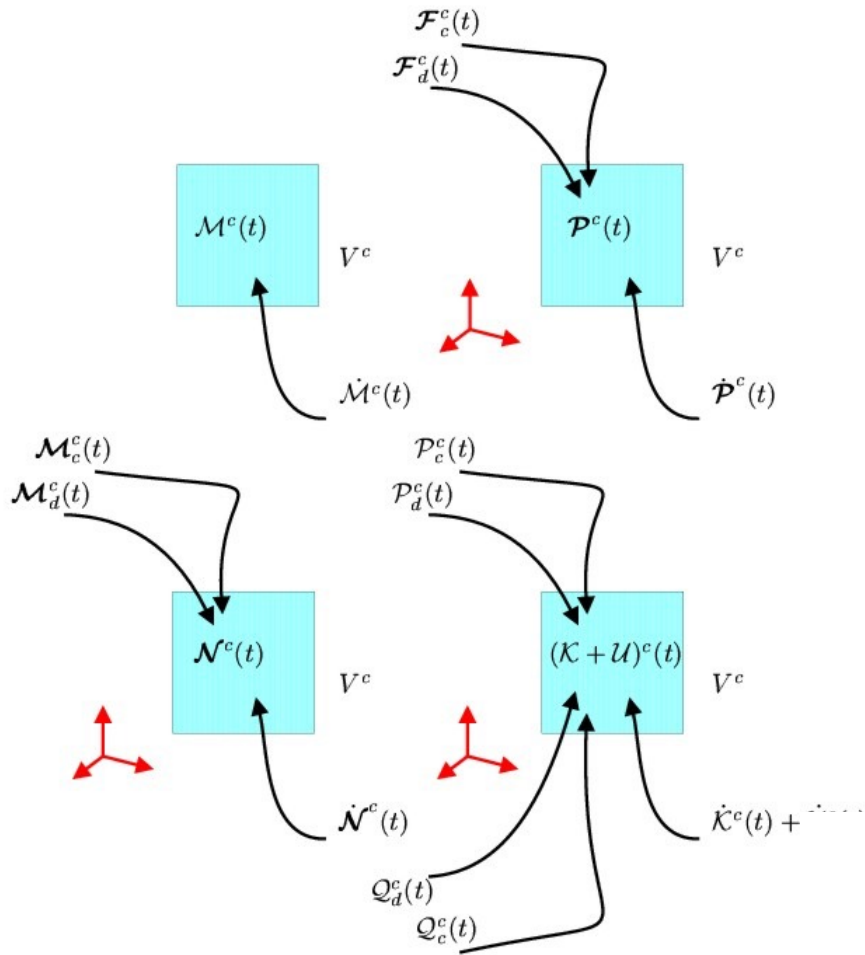


Comment retrouver les équations locales ?



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g},$$

$$\frac{\partial (\rho U)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} U) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \nabla \cdot \mathbf{q}.$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 3\hat{\kappa}(p, T)\mathbf{d}^s + 2\hat{\mu}(p, T)\mathbf{d}^d,$$

$$\mathbf{q} = -\hat{k}(p, T)\nabla T,$$

$$\rho = \hat{\rho}(p, T),$$

$$H = \hat{H}(p, T),$$

$$S = \hat{S}(p, T).$$

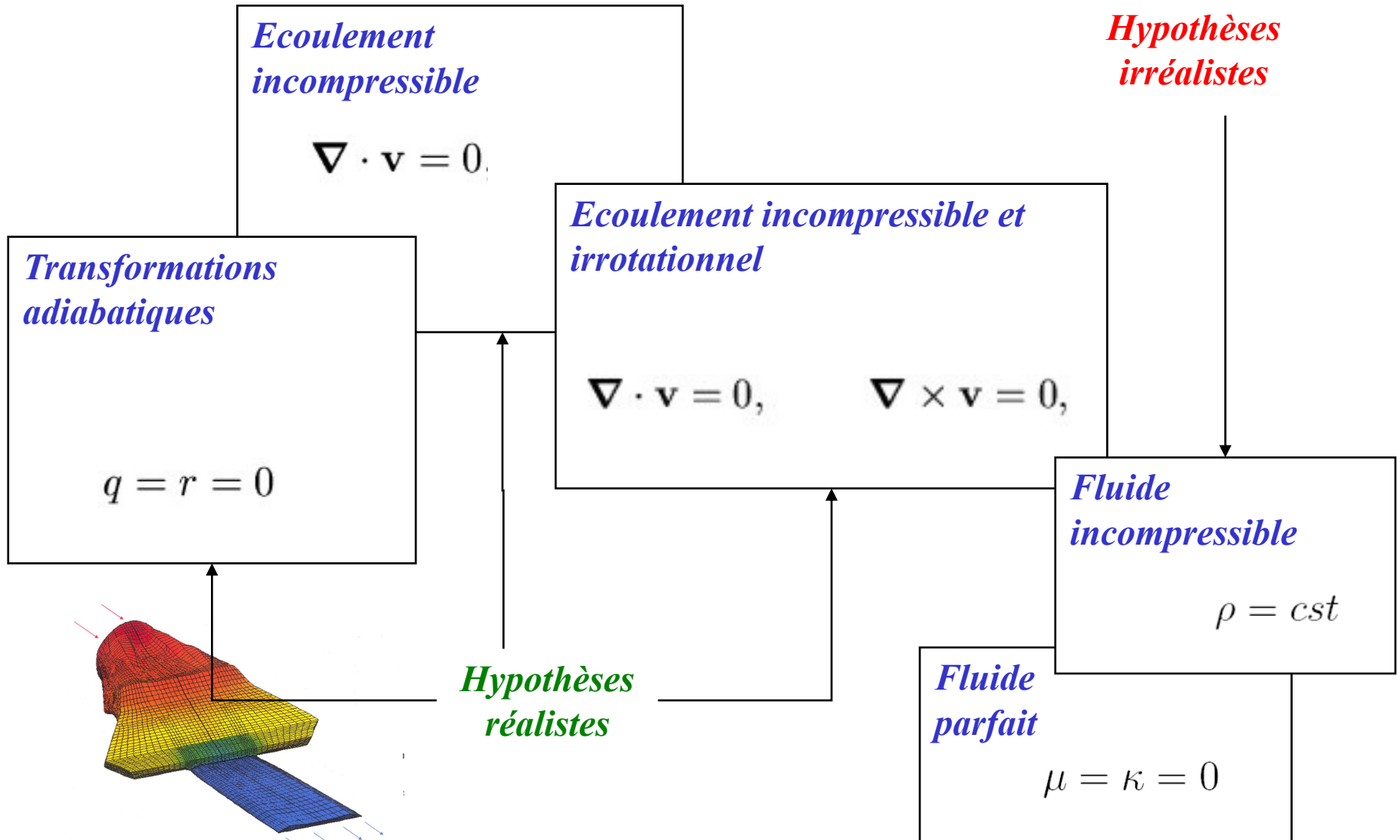
Le compte
est bon !

conservation locale de la masse	ρ	1
conservation locale de la quantité de mouvement	\mathbf{v}	3
conservation locale de l'énergie	T	1
constitution pour les contraintes	$\boldsymbol{\sigma}$	6
constitution pour le flux calorifique	\mathbf{q}	3
constitution pour la masse volumique	p	1
constitution pour l'enthalpie	H	1
constitution pour l'entropie	S	1

Remarque : si une équation de comportement pour l'enthalpie est donnée... on en déduit automatique l'énergie interne et vice-versa.

$$U = -\frac{p}{\rho} + H$$

Simplifications usuelles...



Donc, simplifions...

Dans un écoulement incompressible, il n'y a pas de raison de distinguer chaleur spécifique à volume ou à pression constante.

On écrit simplement le symbole c !

$$\sigma(p, \mathbf{v}) = -p\delta + \mu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)$$

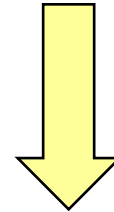
$$\mathbf{q}(T) = -k\nabla T$$

$$U(T) = cT$$

*Fluide newtonien
à paramètres
matériels constants*

*Ecoulement
incompressible*

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$



Les équations de continuité et de quantité de mouvement ne font pas intervenir la température : on peut résoudre la dynamique de l'écoulement sans tenir compte des aspects thermiques !

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g},$$

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + k \nabla^2 T,$$

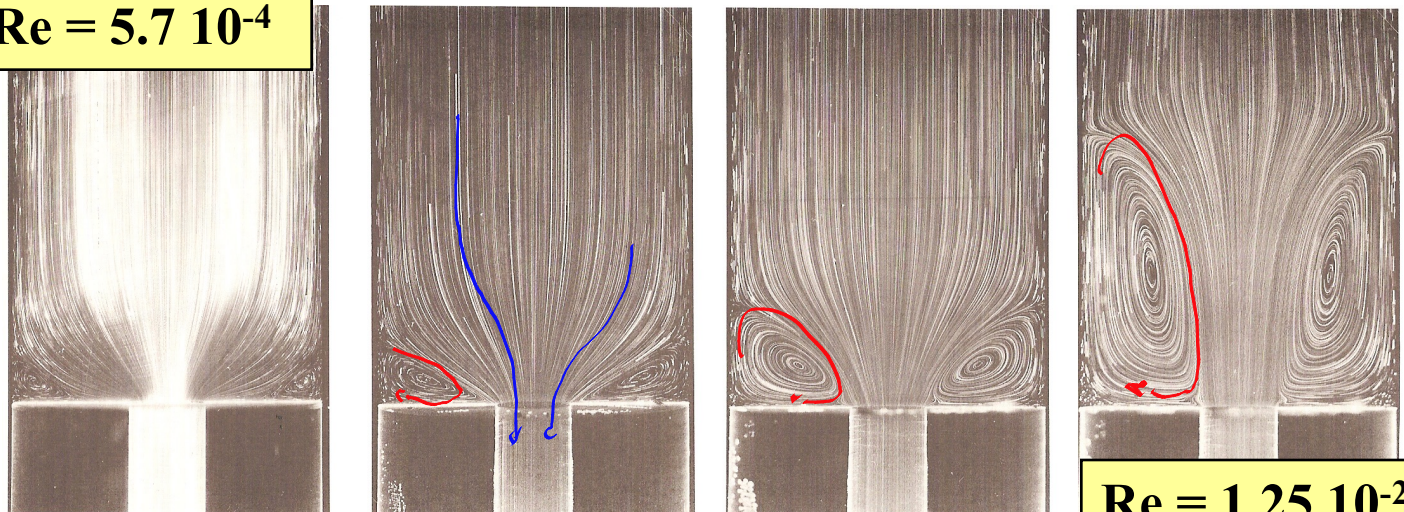
**Ecoulement incompressible d'un
fluide visqueux newtonien à
paramètres constants.**

Écoulements incompressibles stationnaires

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$
$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

Écoulement incompressible stationnaire d'un
fluide visqueux newtonien à paramètres
constants, sans forces de volume.

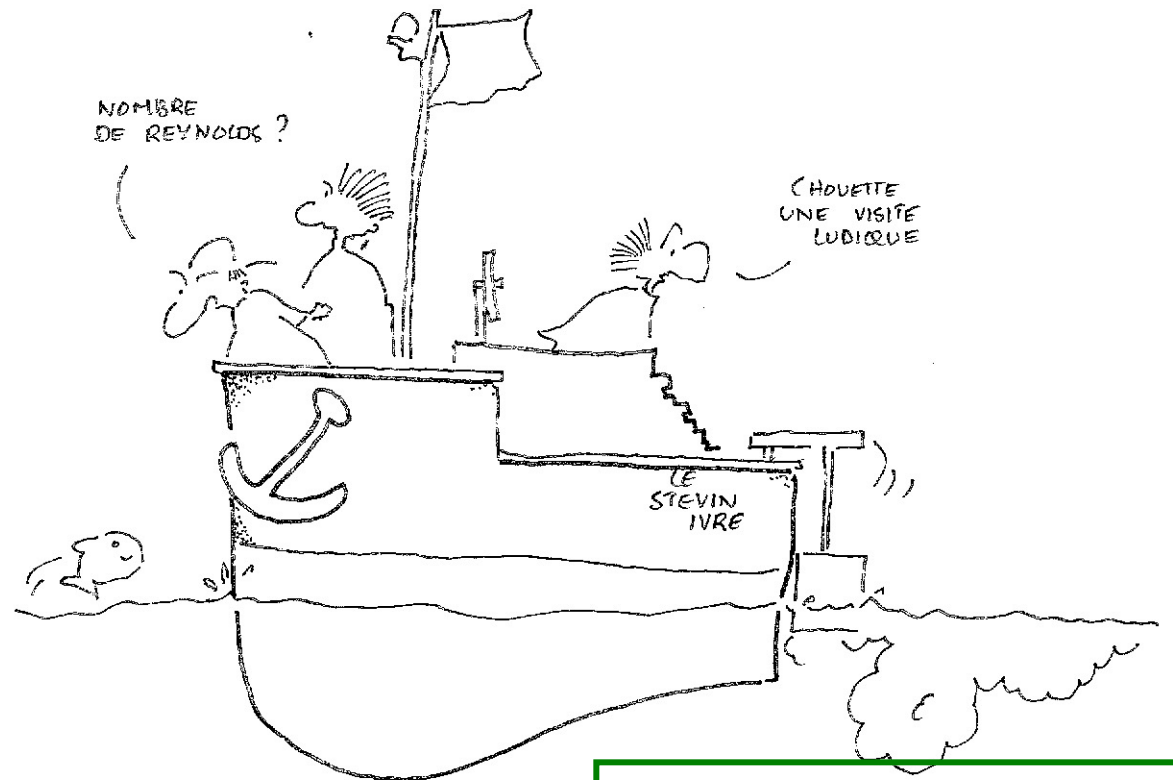
$Re = 5.7 \cdot 10^{-4}$



$Re = 1.25 \cdot 10^{-2}$

(Boger, Hur, Binnington, JNFM 1986)

Adimensionaliser : pourquoi ?



$$U = 0.1 \text{ m/s}$$

$$L = 10 \text{ m}$$

$$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 10^{-3} \text{ kg/ms}$$

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} = 10^6$$

Adimensionnaliser !

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{v} &= 0 \\ \rho (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{v} \end{aligned}$$

FLUIDE NEWTONIEN
ÉCOULEMENT INCOMPRESSIBLE
STATIONNAIRE
PAR. MATERIEL CONSTANTS

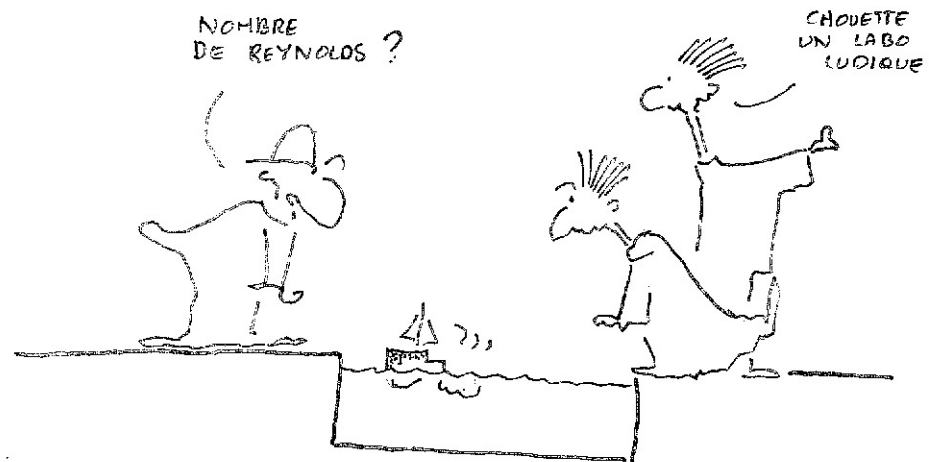
$$\downarrow \quad \underline{x}' = \frac{\underline{x}}{L} \quad \underline{v}' = \frac{\underline{v}}{U} \quad p' = \frac{p - p_0}{\rho U^2}$$

$$[\text{kg/m}^3][\text{m}^2/\text{s}^2] = [\text{N/m}^2] = [\text{Pa}]$$

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot \underline{v}' &= 0 \\ \cancel{\frac{\rho U^2}{L}} (\underline{v}' \cdot \nabla') \underline{v}' &= -\cancel{\frac{\rho U^2}{L}} \nabla' p' + \underbrace{\frac{\mu U}{L^2}}_{\underbrace{\frac{\mu}{\rho U L}}_{= \frac{1}{\text{Re}}}} \nabla'^2 \underline{v}' \end{aligned}$$

So fun :-)
So hard :-)

Adimensionaliser : pourquoi ?



$$\begin{aligned}U &= 10 \text{ m/s} \\L &= 0.1 \text{ m} \\ \rho &= 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ \mu &= 10^{-3} \text{ kg/ms}\end{aligned}$$

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} = 10^6$$

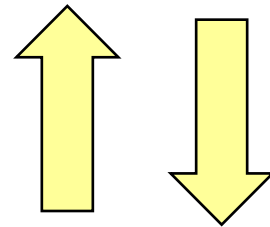
Adimensionaliser

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L},$$

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{U},$$

$$p' = \frac{p - p_0}{\rho U^2},$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\nabla' \cdot \mathbf{v}' &= 0 \\ (\mathbf{v}' \cdot \nabla')\mathbf{v}' &= -\nabla' p' + \frac{1}{Re} (\nabla')^2 \mathbf{v}'\end{aligned}$$

Dans un écoulement incompressible, seul un écart de pression peut être caractéristique... Ajouter ou retirer une pression constante ne change rien à l'écoulement !

En variables adimensionnelles,

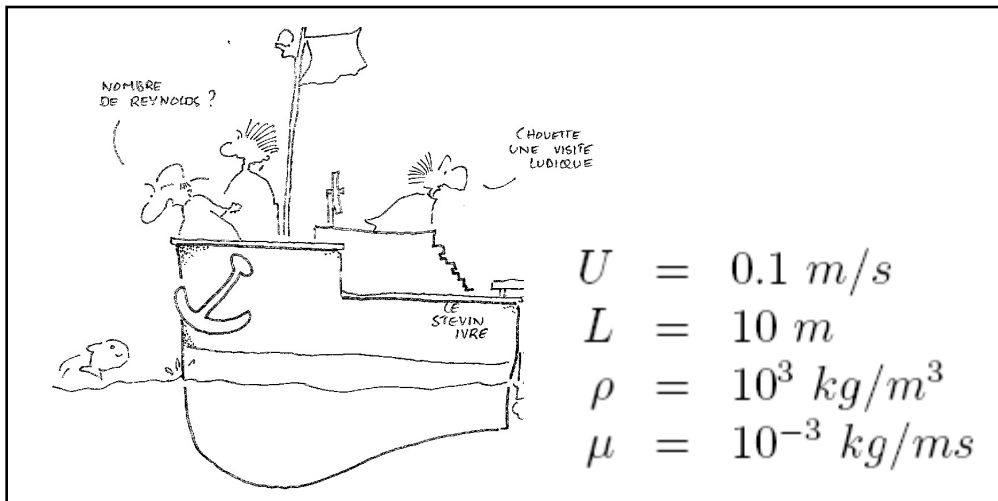
$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} = 10^6$$

Ils ont le même nombre de Reynolds :-)

$$\begin{aligned} U &= 10 \text{ m/s} \\ L &= 0.1 \text{ m} \\ \rho &= 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ \mu &= 10^{-3} \text{ kg/ms} \end{aligned}$$



$$\frac{p_{mer}(\mathbf{x}) - p_{mer}(0)}{\rho U_{mer}^2} = p'_{mer}(\mathbf{x}') = p'_{labo}(\mathbf{x}') = \frac{p_{labo}(\mathbf{x}) - p_{labo}(0)}{\rho U_{labo}^2}$$



$$\begin{aligned} U &= 0.1 \text{ m/s} \\ L &= 10 \text{ m} \\ \rho &= 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ \mu &= 10^{-3} \text{ kg/ms} \end{aligned}$$

...ces deux écoulements sont identiques.

C'est quoi physiquement le nombre de Reynolds ?

*Effets visqueux
Diffusion de la quantité
de mouvement*

$$\boxed{\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}} = -\nabla p + \boxed{\mu \nabla^2 \mathbf{v}}$$

$\mathcal{O}(\rho U^2/L)$ $\mathcal{O}(\mu U/L^2)$

*Effets d'inertie
Transport de la quantité
de mouvement*

$$Re = \frac{\boxed{\text{Forces d'inertie}}}{\boxed{\text{Forces visqueuses}}} = \frac{\rho U^2/L}{\mu U/L^2} = \frac{\rho U L}{\mu}$$

Nombre de Reynolds

caractérise un écoulement d'un fluide !

$$Re = \frac{\rho_0 u_0 L}{\mu}$$

à éventuellement savoir, à titre de *double check*

Forces d'inertie

Forces de viscosité

à savoir !

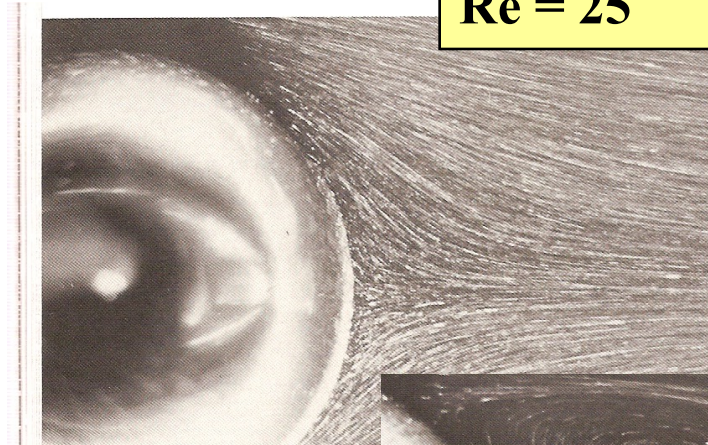


Born: 23 Aug 1842 in Belfast, Ireland

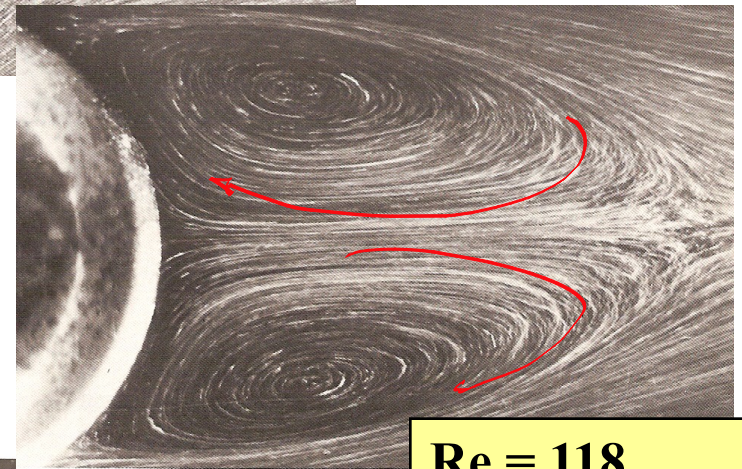
Died: 21 Feb 1912 in Watchet, Somerset, England

Que se
passe-t-il
lorsque l'on
augmente
le nombre
de Re ?

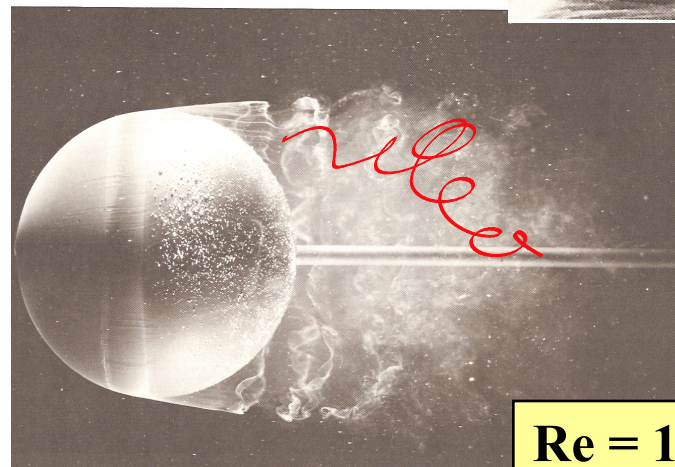
$Re = 25$



$Re = 118$



$Re = 15000$



(Van Dyke, 1982)

Re très très petit...

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$0 = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

Le terme d'inertie est négligeable

*Ecoulements
incompressibles
rampants*

Equations de Stokes

Le terme visqueux est négligeable

*Ecoulements
incompressibles
irrotationnels*

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p$$

...et Re très très grand !

Equations d'Euler

Ecoulements incompressibles stationnaires plans

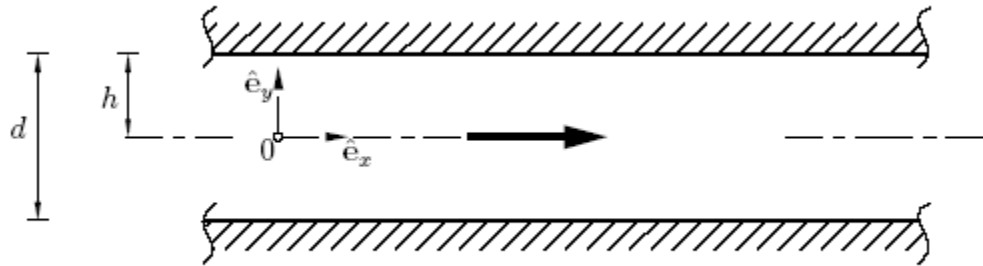
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

Ecoulement incompressible stationnaire d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants, sans forces de volume.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$\rho \left(v \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$
$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Écoulements 3D – 2D – 1D



Écoulements établis :

- Une seule vitesse u
- Pas de variations de u le long de l'axe de la conduite (c'est-à-dire x)

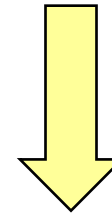
Un écoulement établi est un écoulement dont le profil transversal de vitesse est le même quelle que ce soit la section transversale à l'écoulement.

La section doit évidemment être constante !

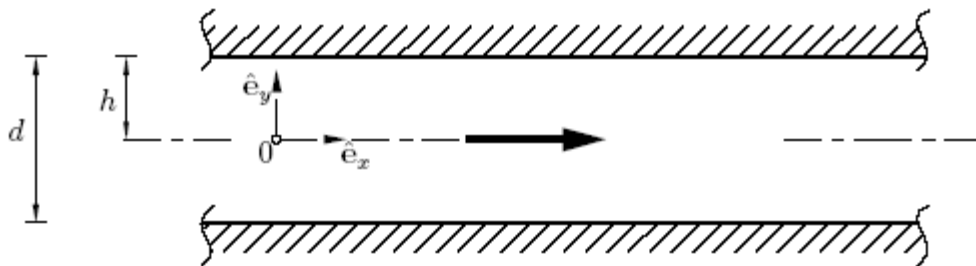
Écoulements
incompressibles
stationnaires
plans
établis

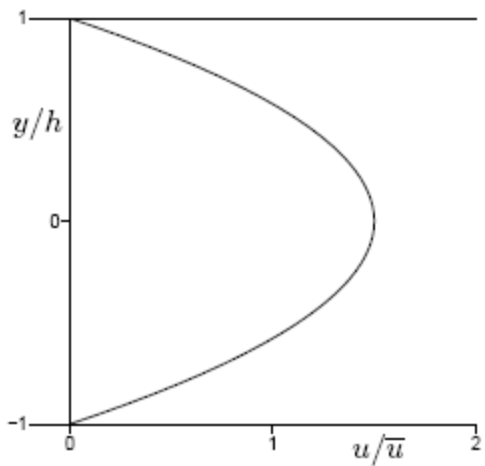
$$\begin{aligned} \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} &= 0 \\ \rho \left(\cancel{u \frac{\partial u}{\partial x}} + \cancel{v \frac{\partial u}{\partial y}} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \rho \left(\cancel{u \frac{\partial v}{\partial x}} + \cancel{v \frac{\partial v}{\partial y}} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}} \right) \end{aligned}$$

*En imposant $v=0$
sur une des parois...*

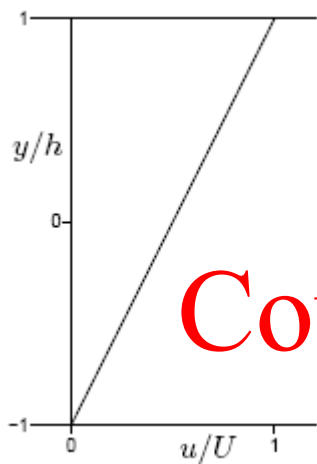
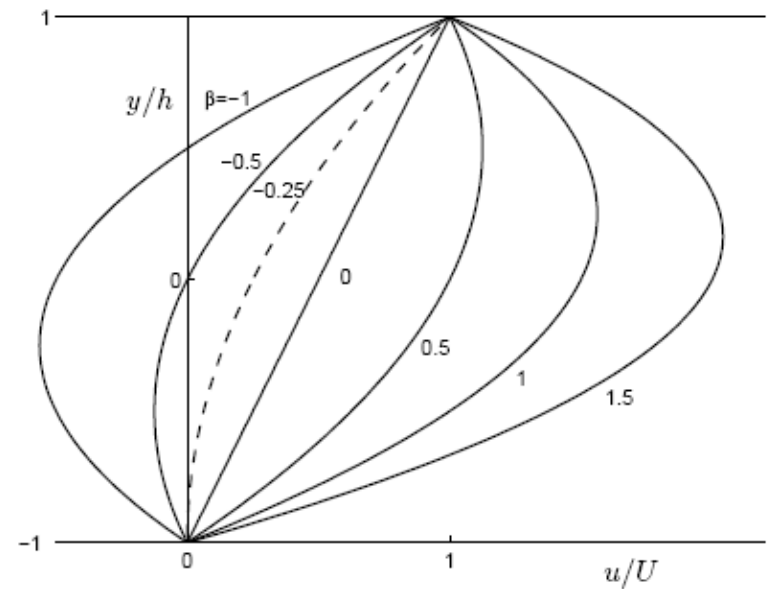


$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$$





Poiseuille



Couette

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v) = 0$$

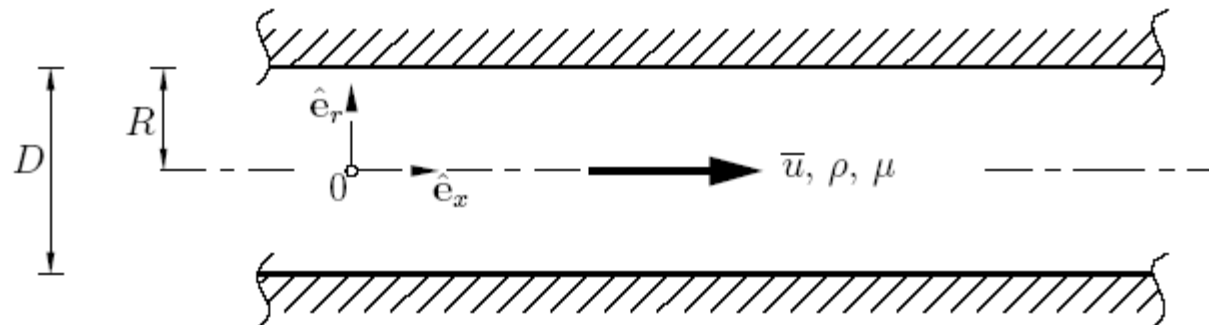
$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} \right)$$



$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right)$$

Écoulements
incompressibles
stationnaires
axisymétriques
établis



Et le thermique...

Écoulement incompressible d'un
fluide visqueux newtonien à
paramètres constants.

Les équations de continuité et de quantité
de mouvement ne font pas intervenir la
température : on peut résoudre la
dynamique de l'écoulement sans tenir
compte des aspects thermiques !

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

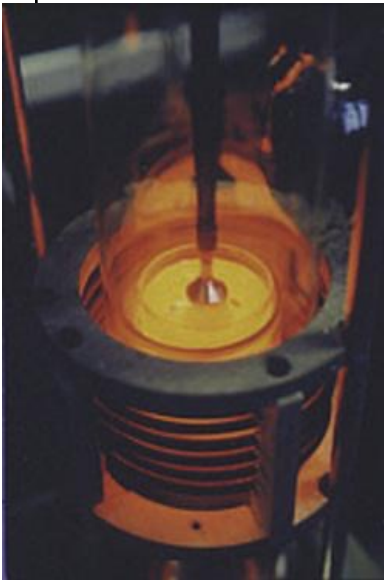
$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g},$$

Etape 1

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + k \nabla^2 T,$$

Etape 2

Une fois la dynamique de l'écoulement
connue, on peut ensuite résoudre le
problème thermique...



Viscosité cinématique

Diffusivité thermique

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0$$

$$(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = \underbrace{\frac{\mu}{\rho}}_{\substack{\text{VISCOSITE} \\ \text{CINEMATIQUE} \quad [\frac{m^2}{s}]}} \nabla^2 \underline{v} - \frac{1}{\rho} \nabla P$$

$P \triangleq \frac{1}{\rho}$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$(\underline{v} \cdot \nabla) T = \underbrace{\frac{k}{\rho c}}_{\substack{\text{CONDUCTIBILITE} \\ \text{THERMIQUE} \quad \alpha \quad \text{DIFFUSIVITE} \\ \text{THERMIQUE} \quad [\frac{m^2}{s}]}} \nabla^2 T + \frac{2\mu}{\rho c} \frac{d}{dt} T$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\nabla \cdot \underline{v}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

WINCKELMANS

LEGAT
DOGHRI
CHATELAIN

$$(\nabla \cdot \underline{v}) \cdot \underline{v}$$

WINCKELMANS

$$= (\underline{v} \cdot \nabla) v$$

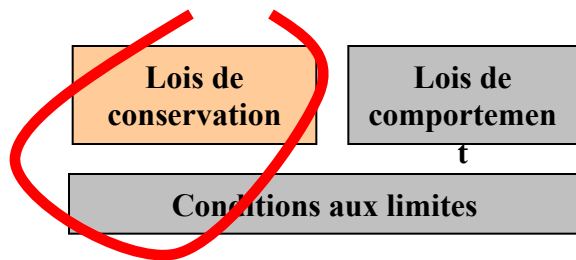
=

$$\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}$$

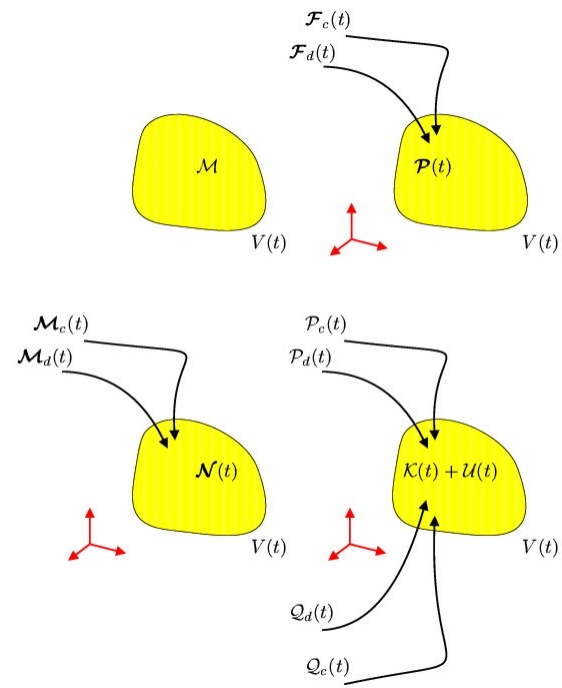
LEGAT

Un compromis délicat
à trouver entre les deux titulaires !

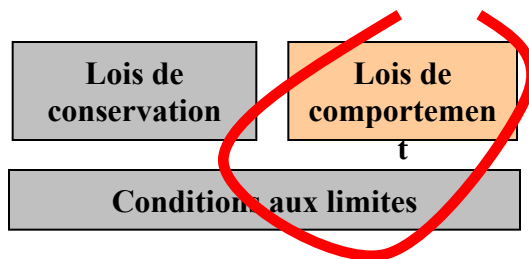
Principes physiques universels !



*Conservation de la masse,
de la quantité de mouvement,
du moment de la quantité de mouvement
et de l'énergie.*



Lois de comportement très approximatives...



$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 3\hat{\kappa}(p, T)\mathbf{d}^s + 2\hat{\mu}(p, T)\mathbf{d}^d,$$

$$\mathbf{q} = -\hat{k}(p, T)\nabla T,$$

Loi de Fourier

$$\begin{aligned}\rho &= \hat{\rho}(p, T), \\ H &= \hat{H}(p, T), \\ S &= \hat{S}(p, T).\end{aligned}$$


Modèle du fluide visqueux Newtonien

Mécanismes du transfert conductif

Le point de vue microscopique...

On examine le transfert d'énergie entre porteurs du milieu considéré. La fonction de distribution des porteurs est régie par *l'équation de Boltzmann* de la théorie cinétique.

L'énergie se propage du chaud vers le froid


$$\mathbf{q} = -k \nabla T$$

Isolants 10^{-2} W/mK
Métaux 10^2 W/mK

Matériau	k (W/mK)
eau (à pression atmosphérique)	0.67
cuivre	380
aluminium	260
acier	45

Lois de conservation

Lois de comportement

Conditions aux limites

L'approche phénoménologique...

Un flux thermique dans un corps est lié à l'existence d'un gradient de température. *L'équation de Fourier* relie ces deux grandeurs.

Validité de la loi de Fourier...

$$\mathbf{q} = -k \nabla T$$

L'effet (**le flux de chaleur**) est proportionnel
à la cause (**le gradient de température**)

Toutefois, lorsqu'on observe un déséquilibre thermique initial, il faut un temps très faible, mais fini de l'ordre de grandeur du temps moyen entre collisions pour que les porteurs donnent naissance au flux thermique...


L'absence d'inertie dans l'expression de Fourier conduit à une **vitesse de propagation infinie** dans l'équation de la chaleur (équation parabolique)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = r + \nabla \cdot (k \nabla T)$$

Diffusivité thermique

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = r + \nabla \cdot (k \nabla T)$$

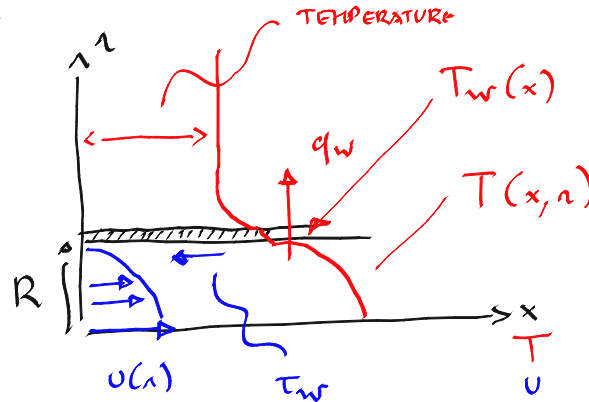

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{r}{k} + \nabla^2 T$$

Caractérise la facilité avec laquelle un flux de chaleur transmis à un solide se traduit par un relèvement de température

Matériau	Argent	Cuivre	Acier	Verre
$10^6 \alpha \text{ m}^2/\text{s}$	170	103	12.9	0.59
	9.5 min	16.5 min	2.2 h	2.0 jours

*Milieu semi infini soumis initialement à température nulle
Surface externe mise à 100 degrés.
Temps requis pour avoir 50 degrés à 30 cm*

De l'eau chaude dans un tuyau !



ÉCOULEMENT
DANS LE TUYAU

$$u(r) = 2u_m \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

$$\frac{du}{dr}(r) = -4\frac{u_m}{R} \frac{r}{R}$$

TRANSFERT
DE CHALEUR
ÉTABLI

$$\frac{\partial}{\partial x} (T_w(x) - T(x, r)) = 0$$

$$\frac{dT_w}{dx} = \frac{\partial T}{\partial x}$$

ÉCOULEMENT
ÉTABLI

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad \text{:-)}$$

$$u \quad \text{:-)}$$

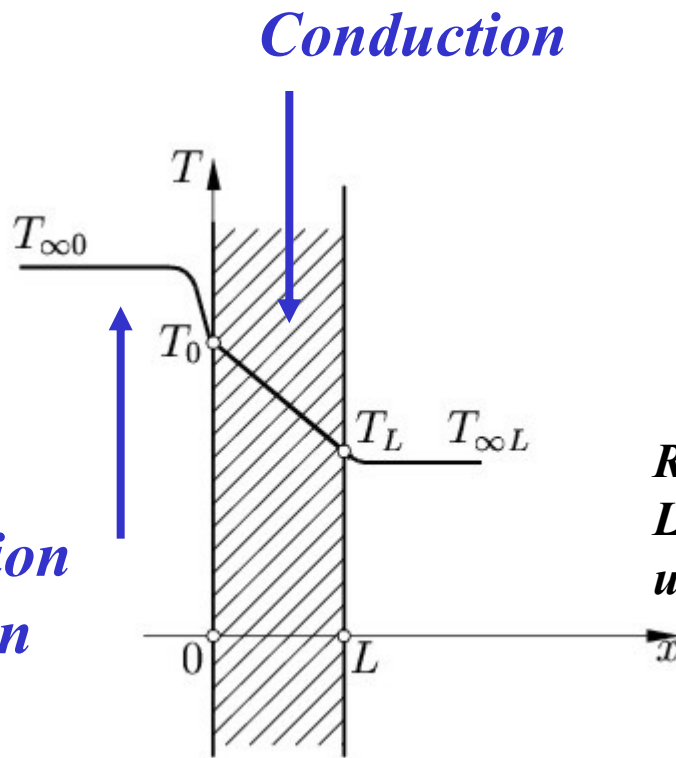
2 CAS

$T_w = \text{CST}$

T_w LINÉAIRE

Conduction dans une plaque soumise à la convection

*Convection
Radiation*

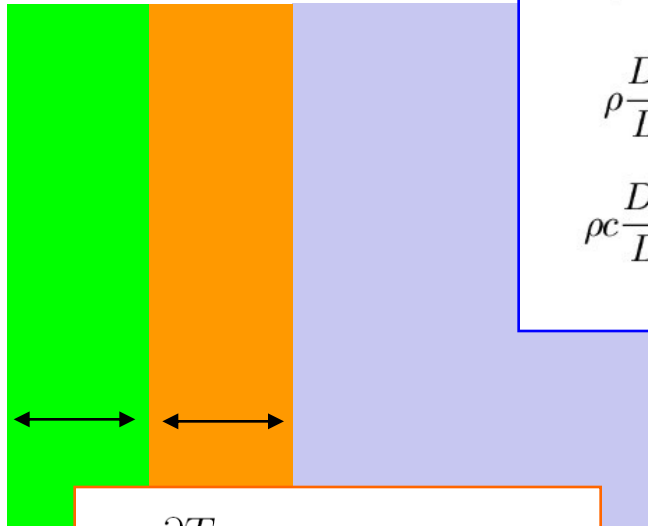


régime permanent



*Radiateur domestique : $h = 15 \text{ W/m}^2\text{K}$
La convection libre et le rayonnement ont
une contribution plus ou moins identique*

Un problème
pas aussi élémentaire
que prévu...



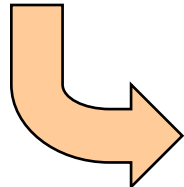
~~$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{d}) + \rho \mathbf{g},$$

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \rho \mu (\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + \nabla \cdot (k \nabla T),$$~~

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = r + \nabla \cdot (k \nabla T)$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = r + \nabla \cdot (k \nabla T)$$

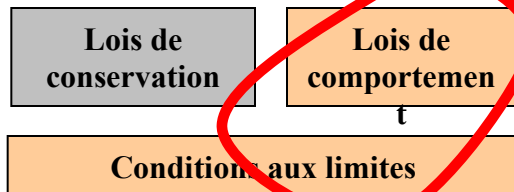


$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -h \Delta T$$

Simplifions-le !

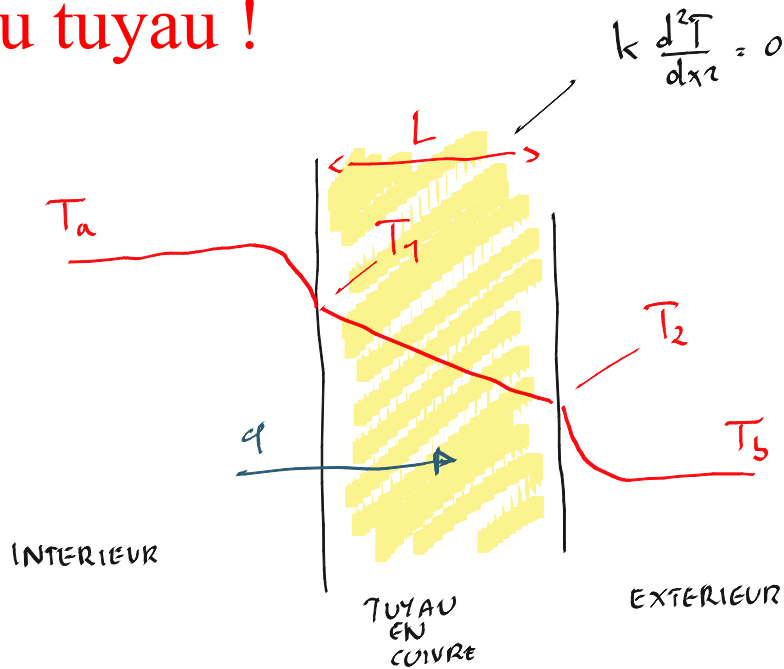
Loi de Newton

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -h\Delta T$$



Type de transfert	Fluide	$h(W/m^2K)$
Convection forcée	gaz	10...300
	liquide aqueux	500...12000
	huile	50...1700
	métal liquide	6000...110000
Convection naturelle	gaz	5...30
	liquide aqueux	100...1000
Changement de phase	eau, ébullition	3000...60000
	eau, condensation	5000...110000

Dans la paroi
du tuyau !



q, T_1, T_2

$$q = h_a (T_a - T_1)$$

$$q = k (T_1 - T_2) / L$$

$$q = h_b (T_2 - T_b)$$

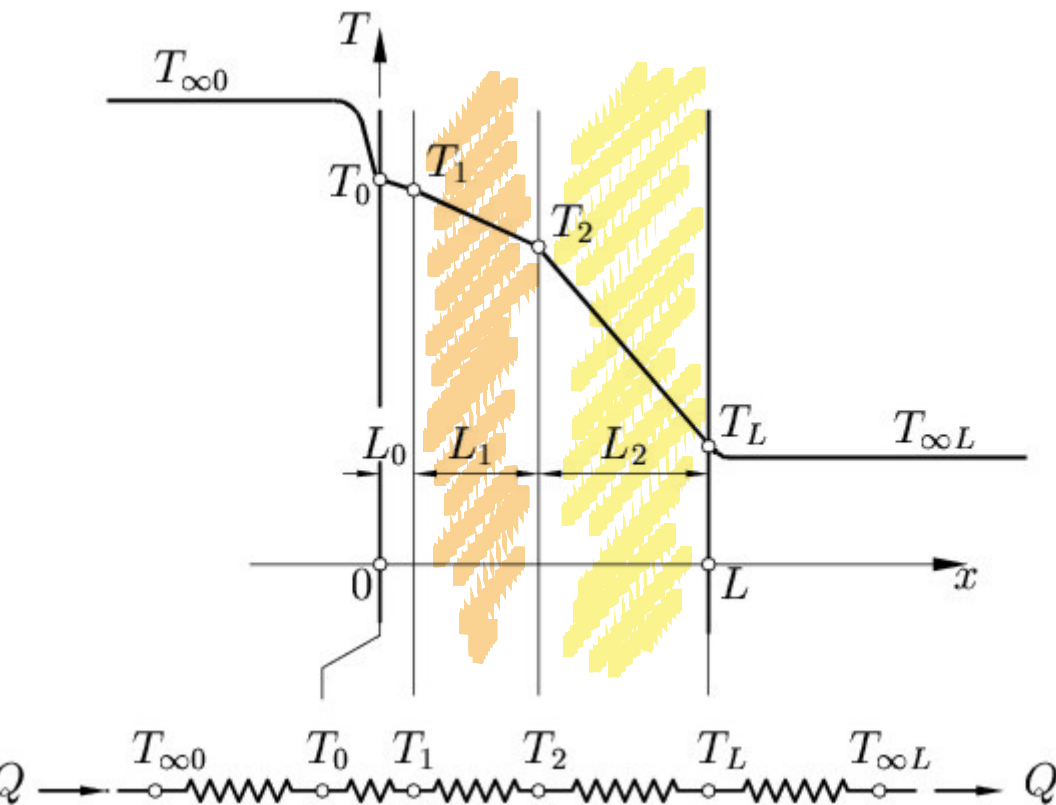
$$\cancel{T_a - T_1} = \frac{q}{h_a}$$

$$\cancel{T_1 - T_2} = \frac{qL}{k}$$

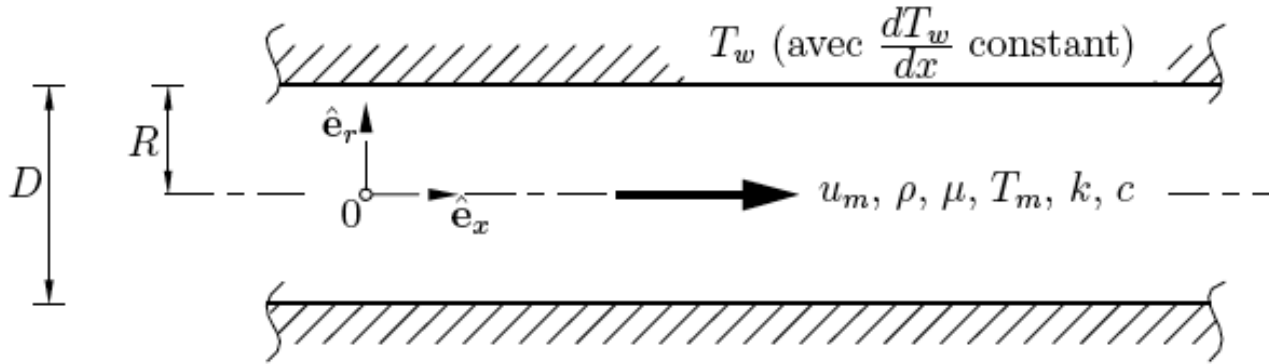
$$\cancel{T_2 - T_b} = \frac{q}{h_b}$$

$$T_a - T_b = q \left[\frac{1}{h_a} + \frac{L}{k} + \frac{1}{h_b} \right]$$

Conduction dans une plaque soumise à la convection



analogie avec l'électricité
- résistance convective
- résistance conductive



$$\frac{\partial}{\partial x} (T - T_w) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_w}{dx}$$

Transfert de chaleur établi

L'écoulement est établi lorsque le profil de la différence de températures du fluide et de la paroi reste constante le long de l'axe de la conduite !

Cela suppose que l'écoulement est établi !

Dans le tuyau !

CAS 1
 $T_w = c_h$

$$\cancel{\rho c v \frac{\partial T}{\partial x}} = \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r k \frac{\partial T}{\partial r})}_{\text{CONDUCTION}} + \underbrace{\mu \left(\frac{dv}{dr} \right)^2}_{\text{DISSIPATION VISQUEUSE}} \quad \frac{dv}{dr} = -\frac{4v_m r}{R^2}$$

~~CHALEUR TRANSPORTÉE~~

$$\cancel{2 \rho c v_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \frac{dT_w}{dx}} = k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dT}{dr} \right] + 16 \mu v_m^2 \frac{r^2}{R^4}$$

$$k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dT}{dr} \right] = -16 \mu v_m^2 \frac{r^2}{R^4}$$

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{dT}{dr} \right] = -\frac{16 \mu v_m^2}{k} \frac{r^3}{R^4}$$

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{4 \mu v_m^2}{k} \frac{r^4}{R^4} + A$$

$$\frac{dT}{dr} = \dots \frac{r^3}{R^4} + \frac{A}{r}$$

$$T(r) = -\frac{\mu v_m^2}{k} \frac{r^4}{R^4} + \cancel{A \log(r)} + B$$

$$\eta = \frac{r}{R}$$

$$T(r) - T_w = \frac{\mu v_m^2}{k} (1 - \eta^4)$$

CAS 2
 $\frac{dT_w}{dx} = \text{CST}$

$$2 \rho c u_m (1 - \frac{r^2}{R^2}) \frac{dT_w}{dx} = k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dT}{dr} \right] + 16 \mu u_m^2 \frac{r^2}{R^4}$$

$$k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dT}{dr} \right] = -16 \mu u_m^2 \frac{r^2}{R^4} + 2 \rho c u_m \frac{dT_w}{dx} (1 - \frac{r^2}{R^2})$$

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{dT}{dr} \right] = -16 \frac{\mu u_m^2}{k} \frac{r^3}{R^4} + 2 \rho c u_m \frac{dT_w}{dx} \left(r - \frac{r^3}{R^2} \right)$$

$$r \frac{dT}{dr} = -4 \frac{\mu u_m^2}{k} \frac{r^4}{R^4} + A + \dots \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right)$$

$$\frac{dT}{dr} = \dots \frac{r^3}{R^4} + \frac{A}{r} + \dots \left(\frac{r}{2} - \frac{r^3}{4R^2} \right)$$

$$T(r) = -\frac{\mu u_m^2}{k} \frac{r^4}{R^4} + A \log(r) + B + \dots \left(\frac{r^2}{4} + \frac{r^4}{16R^2} \right)$$

$$T(r) - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k} (1 - \eta^4) - 2 \rho c u_m \frac{dT_w}{dx} \frac{R^2}{16} (\eta^4 - 4\eta^2 + 3)$$

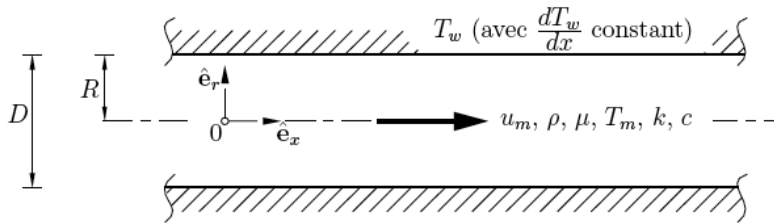
$$\left[\frac{kg}{m^3} \right] \left[\frac{m^2}{s^2} \right] \left[\frac{mK}{W} \right]$$

$$\frac{\mu u_m^2}{k} B$$

$$\tau = 2\mu \frac{d}{dx}$$

$$q = -k \nabla T$$

$$B \triangleq \rho c \frac{dT_w}{dx} \frac{R^2}{u_m \mu}$$

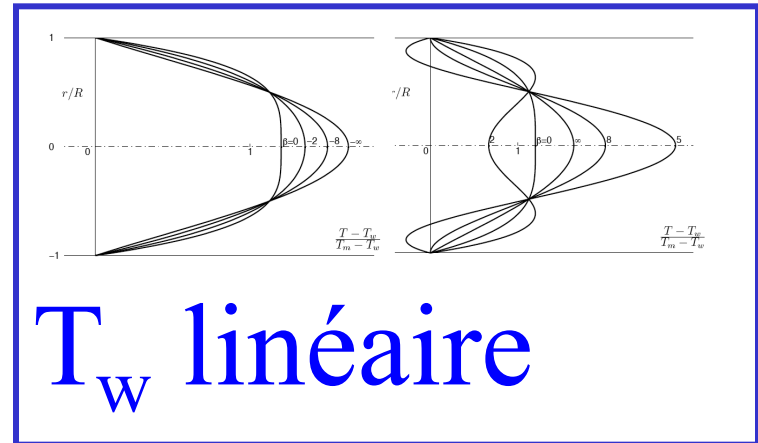


T_w constante

Si T_w constante...

$$\rho c \frac{dT_w}{dx} 2u_m \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) = k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} (T - T_w) \right) + 16 \mu \frac{u_m^2}{R^2} \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Deux cas particuliers



T_w linéaire

$$T - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right)$$

T_w constante

Si T_w constante...

$$\rho c \frac{dT_w}{dx} 2 u_m \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) = k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} (T - T_w) \right) + 16 \mu \frac{u_m^2}{R^2} \left(\frac{r}{R} \right)^2$$

$$T - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right) - \frac{1}{8} \frac{\rho c}{k} \frac{dT_w}{dx} u_m R^2 \left(3 - 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right)$$

T_w linéaire

Un nombre adimensionnel
qui mesure le rapport
entre deux effets !

$$\beta = \rho c \frac{dT_w}{dx} \frac{R^2}{\mu u_m}$$

$$T - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k} \left[\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right) - \frac{1}{8} \beta \left(3 - 4 \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^4\right) \right]$$

*Effets de dissipation visqueuse
Transformation d'énergie*

*Effets de convection
Transport de l'énergie*