

# Et le thermique...

Écoulement incompressible d'un  
fluide visqueux newtonien à  
paramètres constants.

Les équations de continuité et de quantité  
de mouvement ne font pas intervenir la  
température : on peut résoudre la  
dynamique de l'écoulement sans tenir  
compte des aspects thermiques !

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

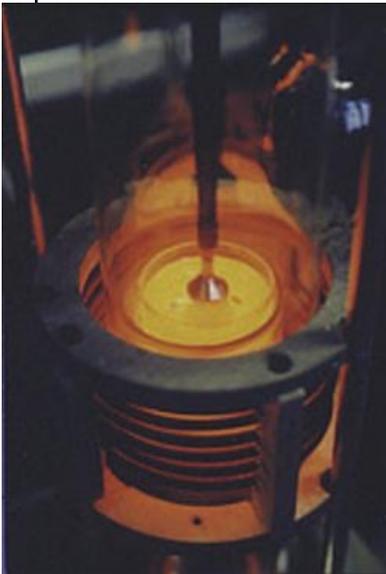
$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g},$$

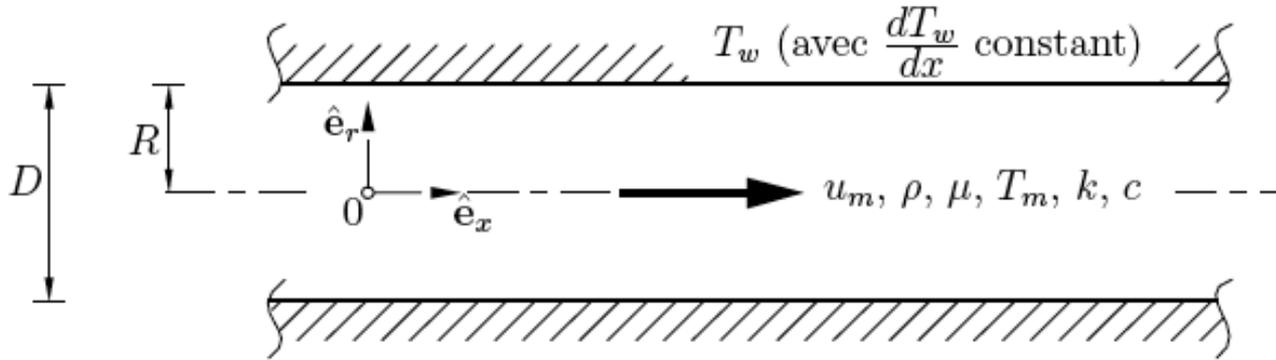
Etape 1

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + k \nabla^2 T,$$

Etape 2

Une fois la dynamique de l'écoulement  
connue, on peut ensuite résoudre le  
problème thermique...



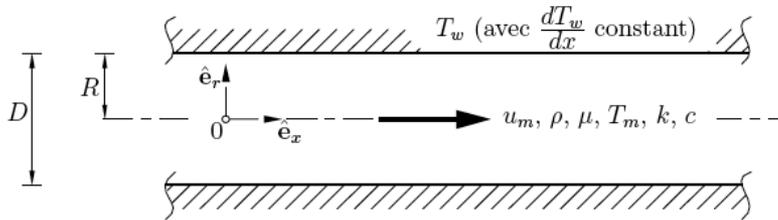


$$\frac{\partial}{\partial x} (T - T_w) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_w}{dx}$$

# Transfert de chaleur établi

*L'écoulement est établi lorsque le profil de la différence de températures du fluide et de la paroi reste constante le long de l'axe de la conduite !*

*Cela suppose que l'écoulement est établi !*

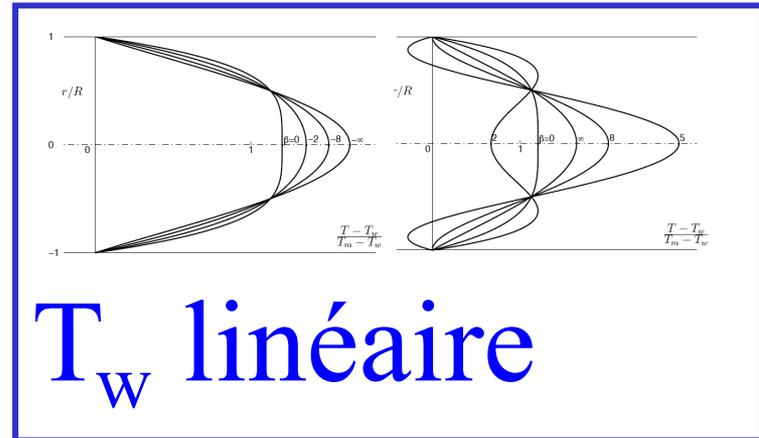


**$T_w$  constante**

*Si  $T_w$  constante...*

$$\rho c \frac{dT_w}{dx} 2 u_m \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) = k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} (T - T_w) \right) + 16 \mu \frac{u_m^2}{R^2} \left( \frac{r}{R} \right)^2$$

**Deux cas particuliers**



**$T_w$  linéaire**

$$T - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right)$$

$T_w$  constante

*Si  $T_w$  constante...*

$$\rho c \frac{dT_w}{dx} 2 u_m \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) = k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} (T - T_w) \right) + 16 \mu \frac{u_m^2}{R^2} \left( \frac{r}{R} \right)^2$$

$$T - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right) - \frac{1}{8} \frac{\rho c}{k} \frac{dT_w}{dx} u_m R^2 \left( 3 - 4 \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right)$$

$T_w$  linéaire

Un nombre adimensionnel  
qui mesure le rapport  
entre deux effets !

$$\beta = \rho c \frac{dT_w}{dx} \frac{R^2}{\mu u_m}$$

$$T - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k} \left[ \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right) - \frac{1}{8} \beta \left(3 - 4 \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^4\right) \right]$$

*Effets de dissipation visqueuse  
Transformation d'énergie*

*Effets de convection  
Transport de l'énergie*

# Le petit frère de Re :

## Péclet !

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}$$

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \rho c (\mathbf{v} \cdot \nabla) T$$

TRANSPORT

$$= 2\mu \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}}$$

$$+ \left( \mu \nabla^2 \mathbf{v} + k \nabla^2 T \right)$$

DIFFUSION DE QUANTITE DE MVT

DIFFUSION DE PUISSANCE

$$- \nabla p$$

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{\rho U^2 / L}{\mu U / L^2} = \frac{\rho U L}{\mu}$$

$$Pe = \frac{\rho c U L}{k} = \frac{\rho c U \Delta T / L}{k \Delta T / L^2} = \frac{\rho c U L}{k}$$

$$Pr = \frac{Pe}{Re} = \frac{c \mu}{k} = \frac{\nu}{\alpha}$$

# Le petit frère de Reynolds : Péclet

*Effets de conduction  
Diffusion de l'énergie*

$$\boxed{\rho c(\mathbf{v} \cdot \nabla)T} = 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + \boxed{k\nabla^2 T}$$

$\mathcal{O}(\rho c U \Delta T / L)$   $\mathcal{O}(k \Delta T / L^2)$

*Effets de convection  
Transport de l'énergie*

$$Pe = \frac{\boxed{\text{Energie transportée}}}{\boxed{\text{Energie diffusée}}} = \frac{\rho c U \Delta T / L}{k \Delta T / L^2} = \frac{\rho c U L}{k}$$

# Oui : c'est bien le petit frère !

*Effets visqueux  
Diffusion de la quantité  
de mouvement*

$$\boxed{\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}} = -\nabla p + \boxed{\mu \nabla^2 \mathbf{v}}$$

$\mathcal{O}(\rho U^2/L)$    $\mathcal{O}(\mu U/L^2)$

*Effets d'inertie  
Transport de la quantité  
de mouvement*

$$Re = \frac{\boxed{\text{Forces d'inertie}}}{\boxed{\text{Forces visqueuses}}} = \frac{\rho U^2/L}{\mu U/L^2} = \frac{\rho U L}{\mu}$$

# Nombre de Péclet

caractérise le transfert de chaleur d'un écoulement d'un fluide !

$$Pe = \frac{\rho_0 u_0 L c_p}{k}$$



Born: 10 Feb 1793 in Besancon, France

Died: 6 Dec 1857 in Paris, France

Puissance  
transportée

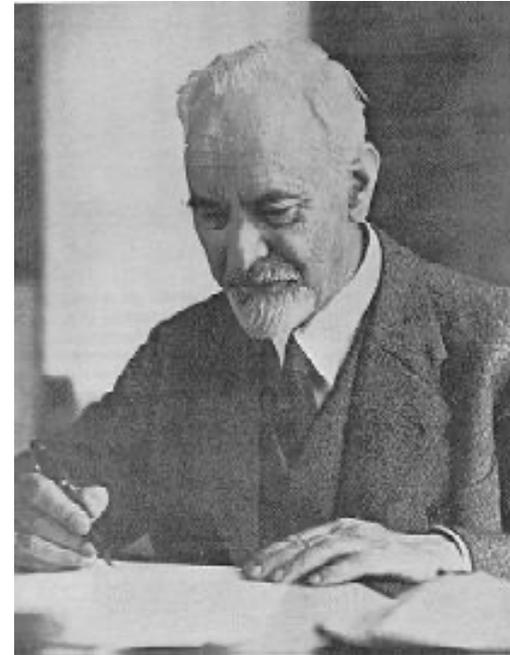
Puissance  
diffusée

à savoir !

# Nombre de Prandtl

$$Pr = \frac{\mu C_p}{k}$$

caractérise un fluide !



Born: 1875 in Freising, Germany

Died: 1953 in Gottingen, Germany

**Peclet** = Effets de convection / effets de conduction

---

**Reynold** = Effets d'inertie / effets de viscosité

à savoir !

# Le nombre adimensionnel sans nom !

$$\beta = \rho c \frac{dT_w}{dx} \frac{R^2}{\mu U_m}$$

$$\rho (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v} = \rho c (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) T$$

TRANSPORT

$$\rho c U \Delta T / L$$

$$= 2 \mu \underline{d} : \underline{d}$$

DISSIPATION VISQUEUSE

$$\mu U^2 / L^2$$

$$+ \mu \underline{\nabla}^2 \underline{v} + k \underline{\nabla}^2 T$$

DIFFUSION DE PUISSANCE

$$k \Delta T / L^2$$

$$- \underline{\nabla} p$$

DIFFUSION DE QUANTITE DE MAT

$$E_c = \frac{\overbrace{\rho U^2 / L}^{\text{FORCE}} U}{\underbrace{\rho c U \Delta T / L}_{\text{PUISSANCE}}} = \frac{U^2}{c \Delta T} = \frac{\text{ENERGIE CINETIQUE}}{\text{ENERGIE INTERNE}}$$

$$\frac{\mu U^2 / L^2}{k \Delta T / L^2} = \frac{\mu U^2}{k \Delta T} = \frac{\mu U^2}{\rho c \Delta T} = Pr E_c$$

$$\frac{\mu U^2 / L^2}{\rho c U \Delta T / L} = \frac{Re}{Ec} = \beta$$

$$\frac{\rho c U \Delta T / L}{\mu U^2 / L^2} = \frac{\rho c L^2 \Delta T}{\mu L} U = \beta$$

Et notre ami Eckert !

# Une grande famille !

*Effets de conduction  
Diffusion de l'énergie*

$$\boxed{\rho c(\mathbf{v} \cdot \nabla)T} = \boxed{2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d})} - r + \boxed{k\nabla^2 T}$$

$$\mathcal{O}(\rho c U \Delta T / L) \quad \mathcal{O}(\mu U^2 / L^2) \quad \mathcal{O}(k \Delta T / L^2)$$

*Effets de convection  
Transport de l'énergie*

*Effets de dissipation visqueuse  
Transformation d'énergie*

$$Pe = \frac{\text{■}}{\text{■}} \quad Pr \quad Ec = \frac{\text{■}}{\text{■}} \quad \beta = \frac{Re}{Ec} = \frac{\text{■}}{\text{■}}$$

$$Ec = \frac{\text{Energie cinétique}}{\text{Energie interne}} = \frac{\rho U^2}{\rho c \Delta T} = \frac{U^2}{c \Delta T}$$

# Nombre d'Eckert

$$Ec = \frac{u_e^2}{c(T_w - T_e)}$$

caractérise un écoulement  
d'un fluide !

**Energie cinétique**

---

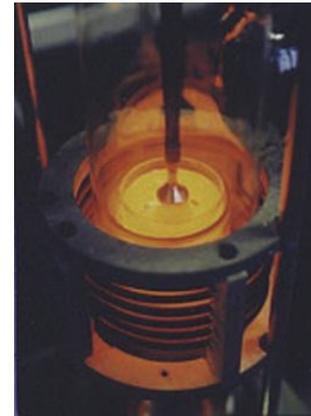
**Energie interne**



Picture was taken on August 22, 2000

# Transferts de chaleur stationnaires

$$\rho c(\mathbf{v} \cdot \nabla)T = 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + k\nabla^2 T$$



Nombre de Reynolds :  $Re$

Nombre de Péclet :  $Pe$

Nombre de Prandtl :  $Pr$

Nombre d'Eckert :  $Ec$

Nombre de Nusselt :  $Nu$

$$= \frac{Pe}{Re} \quad Nu = \frac{q_w}{k_f \Delta T / 2R}$$

Nombre de Biot :  $Bi$

$$Bi = \frac{q_w}{k_s \Delta T / L}$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho U^2 / 2}$$

Coeff de frottement :  $C_f$

Nombre de Stanton :  $St$

$$St = \frac{q_w}{\rho c U \Delta T}$$

Pertes de charges :  $\lambda$

# Nombre de Nusselt

$$Nu = \frac{q_w}{k\Delta T/2R}$$

caractérise une condition d'interface !



Born: 25 Nov 1882 in Nurnberg, Germany

Died: 1 Sep 1957 in Munchen, Germany

**Flux de chaleur à la paroi**

---

**Flux de chaleur diffusé dans l'écoulement**

# Nombre de Biot

$$Bi = \frac{q_w}{k\Delta T/L}$$

caractérise une condition d'interface !



Born: 21 April 1774, Paris, France

Died: 3 Feb 1862, Paris, France

**Flux de chaleur à la paroi**

---

**Flux de chaleur diffusé dans le solide**

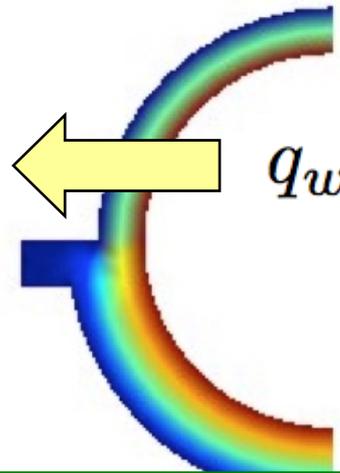
# Le Nusselt et le Biot de l'ex-tuyau en plomb de ma salle de bain :-)



$$Nu = \frac{q_w}{k\Delta T/2R}$$

Écoulement de l'air  
dans la salle de bain

Flux conductif de l'air !



Écoulement de l'eau dans le tuyau !

Flux conductif de l'eau chaude

$$Nu = \frac{q_w}{k\Delta T/2R}$$

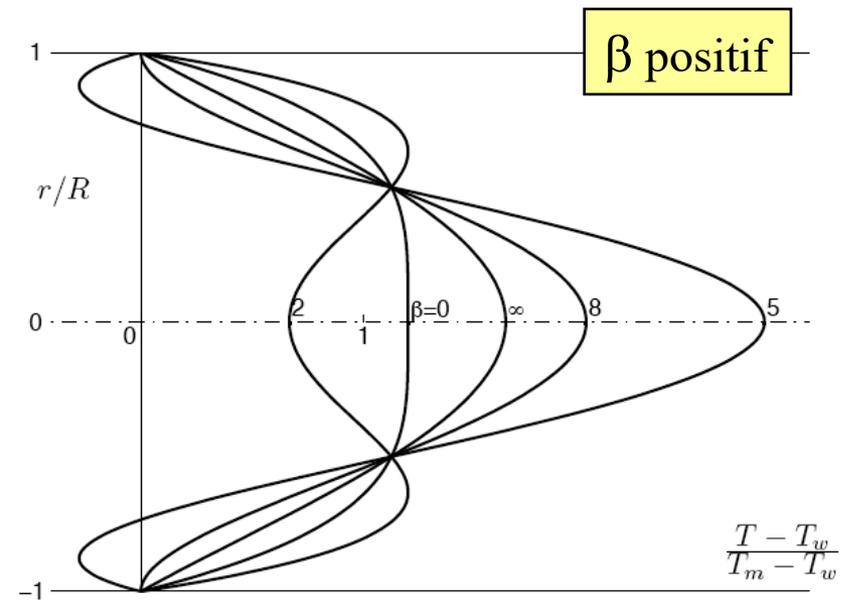
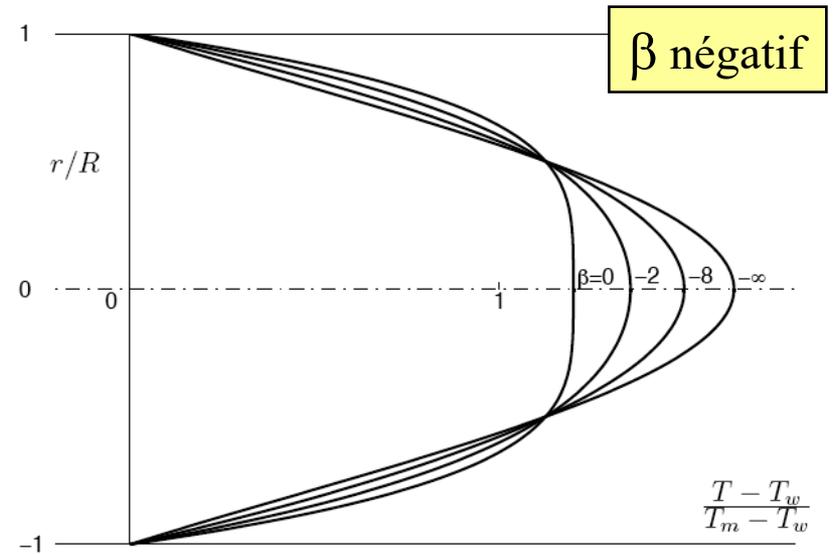
$$Bi = \frac{q_w}{k\Delta T/L}$$

Conduction thermique dans  
le tuyau : tension thermiques (thermoélasticité !)

Flux conductif dans le plomb

A mi-rayon,  
la température  
est indépendante  
de la valeur  
de  $\beta$  !

$$\frac{T - T_w}{T_m - T_w} = \frac{9}{8} \quad \text{en} \quad \frac{r}{R} = \frac{1}{2}$$

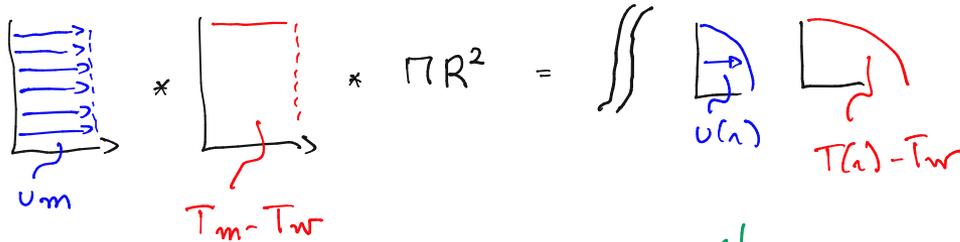


La température moyenne  
qui n'est pas une  
moyenne  
usuelle

$$\int_0^1 \eta - \eta^3 - \eta^5 + \eta^7 d\eta = \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \right]$$

$$= \frac{12 - 6 - 4 + 3}{24} = \frac{5}{24}$$

$$TR^2 v_m (T_m - T_w) = 2\pi R^2 2v_m \frac{\mu v_m^2}{k} \left[ \int_0^1 (1-\eta^2)(1-\eta^4) \eta d\eta - \frac{\beta}{8} \int_0^1 (1-\eta^2)(3-4\eta^2+\eta^4) \eta d\eta \right]$$

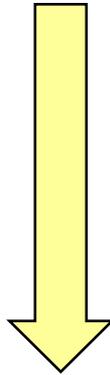


$$\int_0^1 3\eta - 4\eta^3 + \eta^5 - 3\eta^3 + 4\eta^5 - \eta^7 d\eta$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{4}{4} + \frac{1}{6} - \frac{3}{4} + \frac{4}{6} - \frac{1}{8} = \frac{72 - 48 + 8 - 36 + 32 - 6}{48} = \frac{22}{48}$$

# Température moyenne

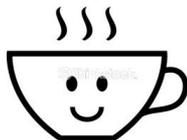
$$u_m \pi R^2 (T_m - T_w) = 2\pi R^2 \frac{\mu u_m^2}{k} 2 u_m \left[ \underbrace{\int_0^1 (1 - \eta^2) (1 - \eta^4) \eta d\eta}_{= \frac{10}{48}} \right]$$



$$- \frac{\beta}{8} \underbrace{\int_0^1 (1 - \eta^2) (3 - 4\eta^2 + \eta^4) \eta d\eta}_{= \frac{22}{48}}$$

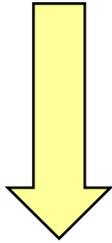
$$T_m - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k} \left[ \frac{5}{6} - \frac{11}{48} \beta \right]$$

*Cup mixing  
temperature*



# Flux de chaleur à la paroi

$$T - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k} \left[ \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right) - \frac{1}{8} \beta \left( 3 - 4 \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right) \right]$$



$$q_w = -k \left[ \frac{\mu u_m^2}{k} \left[ - \left( \frac{4r^3}{R^4} \right) \Big|_{r=R} - \frac{1}{8} \beta \left( -4 \left( \frac{2r}{R^2} \right) \Big|_{r=R} + \left( \frac{4r^3}{R^4} \right) \Big|_{r=R} \right) \right] \right]$$

$$q_w = -k \left[ \frac{\mu u_m^2}{k} \left[ -\frac{4}{R} - \frac{1}{8} \beta \left( -\frac{8}{R} + \frac{4}{R} \right) \right] \right]$$

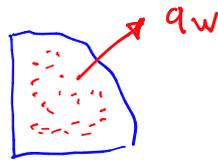
$$q_w = \frac{\mu u_m^2}{2R} (8 - \beta)$$

# Flux de chaleur dissipé ?

$$q_w = \frac{\mu v_m^2}{2R} [8 - \beta]$$

$$\beta = 0$$

$$q_w = \frac{4\mu v_m^2}{R}$$



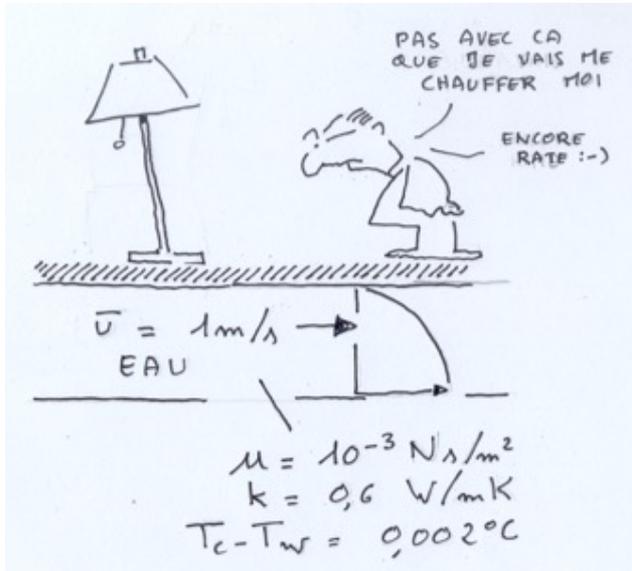
PUISSANCE DISSIPÉE

$$= 2\pi \int_0^R \mu (2v_m)^2 \left(\frac{2r}{R^2}\right)^2 r dr$$

$$= 2\pi \frac{16\mu v_m^2}{R^4} \int_0^R r^3 dr$$

$$\left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{R^4}{4}$$

$$= 2\pi R \underbrace{\frac{4\mu v_m^2}{R}}_{q_w}$$



$$T - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right)$$

$$q_w = -k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R} = 4 \frac{\mu u_m^2}{R} = 4k \frac{(T_c - T_w)}{R}$$

*C'est la chaleur générée par dissipation visqueuse  
qui s'échappe par la paroi du tuyau !*

# Flux de chaleur à la paroi

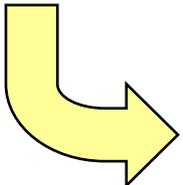
## $T_w$ constante

$$q_w = -k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R} = 4 \frac{\mu u_m^2}{R}$$

*Estimation du flux de chaleur à la paroi par rapport aux effets de diffusion !*

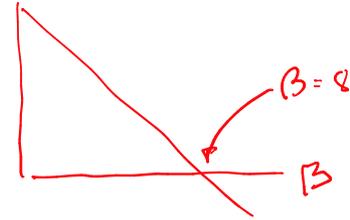
$$T_m - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k} \frac{5}{6}$$

L'écart de température caractéristique est pris avec la température moyenne !


$$Nu = 4 \frac{\mu u_m^2}{R} \frac{k}{\mu u_m^2} \frac{6}{5} \frac{2R}{k} = \frac{48}{5} = 9.6$$

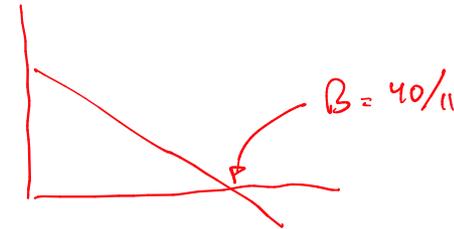
$T_w$  constante  
Nombre de Nusselt

$$q_w = \frac{\mu u_m^2}{2R} (8 - \beta)$$

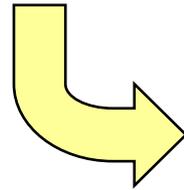


*Estimation du flux de chaleur à la paroi par rapport aux effets de diffusion !*

$$T_m - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k} \left[ \frac{5}{6} - \frac{11}{48} \beta \right]$$



L'écart de température caractéristique est pris avec la température moyenne !

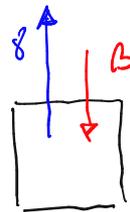
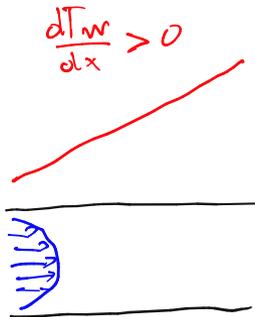
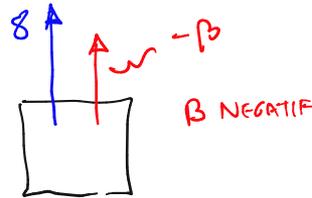
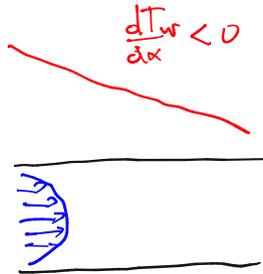


$$Nu = \frac{(8 - \beta)}{\left(\frac{5}{6} - \frac{11}{48} \beta\right)}$$

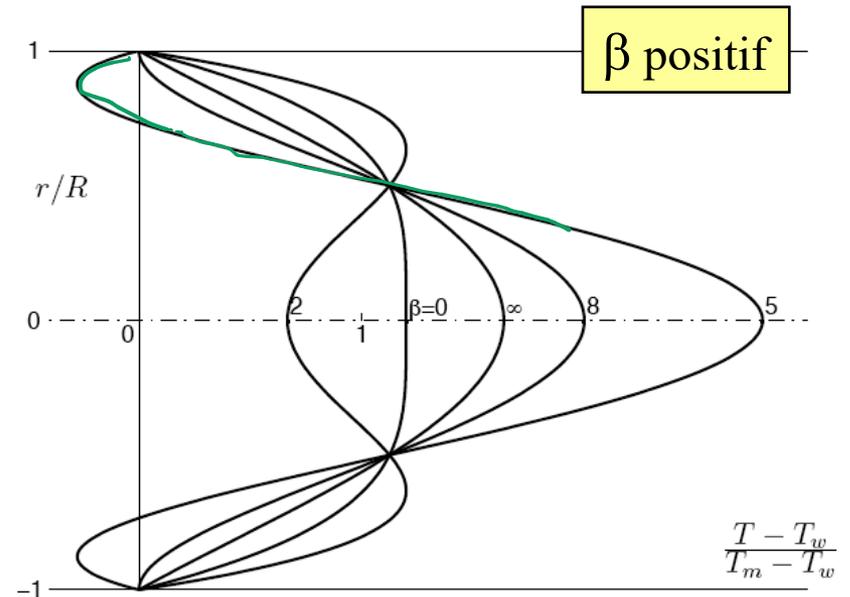
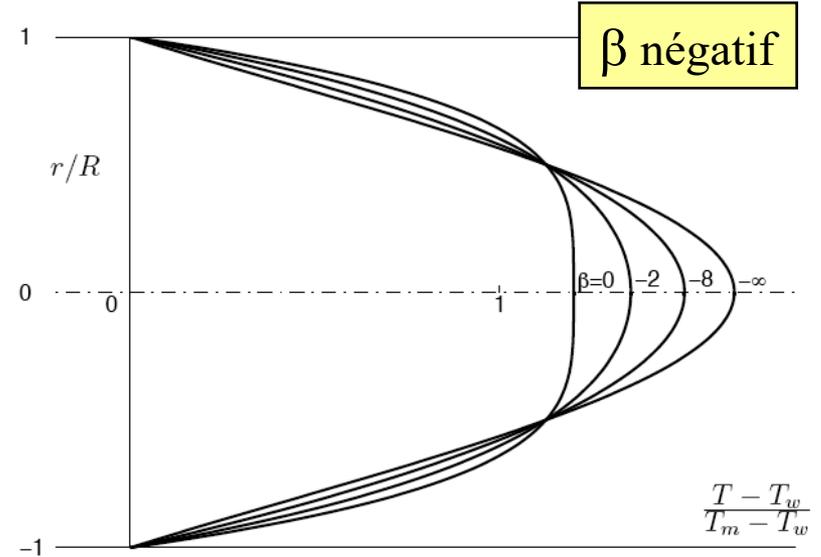
$$Nu = \frac{q_w}{k (T_m - T_w) / 2R}$$

**$T_w$  linéaire**  
**Nombre de Nusselt**

# Comprendre la solution analytique !



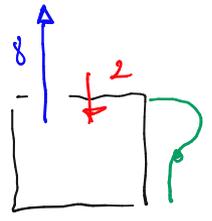
$$q_w = \underbrace{C_{eff}}_{=1} (\delta - \beta)$$



$$T_w = 0 \quad :-)$$

$$T' = T/T_m$$

$$\beta = 2$$

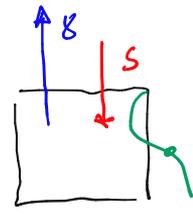


PENTE = 6

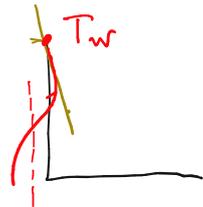


$$T_m = 0,375$$

$$\beta = 5$$

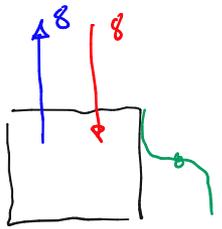


PENTE = 3

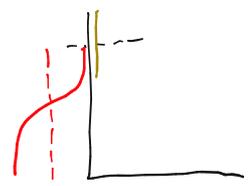


$$T_m = -0,38$$

$$\beta = 8$$

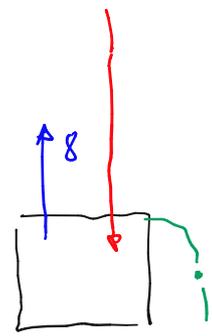


PENTE = 0

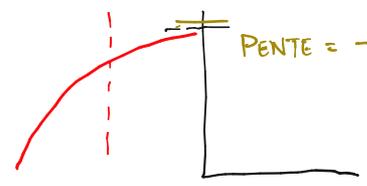


$$T_m = -1$$

$$\beta = \infty$$



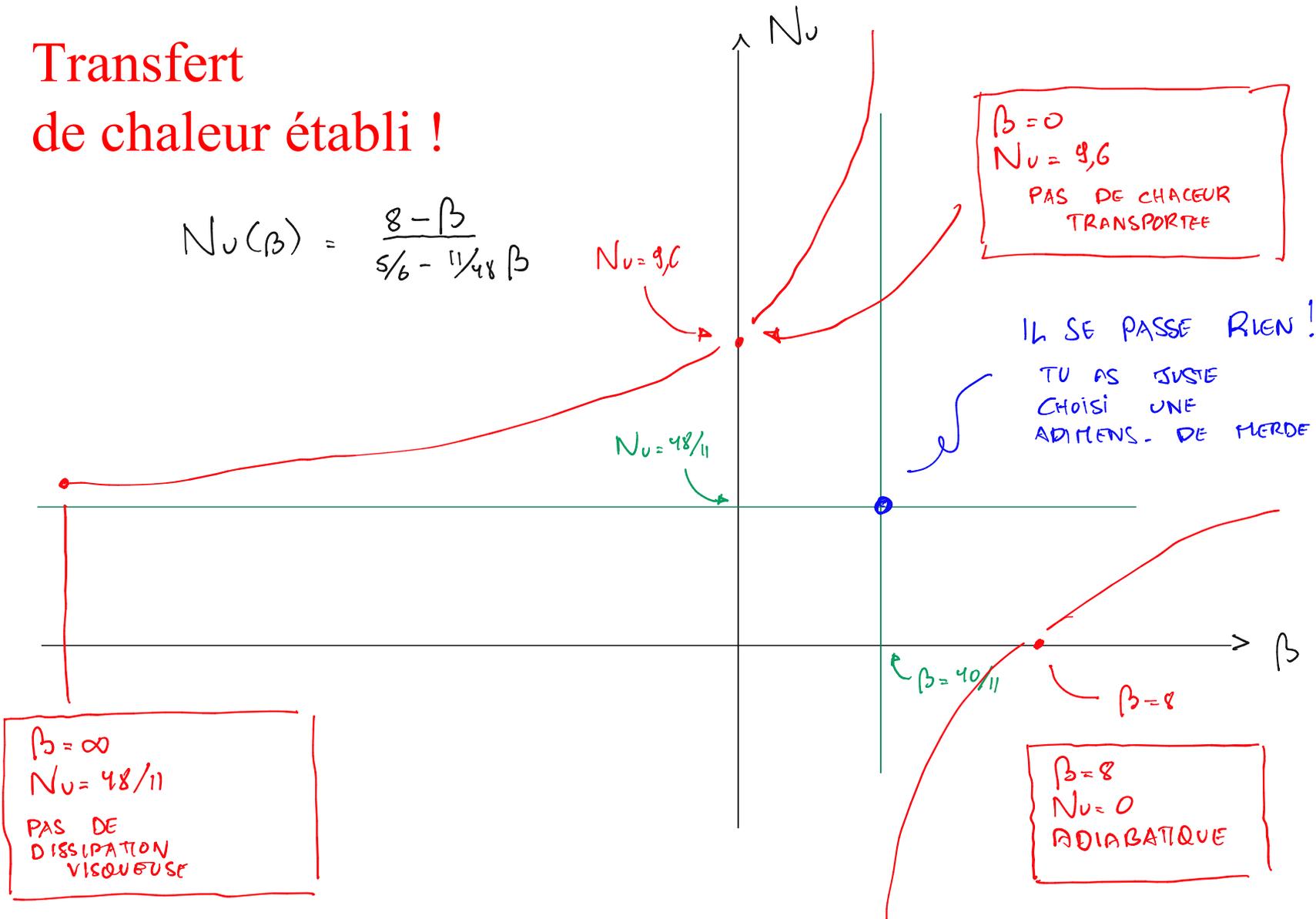
PENTE = -infinity



$$T_m = 1 \left[ \frac{5}{6} - \frac{11}{48} \beta \right]$$

# Transfert de chaleur établi !

$$Nu(\beta) = \frac{8 - \beta}{5/6 - 1/48 \beta}$$



*Ecart de température*

$$(T_m - T_w) \frac{k}{\mu u_m^2}$$

*Pas de dissipation visqueuse*

*Nombre de Nusselt*



*$T_w$  constante*

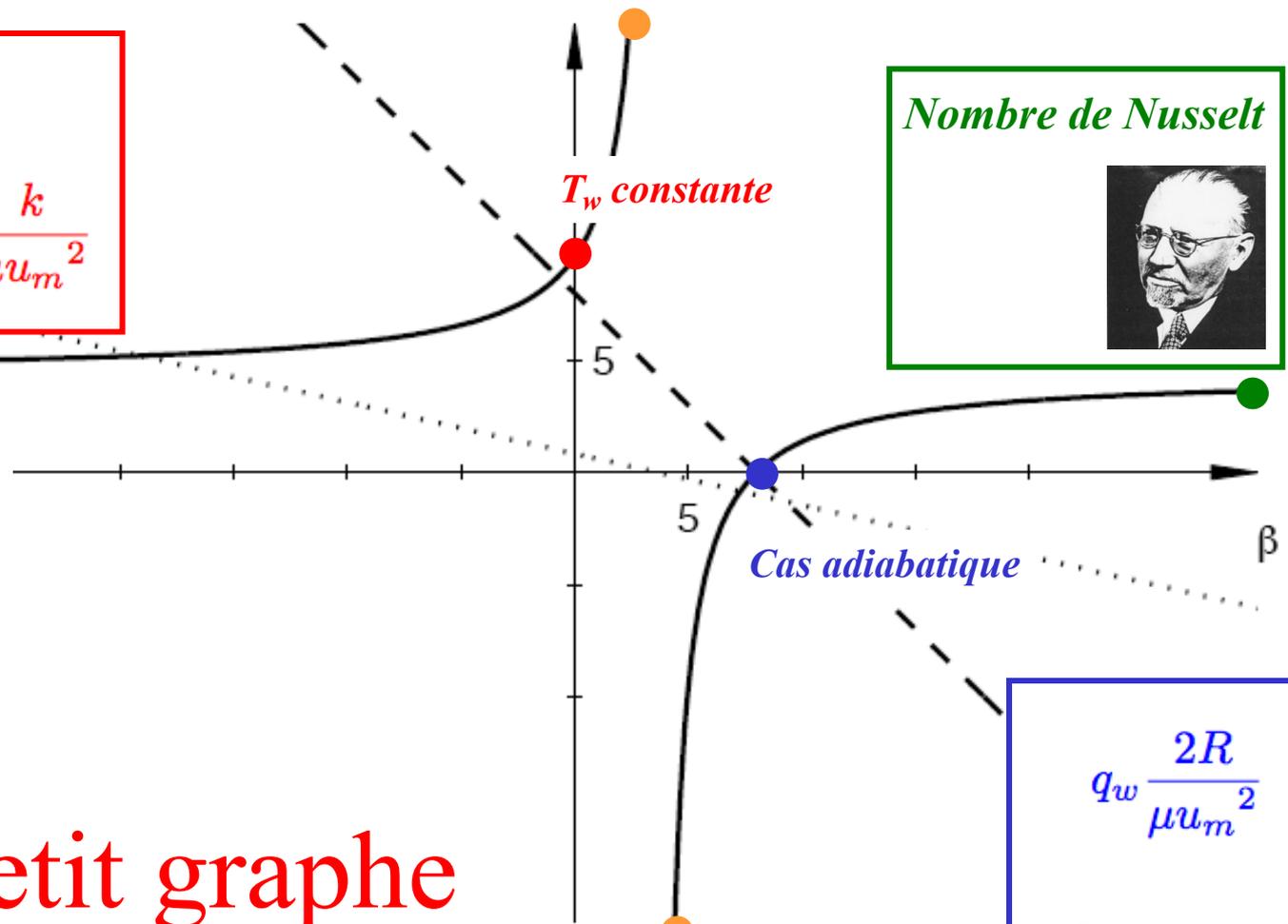
*Cas adiabatique*

$$q_w \frac{2R}{\mu u_m^2}$$

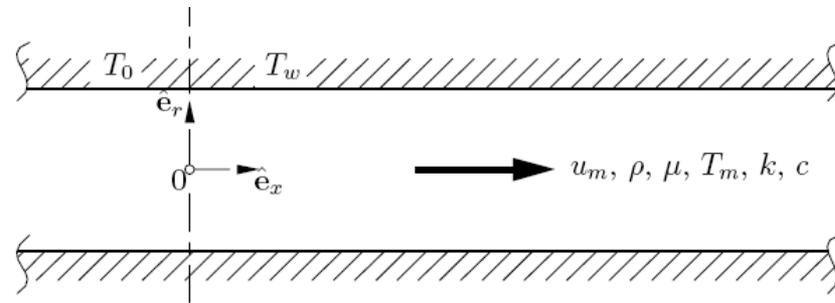
*Flux pariétal*

*Adimensionnalisation inadéquate !*

**Un petit graphe récapitulatif !**



# Transfert non-établi dans un écoulement établi...



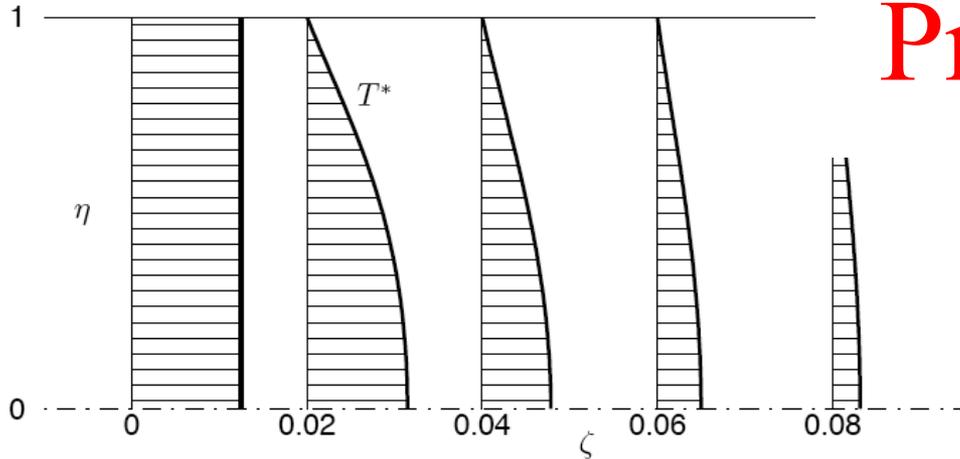
$$\rho c u \frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

**Transfert thermique stationnaire dans un écoulement établi d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants, sans dissipation visqueuse et diffusion axiale**

**Écoulement de Hagen-Poiseuille : problème de Poiseuille (1885)**

**Écoulement bouchon : problème de Grätz (1883)**

# Problème de Grätz



**Transfert thermique stationnaire  
dans un écoulement établi  
d'un fluide visqueux newtonien  
à paramètres constants,  
sans dissipation visqueuse  
et sans diffusion axiale**

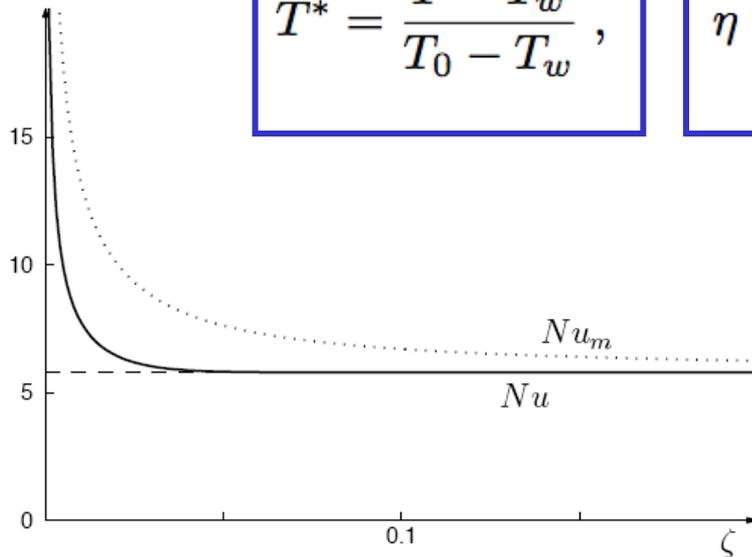
**Ecoulement bouchon**

$$T^* = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w},$$

$$\eta = \frac{r}{R},$$

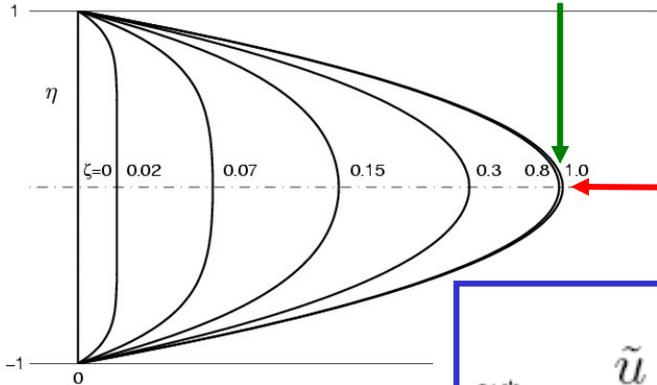
$$\zeta = \frac{\alpha x}{u_m R^2} = \frac{\alpha}{u_m R} \frac{x}{R} = \frac{1}{Pe} \frac{x}{R},$$

La coordonnée horizontale est relié à la vitesse par le temps de diffusion caractéristique !



**Beaucoup d'algèbre inutile !  
Seul, le choix de l'adimensionnalisation est  
vraiment utile à retenir !**

$$\zeta_{c,0.95} = \frac{\nu t_{c,95}}{R^2} \approx 0.536$$



$$\zeta_{c,0.99} = \frac{\nu t_{c,99}}{R^2} \approx 0.814$$

$$\tilde{u}^* = \frac{\tilde{u}}{u_c}$$

$$\eta = \frac{r}{R}$$

$\zeta = \frac{\nu t}{R^2}$ ,  
 Adimensionalisation du temps sur base de la viscosité qui est l'unique donnée contenant une unité de temps !  
 En  $\zeta=1$ , on a un écoulement de régime

$$u(r,t) = \underbrace{u_c \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right)}_{u(r,t \rightarrow \infty)} - \tilde{u}(r,t)$$

Même approche pour le démarrage d'un écoulement !

$$\tilde{u}^*(\eta, \zeta) = f(\eta)g(\zeta)$$

$$f \frac{dg}{d\zeta} = \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{df}{d\eta} \right) g$$

$$\frac{1}{g} \frac{dg}{d\zeta} = \frac{1}{\eta f} \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{df}{d\eta} \right) = -\lambda^2$$

$$\frac{dg}{d\zeta} + \lambda^2 g = 0 \quad g(\zeta) = Ae^{-\lambda^2 \zeta}$$

$$\eta \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{df}{d\eta} + \lambda^2 \eta f = 0 \quad f(\eta) = BJ_0(\lambda\eta) + C\cancel{Y_0}(\lambda\eta)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}^*}{\partial \zeta} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \tilde{u}^*}{\partial \eta} \right) \\ \tilde{u}^*(\eta, 0) = 1 - \eta^2 \\ \tilde{u}^*(1, \zeta) = 0 \end{cases}$$

(i)

Solutions obtenues par la technique de séparation de variables

(ii)

$$\tilde{u}^*(1, \zeta) = 0$$

$$J_0(\lambda_n) = 0$$

Condition à la paroi

$$\tilde{u}^*(\eta, 0) = (1 - \eta^2)$$

$$(1 - \eta^2) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n \eta)$$

$$8 = C_n \lambda_n^3 J_1(\lambda_n)$$

Condition initiale

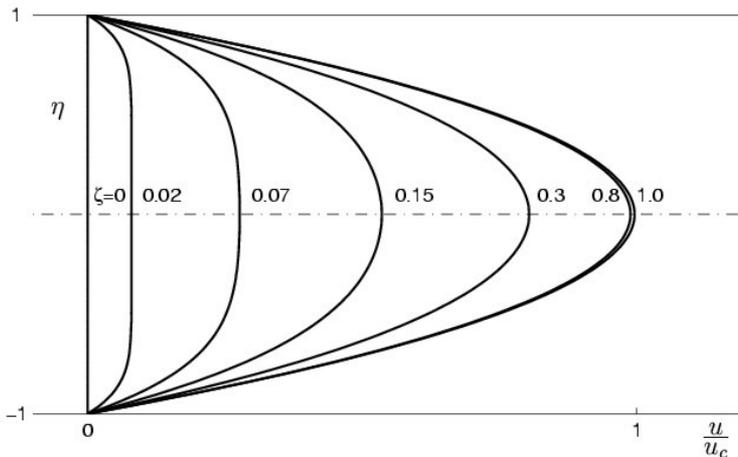
(iii)

Résolution analytique :- (

$$\tilde{u}^*(\eta, \zeta) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n \eta)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \zeta}$$

# Temps d'établissement

$$\frac{u}{u_c}(0, \zeta > \zeta_c) \approx 1 - \frac{8}{\lambda_1^3 J_1(\lambda_1)} e^{-\lambda_1^2 \zeta} = 1 - 1.108 e^{-5.783 \zeta}$$



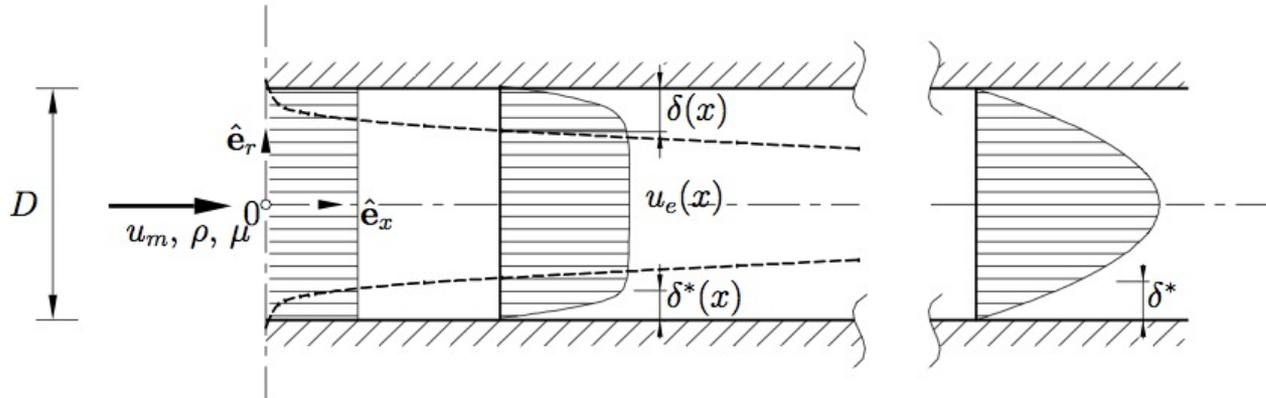
**Temps d'établissement nécessaire  
afin que la vitesse au centre de la conduite vaille un  
pourcentage critique de la valeur du profil de Poiseuille**

$$\zeta_c \approx \frac{1}{\lambda_1^2} = 0.173$$

$$\zeta_{c,0.99} = \frac{\nu t_{c,0.99}}{R^2} \approx 0.814$$

# Longueur d'établissement...

## Analogie spatio-temporelle



**Pas de solution analytique : il est possible de trouver une solution approchée par la théorie des couches limites pour le cas axisymétrique...**

**Ou d'effectuer une petite analogie :-)**

**Longueur d'établissement nécessaire afin que la vitesse au centre de la conduite vaille un pourcentage critique de la valeur du profil de Poiseuille**

$$\frac{x_c}{u_m} \frac{\nu}{R^2} \approx t_c \frac{\nu}{R^2} = \zeta_c,$$

$$4 \frac{x_c}{D} \frac{\nu}{u_m D} \approx \zeta_c \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x_c}{D} \approx \frac{\zeta_c}{4} Re_D \approx 0.2 Re_D$$