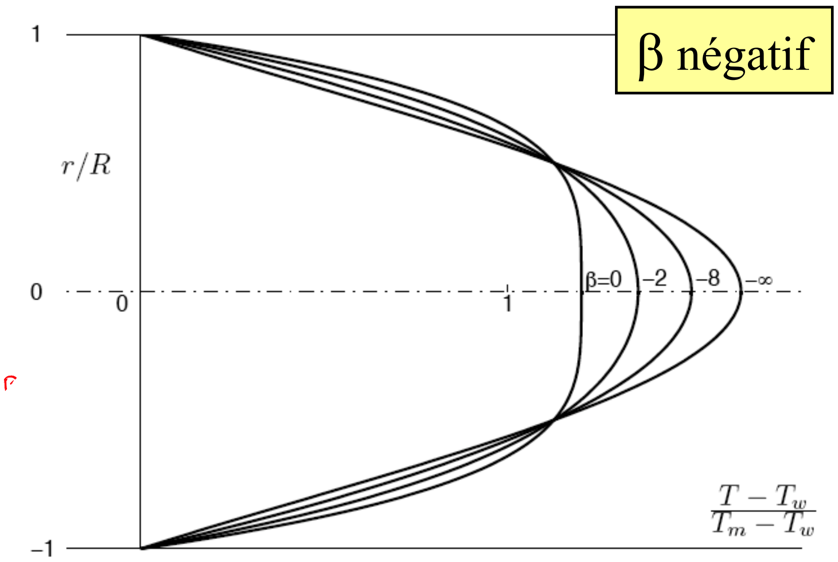
$\boxed{5}$

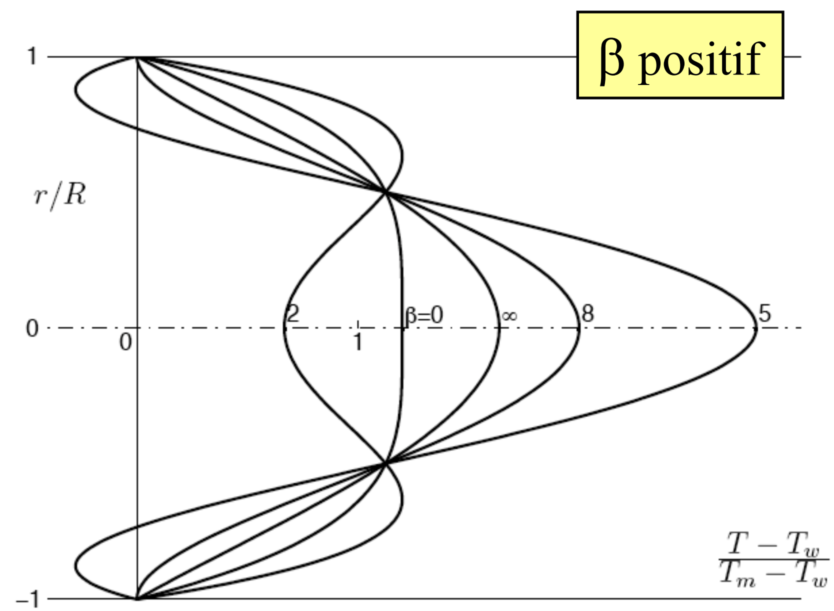
COMPRENDRE LA SOLUTION ANALYTIQUE !



$$q_w = \underbrace{\;\cdots\;}_{=1} (8-\beta)$$



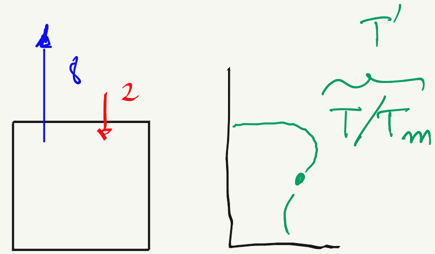


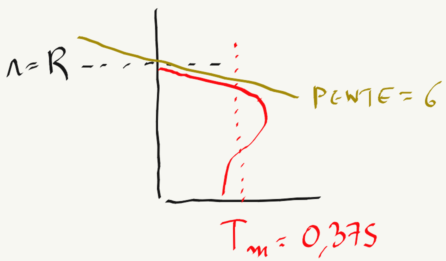


$\boxed{T_w = 0 \quad :-)}$

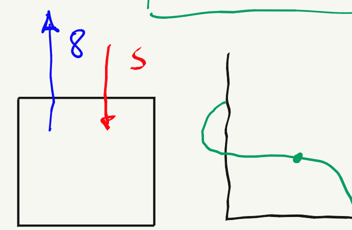
$$T' = \frac{T}{T_m}$$

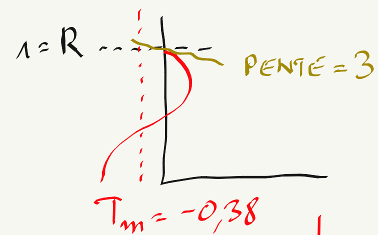
$\beta = 2$



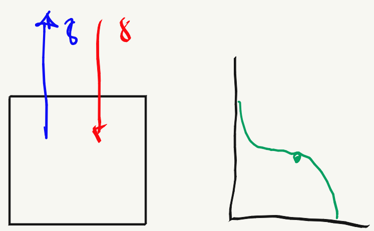


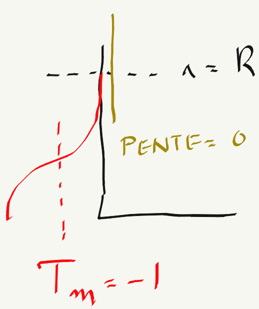
$\beta = 5$



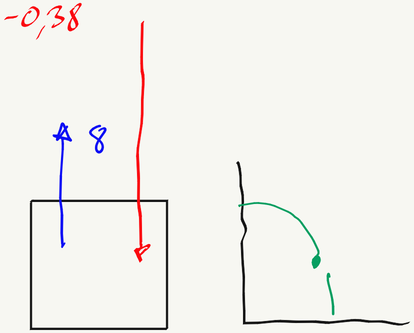


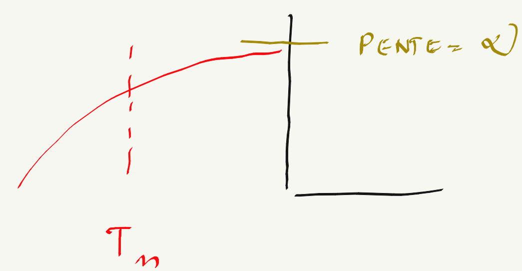
$\beta = 8$





$\beta = \infty$

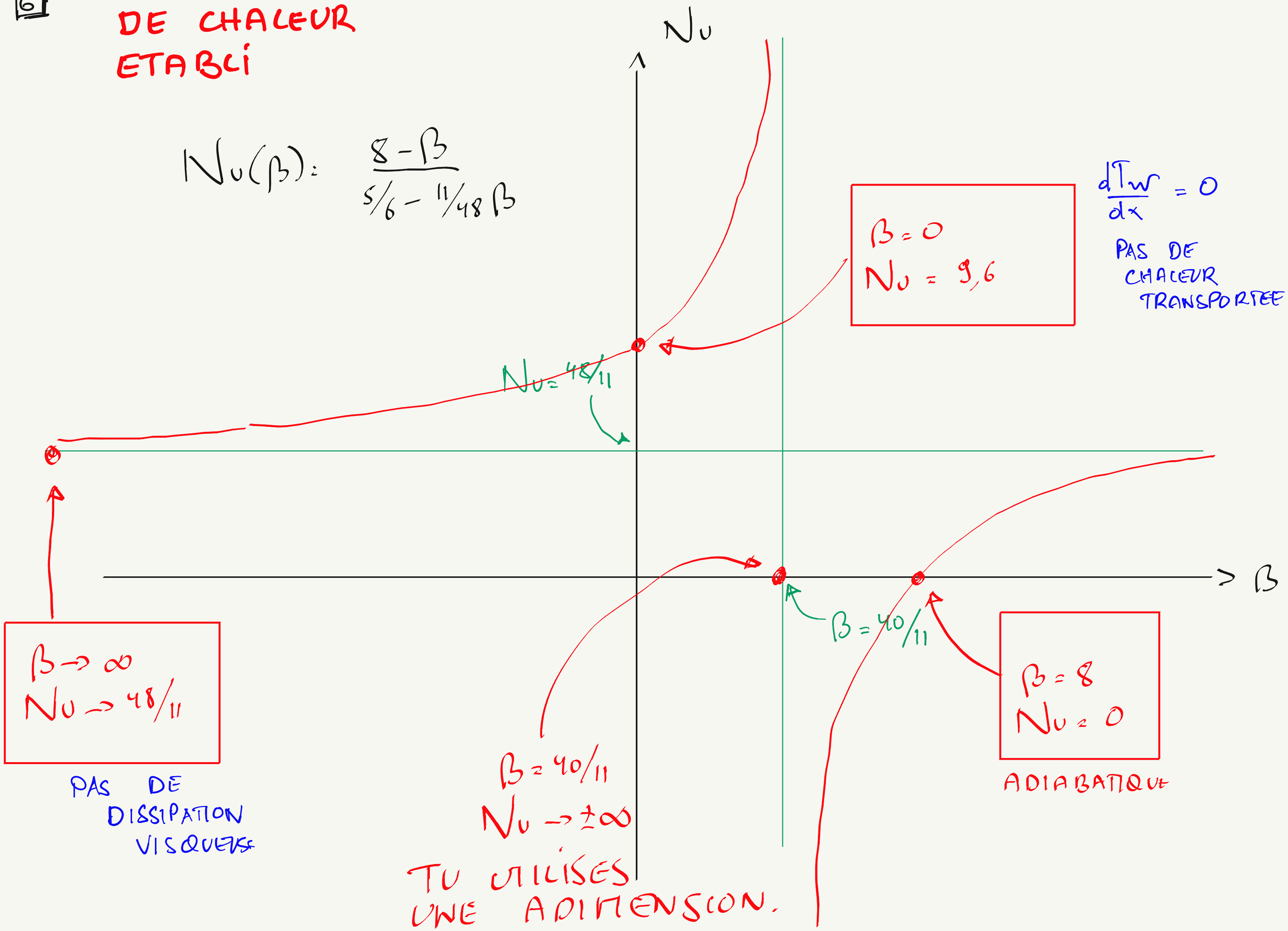




$$T_m = \underbrace{\quad}_{=1}\left(\frac{5}{6} - \frac{11}{48}\beta\right)$$

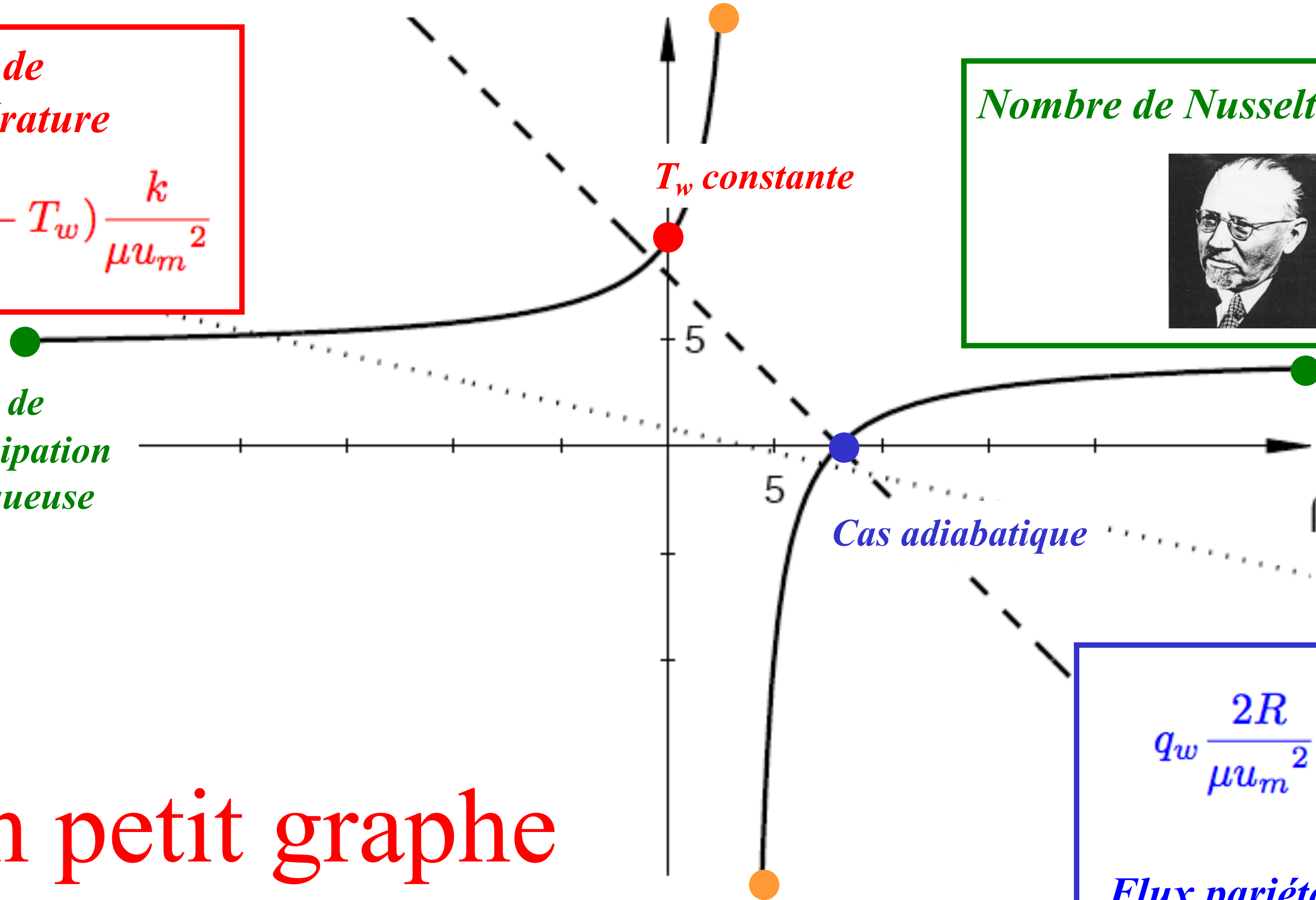
6 TRANSFERT DE CHALEUR ETABLI

$$Nu(\beta) : \frac{8-\beta}{5/6 - 11/48\,\beta}$$

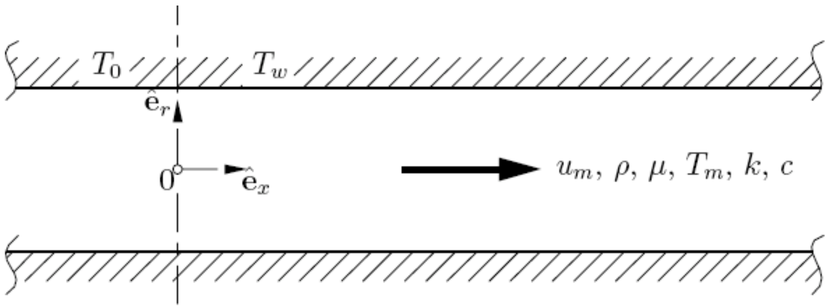


TU UTILISES UNE ADIMENSION. DE MERDE

Un petit graphe récapitulatif !



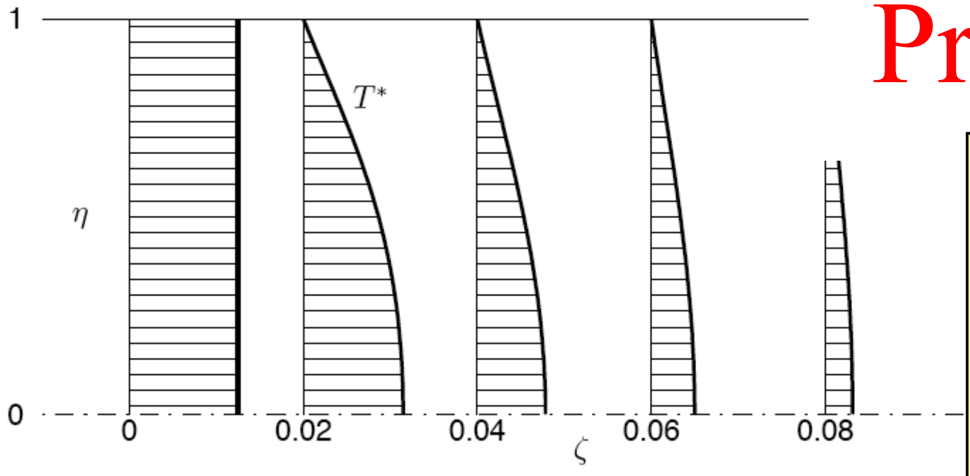
Transfert non-établi dans un écoulement établi…



$$\rho\, c\, u \frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Transfert thermique stationnaire dans un écoulement établi d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants, sans dissipation visqueuse et diffusion axiale

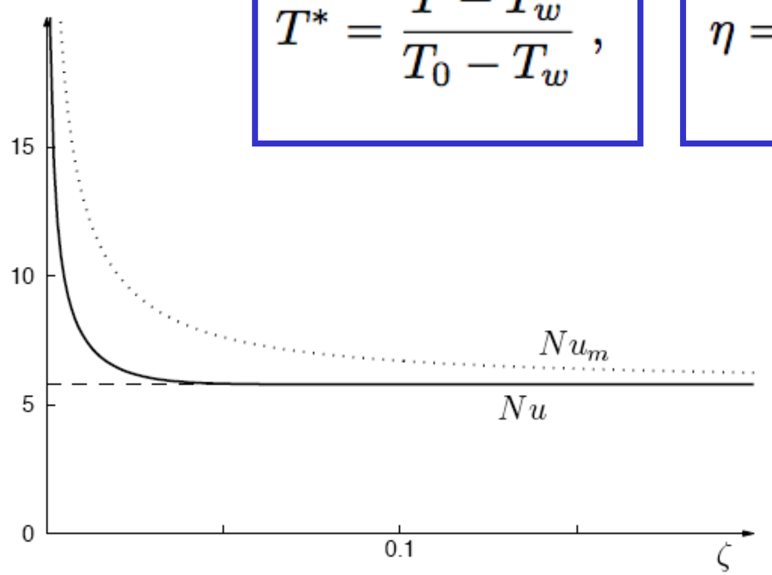
Ecoulement de Hagen-Poiseuille : problème de Poiseuille (1885)
Ecoulement bouchon : problème de Grätz (1883)



Problème de Grätz

Transfert thermique stationnaire
dans un écoulement établi
d'un fluide visqueux newtonien
à paramètres constants,
sans dissipation visqueuse
et sans diffusion axiale

Ecoulement bouchon



$$T^* = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w} \,,$$

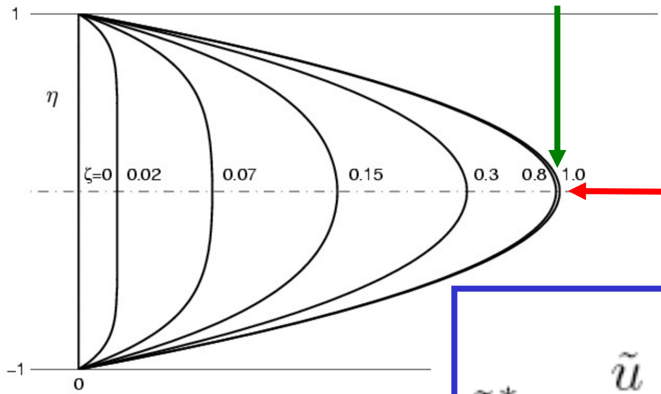
$$\eta = \frac{r}{R} \,,$$

$$\zeta = \frac{\alpha\, x}{u_m R^2} = \frac{\alpha}{u_m R}\,\frac{x}{R} = \frac{1}{Pe}\,\frac{x}{R} \,,$$

La coordonnée horizontale est relié à la vitesse par le temps de diffusion caractéristique !

Beaucoup d'algèbre inutile !
Seul, le choix de l'adimensionnalisation est vraiment utile à retenir !

$$\zeta_{c,0.95} = \frac{\nu\, t_{c,95}}{R^2} \approx 0.536$$



$$\zeta_{c,0.99} = \frac{\nu\, t_{c,99}}{R^2} \approx 0.814$$

$$\tilde{u}^* = \frac{\tilde{u}}{u_c} \,, \qquad \eta = \frac{r}{R} \,, \qquad \zeta = \frac{\nu\, t}{R^2} \,,$$

Adimensionalisation du temps sur base de la viscosité qui est l'unique donnée contenant une unité de temps !

En ζ=1, on a un écoulement de régime

$$u(r,t) \;=\; \underbrace{u_c\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)}_{u(r,t\to\infty)} - \tilde{u}(r,t)$$

Même approche pour le démarrage d'un écoulement !

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \tilde{u}^*}{\partial \zeta} &=& \dfrac{1}{\eta}\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta \dfrac{\partial \tilde{u}^*}{\partial \eta}\right) \\ \tilde{u}^*(\eta,0) &=& 1-\eta^2 \\ \tilde{u}^*(1,\zeta) &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\tilde{u}^*(\eta,\zeta) = f(\eta)g(\zeta)$$

$$f\frac{dg}{d\zeta} = \frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{df}{d\eta}\right)g$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{g}\frac{dg}{d\zeta} = \frac{1}{\eta\, f}\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{df}{d\eta}\right) = -\lambda^2$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dg}{d\zeta} + \lambda^2 g = 0 \qquad g(\zeta) = Ae^{-\lambda^2\zeta}$$

$$\eta\frac{d^2f}{d\eta^2} + \frac{df}{d\eta} + \lambda^2\eta f = 0 \qquad f(\eta) = BJ_0(\lambda\eta) + \cancel{CY_0(\lambda\eta)}$$

(i) **Solutions obtenues par la technique de séparation de variables**

(ii)

$$\tilde{u}^*(1,\zeta) = 0$$

$$\downarrow$$

$$J_0(\lambda_n) = 0$$

Condition à la paroi

$$\tilde{u}^*(\eta,0) = (1-\eta^2)$$

$$\downarrow$$

$$(1-\eta^2) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, J_0(\lambda_n\,\eta)$$

$$8 = C_n\,\lambda_n^3\, J_1(\lambda_n)$$

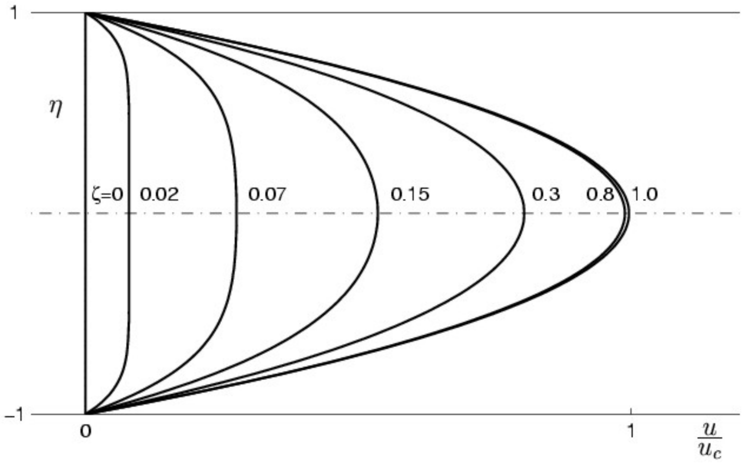
(iii) **Condition initiale**

Résolution analytique :-(

$$\tilde{u}^*(\eta,\zeta) = 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_n\,\eta)}{\lambda_n^3\, J_1(\lambda_n)}\, e^{-\lambda_n^2\,\zeta}$$

Temps d’établissement

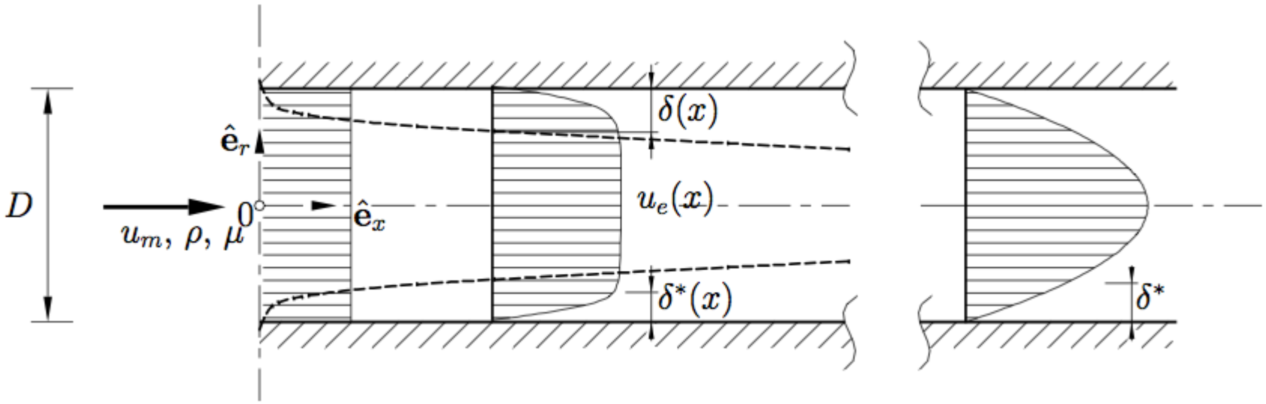
$$\frac{u}{u_c}(0, \zeta > \zeta_c) \approx 1 - \frac{8}{\lambda_1^3 \, J_1(\lambda_1)} \, e^{-\lambda_1^2 \, \zeta} = 1 - 1.108 \, e^{-5.783 \, \zeta}$$



Temps d’établissement nécessaire afin que la vitesse au centre de la conduite vaille un pourcentage critique de la valeur du profil de Poiseuille

$$\zeta_c \approx \frac{1}{\lambda_1^2} = 0.173 \qquad \zeta_{c,0.99} = \frac{\nu \, t_{c.99}}{R^2} \approx 0.814$$

Longueur d'établissement…
Analogie spatio-temporelle



Pas de solution analytique : il est possible de trouver une solution approchée par la théorie des couches limites pour le cas axisymétrique…

Ou d'effectuer une petite analogie :-)

Longueur d'établissement nécessaire afin que la vitesse au centre de la conduite vaille un pourcentage critique de la valeur du profil de Poiseuille

$$\frac{x_c}{u_m}\,\frac{\nu}{R^2} \approx t_c\,\frac{\nu}{R^2} = \zeta_c\ ,$$

$$4\,\frac{x_c}{D}\,\frac{\nu}{u_m\,D} \approx \zeta_c \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x_c}{D} \approx \frac{\zeta_c}{4}\,Re_D \approx 0.2\,Re_D$$