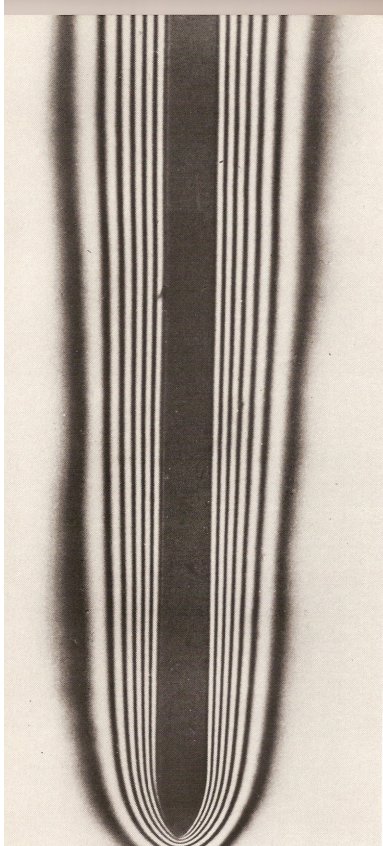


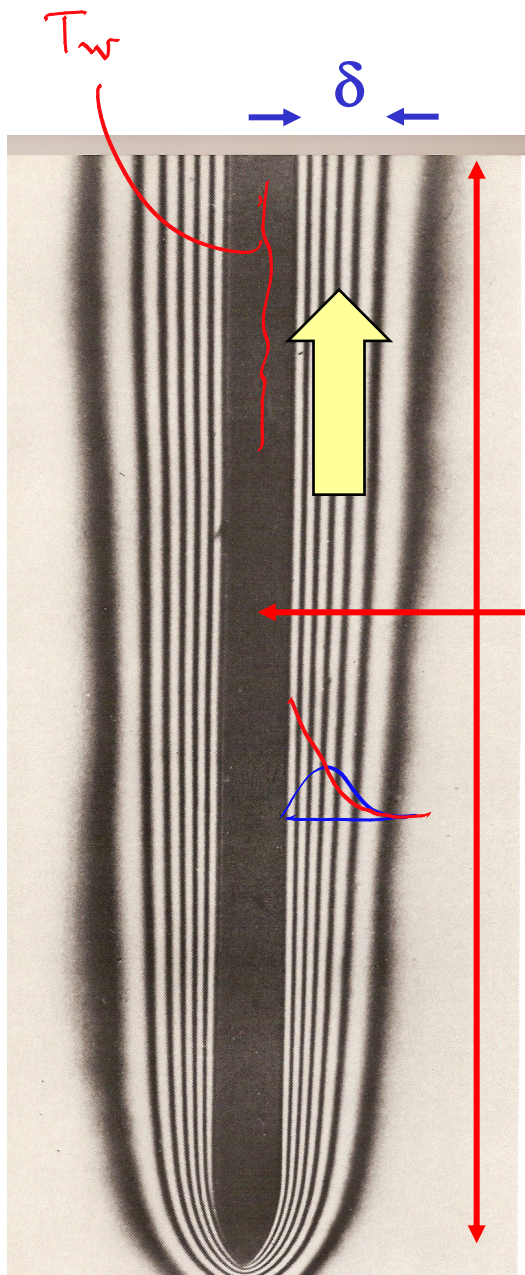
Écoulements avec deux échelles spatiales (suite)



*Convection naturelle
le long d'une plaque
verticale : écoulement
laminaire permanent*



*Lubrification et convoyage
hydraulique : butée Michell*

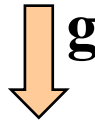


Convection naturelle le long d'une plaque suspendue dans l'air

L

T_e ρ_e

*Plaques
chaude*



L'air chaud près de la plaque devient plus léger et s'élève naturellement sous l'effet de la force d'Archimède (flottabilité)(buoyancy)

*La photo a été dilatée d'un facteur six dans le long de l'axe horizontal !
(Gebhart, University of Pennsylvania)*

Le fluide se dilate (un peu) sous l'effet de la chaleur...

*Coefficient de
dilatation
thermique*

$$\beta \triangleq -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}$$

$$\rho(p, T) = \rho_0 \left(1 - \underbrace{\beta(T - T_0)}_{\ll 1} + \dots \right)$$

*Où faut-il vraiment tenir compte de
cette petite variation de densité ?*



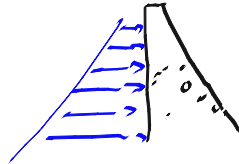
Equations de Boussinesq

$$\rho_0 (1 - \beta(T - T_0)) \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \rho_0 (1 - \beta(T - T_0)) g$$

$\ll 1$
 $\rho_0 g$
 $\ll 1$

ρ_0

SUPPOSONS
QUE LA PRESSION
EST HYDROSTATIQUE

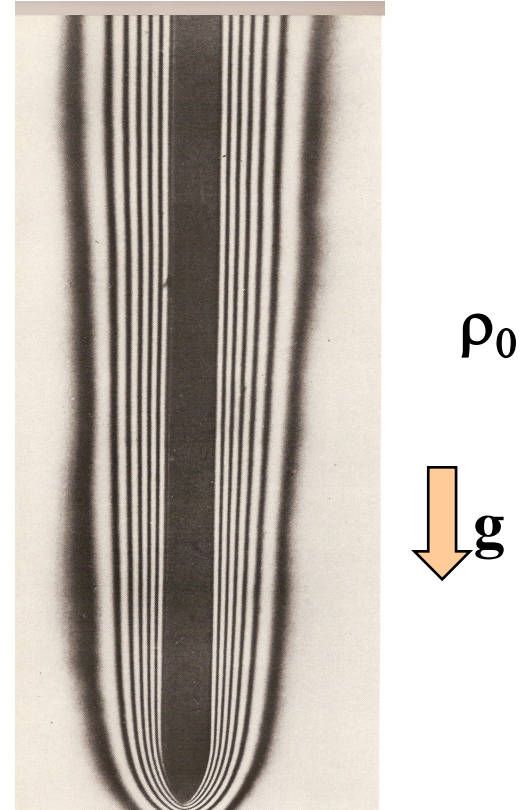


$$p(x, y) = -\rho_0 g y - p_0$$

.... MAIS
EN FAIT
IL NE FAUDRA
PAS LE
SUPPOSER!

La pression est globalement hydrostatique*

$$p(x, y) \simeq p_0(y) = -\rho_0 g y$$



** En toute rigueur, il s'agit d'un résultat qu'on pourrait déduire mathématiquement des équations, mais pour se faciliter la vie, nous allons supposer qu'il s'agit simplement d'une approximation simplificatrice !*

$$\rho_0(1 - \underbrace{\beta(T - T_0)}_{\ll 1}) \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial y}}_{\rho_0 g} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \rho_0(1 - \beta(T - T_0))g$$

$$\rho_0 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho_0 \beta(T - T_0)g$$

Approximation de Boussinesq

On néglige les variations de masse volumique dans tous les termes sauf dans la poussée d'Archimède...

** Au passage, on observe que cette hypothèse n'a vraiment du sens que dans le cas où la pression est hydrostatique ... En d'autres mots, on introduit soit l'approximation hydrostatique, soit l'approximation de Boussinesq, mais on doit introduire en tous cas une approximation :-)*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \beta(T - T_0)g$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

La présence de température dans le terme d'Archimède couple ici le problème de l'écoulement et le problème thermique !

Equations de Navier-Stokes avec l'hypothèse de Boussinesq

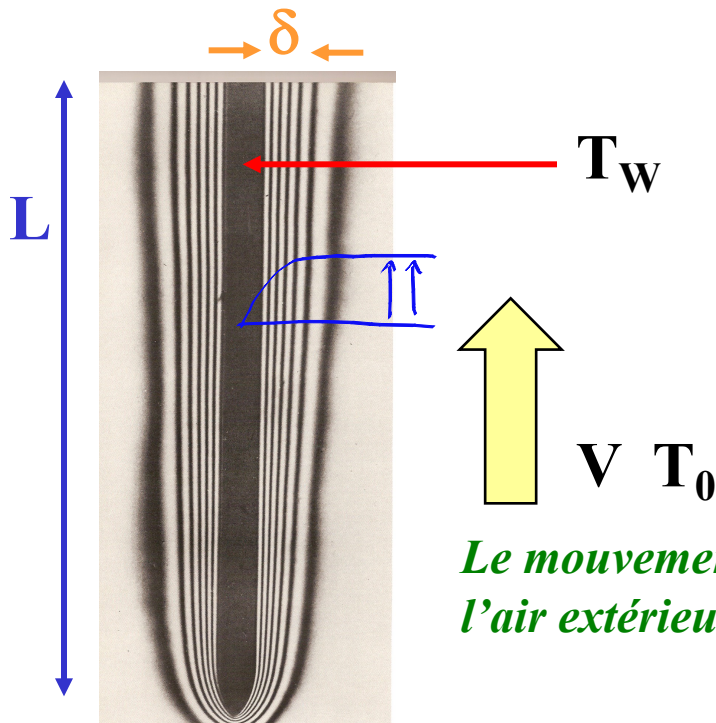
Valentin-Joseph Boussinesq



*né à Saint-André-de-Sangonis (Hérault) le 13 mars 1842,
mort le 19 février 1929 à Paris*

"Il faut savoir que dans la plupart des mouvements provoqués par la chaleur sur nos fluides pesants, les volumes ou les densités se conservent à très peu près, quoique la variation correspondante du poids de l'unité de volume soit justement la cause des phénomènes qu'il s'agit d'analyser. De là résulte la possibilité de négliger les variations de la densité, là où elles ne sont pas multipliées par la gravité g , tout en conservant, dans les calculs, leur produit par celle-ci"

Mais, tout d'abord, un peu de convection forcée



Le mouvement vertical de l'air extérieur est forcé

Plus facile car, il est ici possible de découpler le problème de l'écoulement et le problème thermique !

Problème de l'écoulement

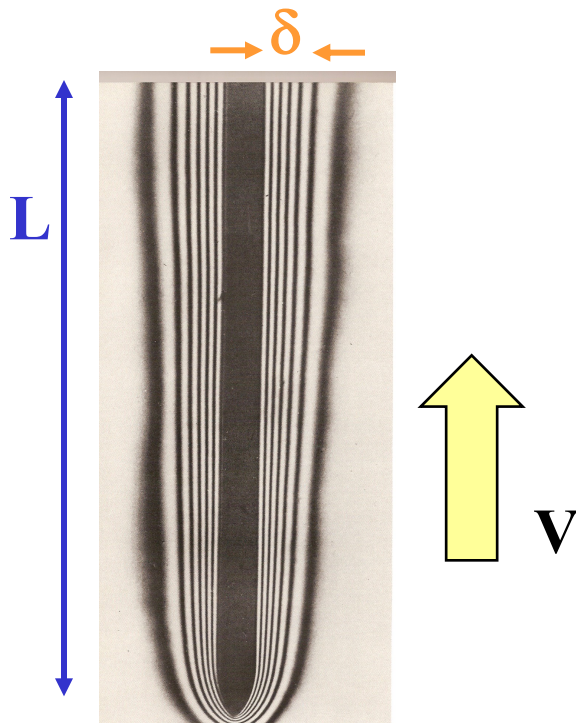
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g},$$

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = 2\mu \mathbf{d} : \mathbf{d} + r + \nabla \cdot (k \nabla T).$$

Problème thermique

-i- problème de l'écoulement



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

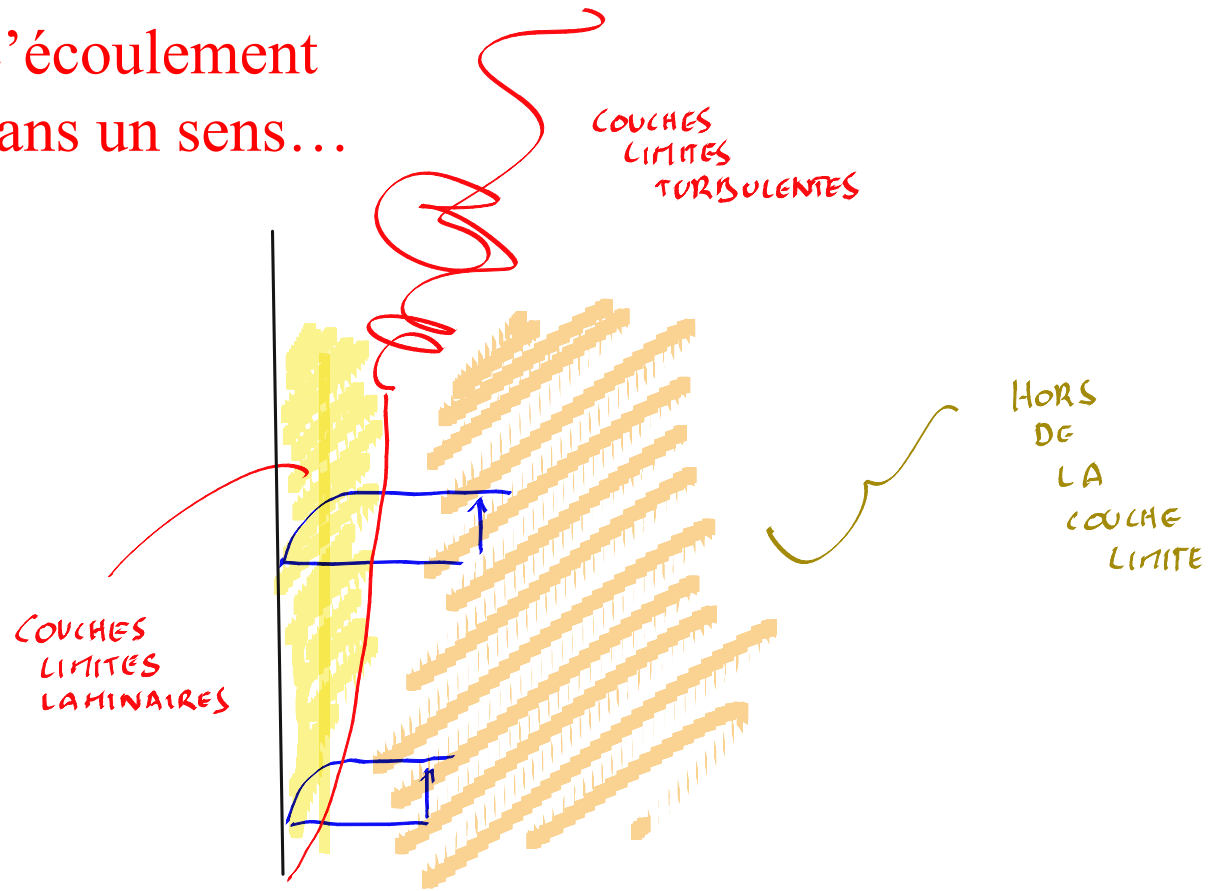
Près de la plaque, les effets visqueux sont dominants...

C'est la zone dite de couche limite de vitesse

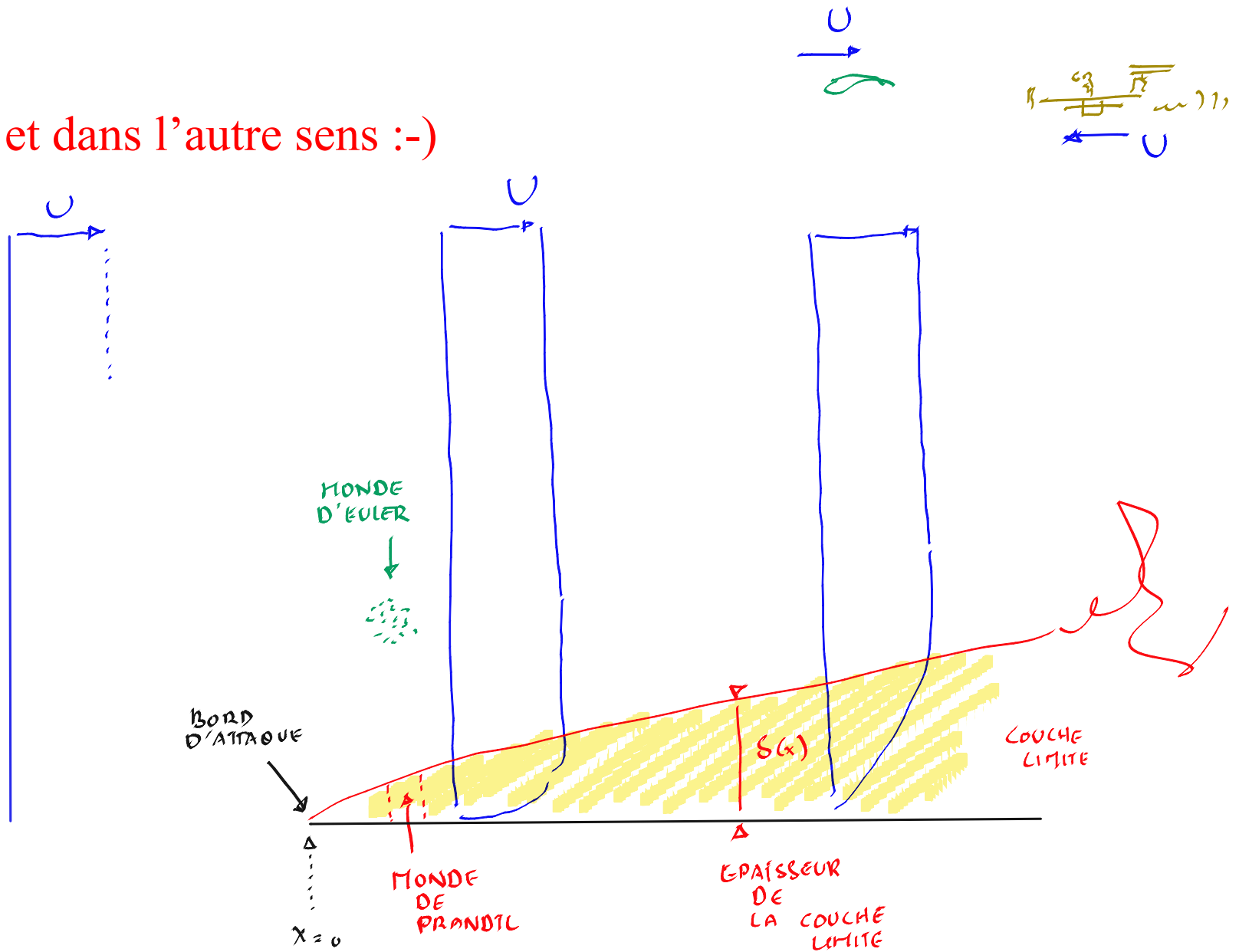
Loin de la plaque, les effets visqueux sont supposés négligeables.

On définit l'épaisseur de la couche limite comme le lieu géométrique où les effets d'inertie et les effets visqueux sont du même ordre de grandeur.

L'écoulement dans un sens...



...et dans l'autre sens :-)



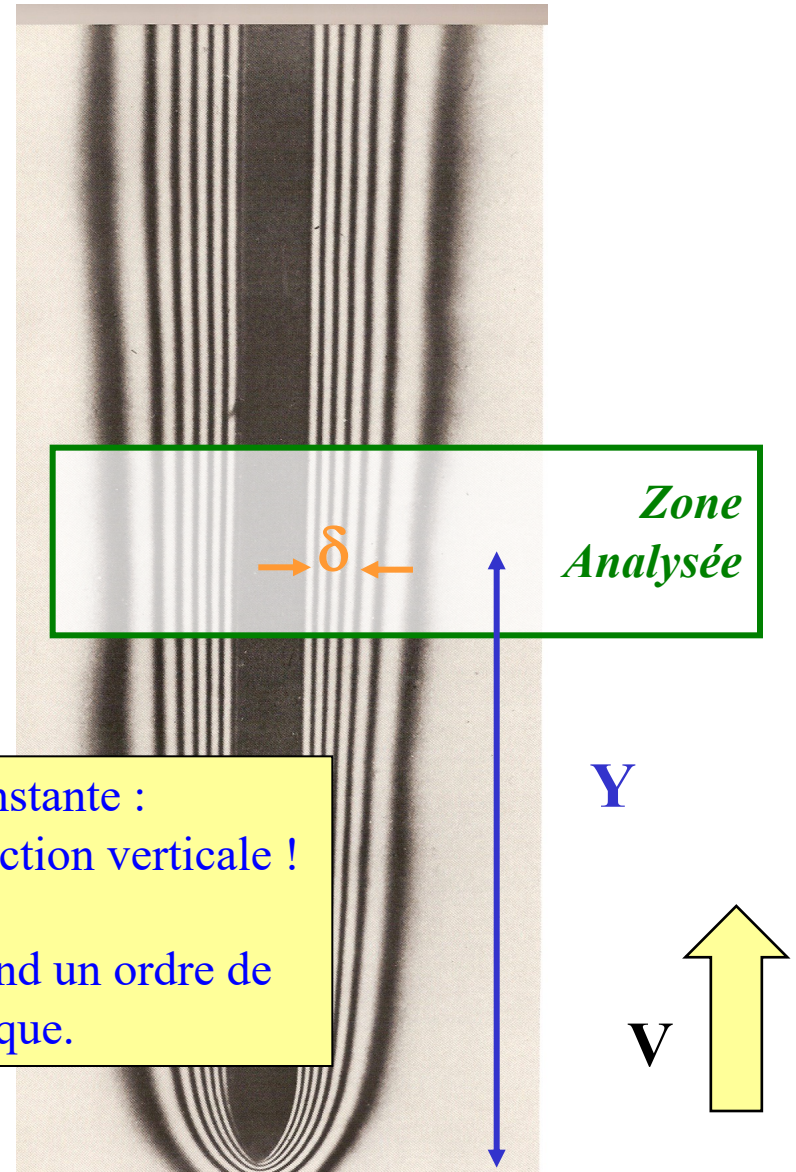
Théorie de la couche limite

$$\delta \ll Y$$

Hypothèse géométrique de base
Pas satisfaite au bord d'attaque !!

L'épaisseur de la couche limite n'est pas une constante :
elle augmente de manière monotone dans la direction verticale !

Mais, on se place dans une zone locale et on prend un ordre de
grandeur constant pour notre analyse mathématique.



Couches limites laminaires

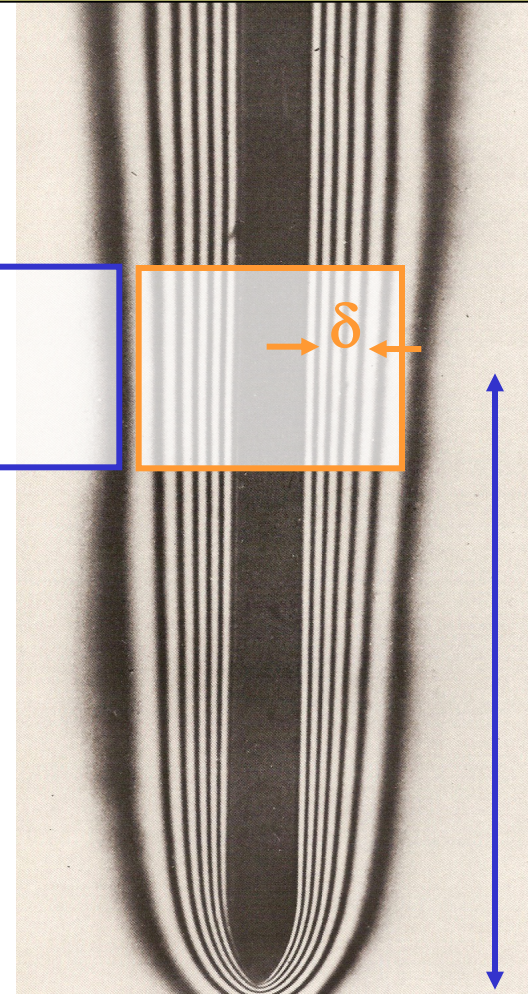
$$\delta \ll Y$$

L'épaisseur de la couche limite est le lieu géométrique où les effets d'inertie et les effets visqueux sont du même ordre de grandeur.

Effets visqueux négligeables

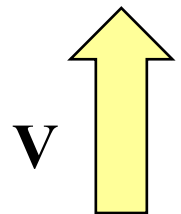
écoulement incompressible et irrotationnel

modèle dit du fluide parfait

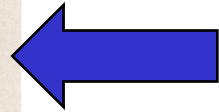
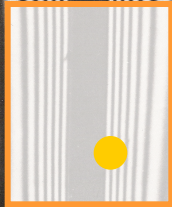
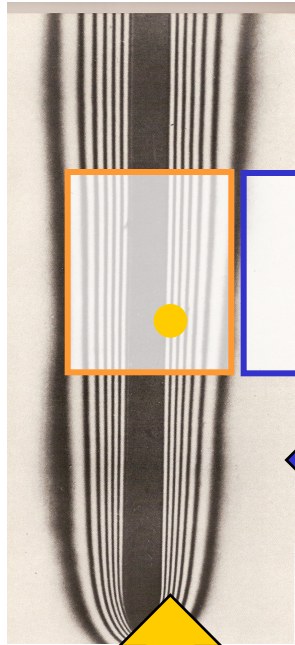


Effets visqueux non négligeables

Y



Deux mondes distincts ...



Euler

$$\frac{dp_e}{dy} = \rho v_e \frac{dv_e}{dy}$$

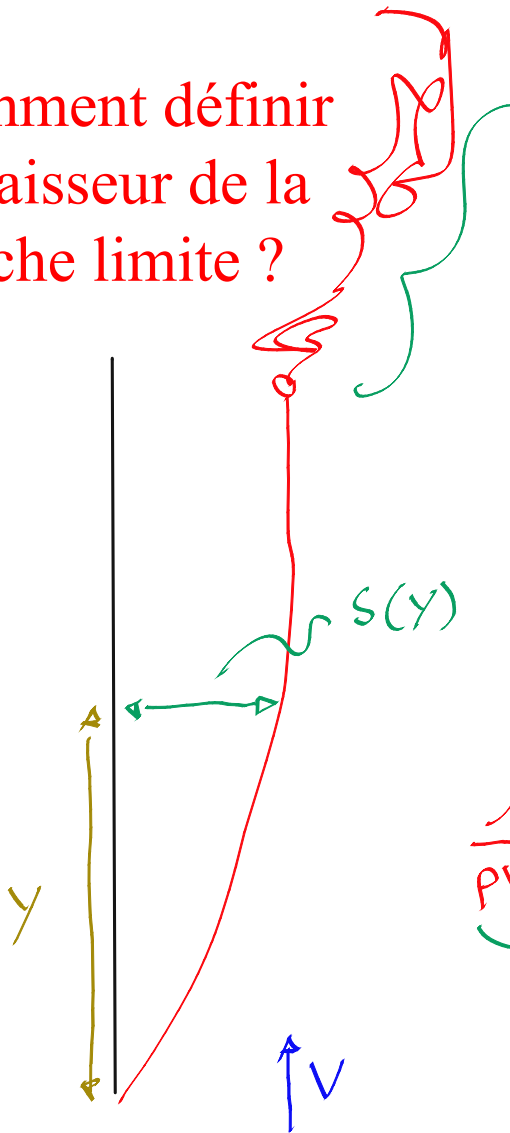
*Ecoulement
incompressible
bidimensionnel
stationnaire
irrotationnel*

Prandtl

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ 0 = \frac{\partial p}{\partial x} \end{array} \right.$$

*Ecoulement
incompressible
bidimensionnel
stationnaire*

Comment définir l'épaisseur de la couche limite ?



EULER $\rho v \frac{dv}{dy} = - \frac{dp_e}{dy} - \rho g$

$s(y) \triangleq$ EFFETS VISQUEUX \approx EFFETS D'INERTIE

$\underbrace{\hspace{10em}}$ $\underbrace{\hspace{10em}}$

$\mu \frac{V}{s^2}$ $\rho \frac{V^2}{y}$

$\underbrace{\frac{1}{\rho V^2} \frac{s^2}{y} \mu \frac{V}{s^2}}_{\frac{\mu}{\rho V y}}$

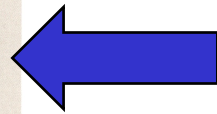
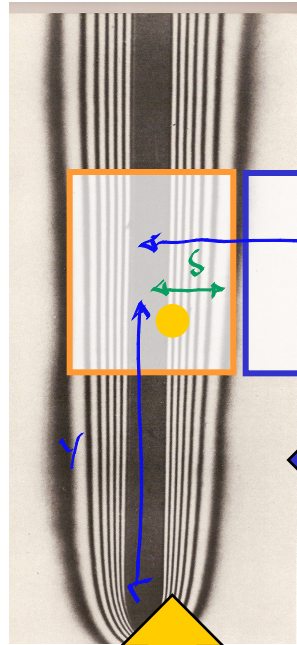
$\underbrace{\rho \frac{V^2}{y} \frac{s^2}{y} \frac{1}{\rho V^2}}_{\frac{s^2}{y^2}}$

$s \ll y$

$\frac{s}{y} \approx \frac{1}{\sqrt{Re}}$

$s \approx \sqrt{\frac{\nu y}{V}}$

Deux échelles distinctes ...



Euler

$$\frac{dp_e}{dy} = \rho v_e \frac{dv_e}{dy}$$



$$x'_{Euler} = \frac{x}{Y}$$

Prandtl

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ 0 = \frac{\partial p}{\partial x} \end{array} \right.$$

$$x'_{Prandtl} = \frac{x}{\delta}$$



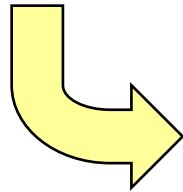
$$\delta \ll Y$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\end{aligned}$$

Longueur verticale caractéristique : Y

Longueur horizontale caractéristique : δ

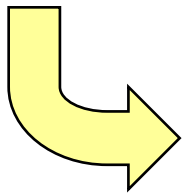
Vitesse verticale caractéristique : V



**Comment choisir une
vitesse horizontale
caractéristique ?**

$$\boxed{\mathcal{O}(U/\delta) \frac{\partial u}{\partial x}} + \boxed{\frac{\partial v}{\partial y} \mathcal{O}(V/Y)} = 0$$

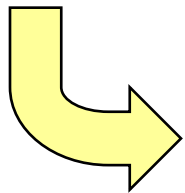
Il ne faut pas définir de vitesse caractéristique horizontale !



$$U = \frac{V\delta}{Y} \ll V$$

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{O}(\rho V^2/Y) \quad \mathcal{O}(\rho V^2/Y) \\
 \boxed{\rho u \frac{\partial v}{\partial x}} + \boxed{\rho v \frac{\partial v}{\partial y}} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \boxed{\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \boxed{\cancel{\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}} \\
 \mathcal{O}(\rho UV/\delta) \qquad \qquad \qquad \mathcal{O}(\mu V/\delta^2) \gg \mathcal{O}(\mu V/Y^2)
 \end{array}$$

Lieu où l'ordre des effets visqueux et les effets d'inertie sont identiques



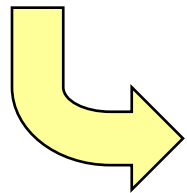
$$\frac{\boxed{\text{Forces d'inertie}}}{\boxed{\text{Forces visqueuses}}} = \frac{\rho V^2/Y}{\mu V/\delta^2} = \frac{\rho V Y}{\underbrace{\mu}_{Re_Y}} \frac{\delta^2}{Y^2} = 1$$

Que vaut δ ?

$$\frac{\delta}{Y} = \sqrt{\frac{1}{Re_Y}}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{O}(\rho V^2 \delta / Y^2) \quad \mathcal{O}(\rho V^2 \delta / Y^2) \\
 & \boxed{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}} + \boxed{\rho v \frac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \underbrace{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\mathcal{O}(\mu V / Y \delta)} + \underbrace{\cancel{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}}_{\mathcal{O}(\mu V \delta / Y^3)}
 \end{aligned}$$

On obtient la même définition :-)

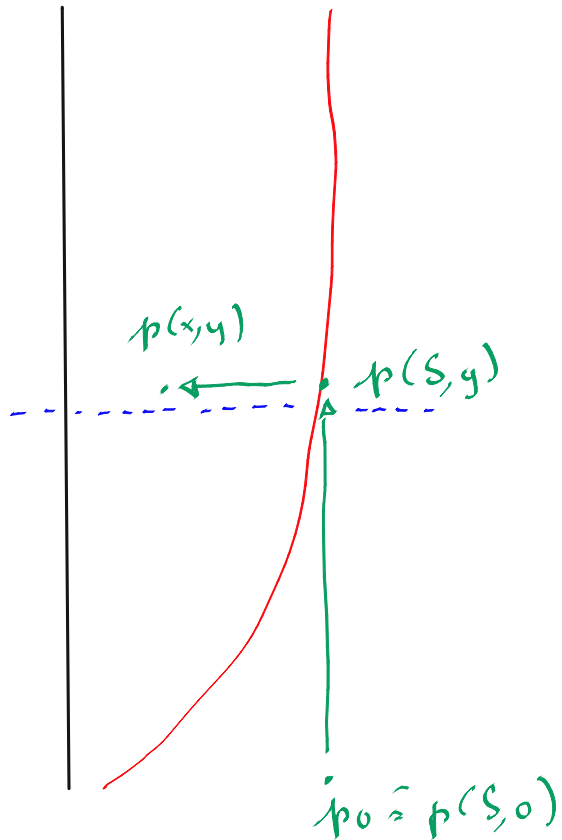


$$\frac{\boxed{\text{Forces d'inertie}}}{\boxed{\text{Forces visqueuses}}} = \frac{\rho V^2 / Y}{\mu V / \delta^2} = \frac{\rho V Y}{\underbrace{\mu}_{Re_Y}} \frac{\delta^2}{Y^2} = 1$$

Et l'autre équation ?

$$\frac{\delta}{Y} = \sqrt{\frac{1}{Re_Y}}$$

Et la pression...



$$p(x,y) - p_0 = \underbrace{p(S,y) - p_0}_{\partial(S)} + \underbrace{(x-S)}_{\partial(x)} \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{\partial(x)} \Big|_{x=S}$$

$$y \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\underbrace{\partial(\gamma)}_{\partial(\gamma)} \quad \underbrace{\partial\left(\rho \frac{V^2}{\gamma}\right)}_{\partial(\rho V^2)}$$

~~$$\partial\left(\rho \frac{UV}{\gamma}\right)$$

$$\partial\left(\rho \frac{VS}{\gamma} \frac{V}{\gamma}\right)$$

$$\partial\left(\rho \frac{V^2 S}{\gamma^2}\right)$$

$$\rho \left(\rho V^2 \frac{S^2}{\gamma^2}\right)$$~~

ET DONC
 SUPPOSER QUE
 LA PRESSION EST HYDROSTATIQUE
 DANS LA COUCHE LIMITE DE LA
 CONVECTION NATURELLE EST LÉGITIME !

Sur la couche limite...

$$\boxed{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}} + \boxed{\rho v \frac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \boxed{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \boxed{\cancel{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}}$$

$\mathcal{O}(\rho V^2 \delta / Y^2)$

Et la
pression ?

Dans la couche limite...

$$p(x, y) - p_0 = \boxed{p(\delta, y) - p_0} + \boxed{\cancel{(x - \delta) \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=\delta}}}$$

$\mathcal{O}(\rho V^2) \gg \mathcal{O}(\rho V^2 \delta^2 / Y^2)$

*A l'extérieur de la
couche limite...*

$$\boxed{\rho u \frac{\partial v}{\partial x}} + \boxed{\rho v \frac{\partial v}{\partial y}} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \boxed{\cancel{\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}} + \boxed{\cancel{\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}}$$

$\mathcal{O}(\rho V^2 / Y)$

Equations de Prandtl (1904)

Equations simplifiées valables
au sein de la couche limite

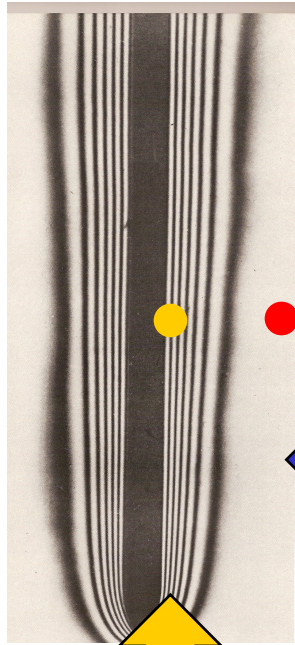
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\cancel{\frac{dp}{dy}} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

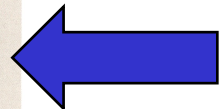
*Couche limite visqueuse
mince*

$$\delta \ll Y$$

*Pas de gradient de pression si
l'écoulement extérieur est uniforme
(ce n'est pas indispensable !)*



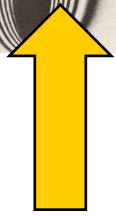
$$\frac{\delta}{\zeta} = \frac{\zeta}{Y} = \frac{1}{Re^{1/4}}$$



Euler

$$\frac{dp_e}{dy} = \rho v_e \frac{dv_e}{dy}$$

$$x'_{Euler} = \frac{x}{Y}$$



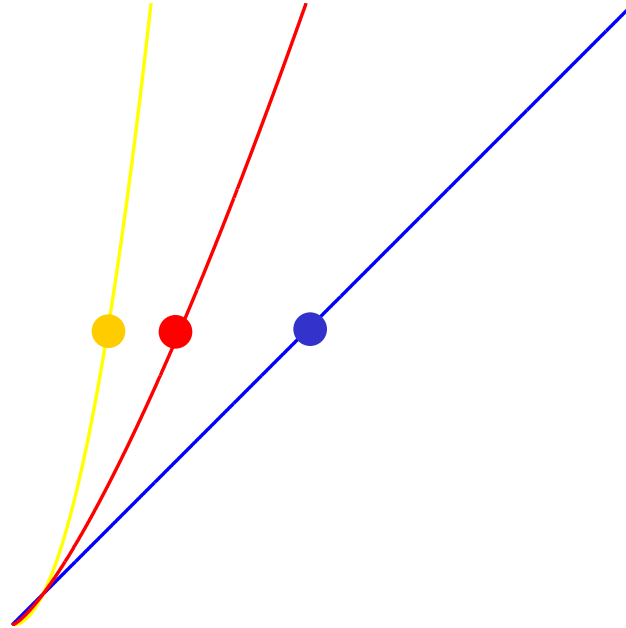
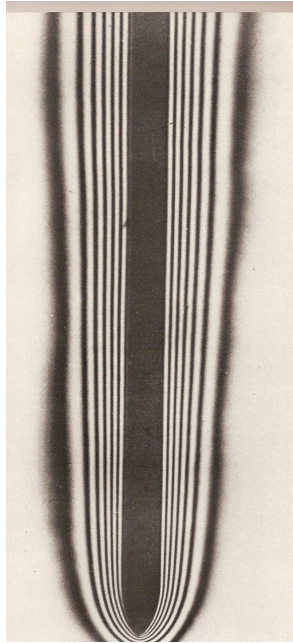
Prandtl

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ 0 = \frac{\partial p}{\partial x} \end{array} \right.$$

$$x'_{Prandtl} = \frac{x}{\delta}$$



Deux mondes distincts à raccorder !



$$\frac{\delta}{Y} = \underbrace{\left(\frac{YV}{\nu}\right)^{-1/2}}_{Re^{-1/2}}$$

↓

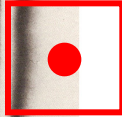
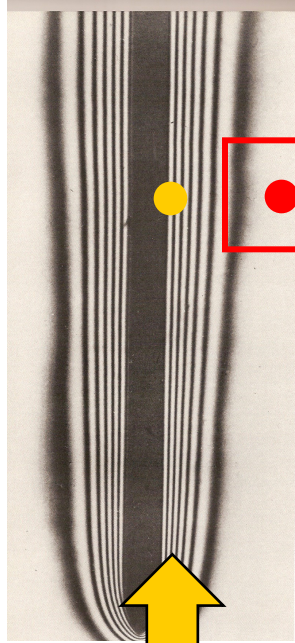
$$\frac{\delta}{\nu/V} = \left(\frac{Y}{\nu/V}\right)^{1/2}$$

$$\frac{\zeta}{\nu/V} = \left(\frac{Y}{\nu/V}\right)^{3/4}$$

↑

$$\frac{\zeta}{Y} = \underbrace{\left(\frac{YV}{\nu}\right)^{-1/4}}_{Re^{-1/4}}$$

Grandeurs
caractéristiques
le long de la plaque...



Euler



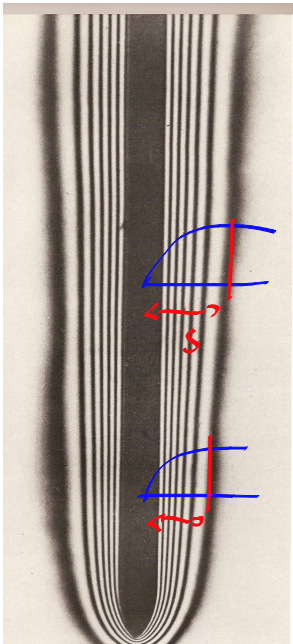
On effectue le raccord en ζ

$$\begin{aligned} \lim_{x/\delta \rightarrow \infty} v\left(\frac{x}{\delta}, y\right) &= \lim_{x/Y \rightarrow 0} v_e\left(\frac{x}{Y}, y\right) = v_e(0, y) \\ \lim_{x/\delta \rightarrow \infty} p\left(\frac{x}{\delta}, y\right) &= \lim_{x/Y \rightarrow 0} p_e\left(\frac{x}{Y}, y\right) = p_e(0, y) \end{aligned}$$

Prandtl

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ 0 = \frac{\partial p}{\partial x} \end{cases}$$





Solution analytique de Blasius

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$



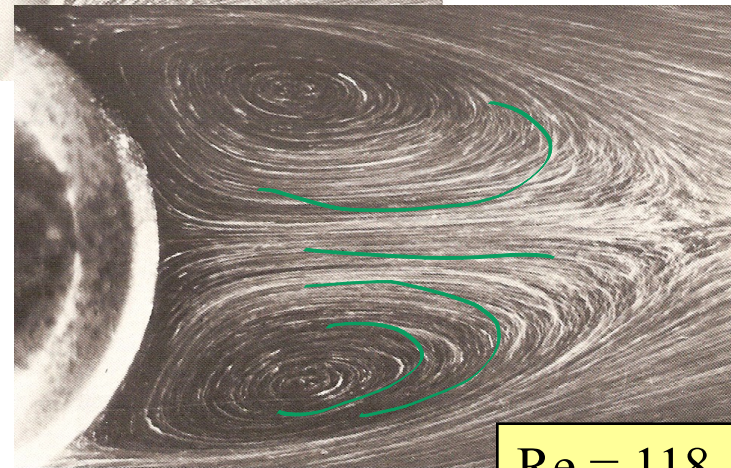
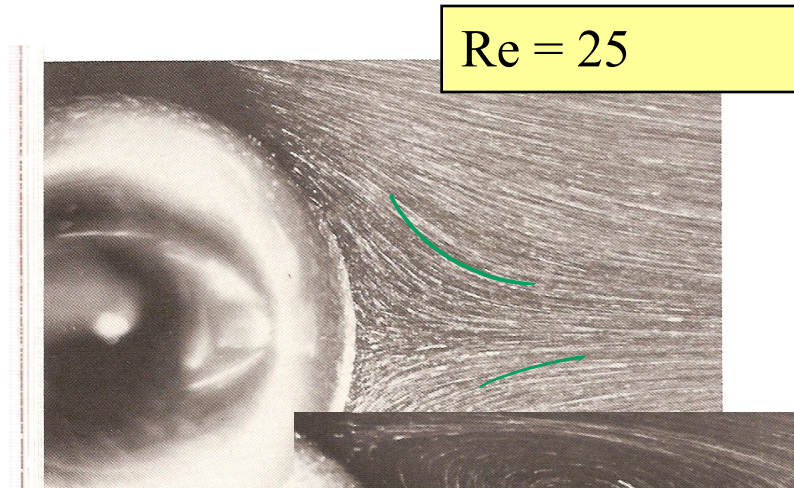
$$\eta(x, y) = \frac{x}{\delta(y)} = \frac{x}{\sqrt{\frac{2\nu y}{V}}}$$

Variable de similitude : le facteur « deux » est une fioriture historico-folklorique pour simplifier l'algèbre...

Première idée : les profils $u(\eta)$ et $v(\eta)$ sont semblables sur toutes les hauteurs !

Seconde idée : cherchons la fonction de courant pour obtenir directement un champs de vitesse à divergence nulle !

A propos de la fonction de courant et du tourbillon...



*Un petit interlude mathématique...
pour vous conter quelques petites équations
bien utiles pour la suite !*

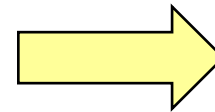
Fonction de courant

$$\mathbf{v} = \nabla \times \psi$$

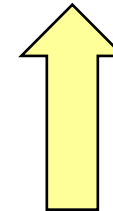
Il est toujours possible de trouver une fonction de courant dans un écoulement incompressible. On peut même exiger - en plus- qu'elle soit à divergence nulle.

$$\begin{aligned} \text{rot grad} &= 0 \\ \text{div rot} &= 0 \\ \text{rot rot} &= \text{grad div} - \text{div grad} \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \mathbf{v} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega}$$

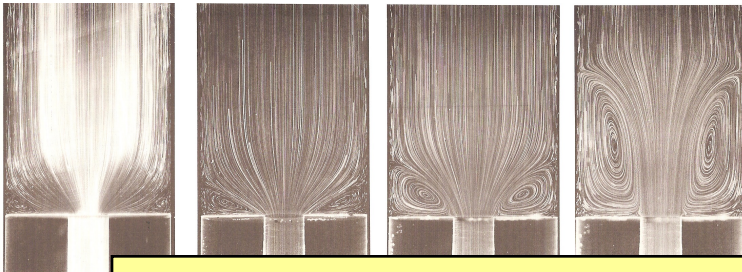


$$\nabla^2 \psi = -\omega$$



$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$



Écoulement incompressible stationnaire d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants, sans forces de volume.

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$$

Tourbillon

Fonction de courant

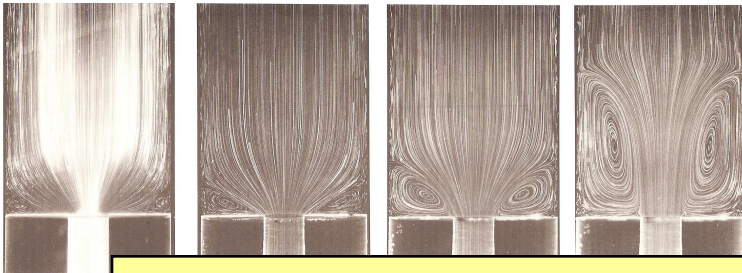
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial \omega}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$
$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$



Écoulement incompressible stationnaire plan d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants, sans forces de volume.

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Tourbillon

Écoulements incompressibles stationnaires rampants

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$0 = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

Creeping flows

$$\underbrace{\nabla^2 p}_{\nabla \cdot \nabla p} = \mu \underbrace{0}_{\nabla \cdot \nabla^2 \mathbf{v}}$$

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

$$\underbrace{\nabla \times \nabla p}_0 = \mu \underbrace{\nabla \times \nabla^2 \mathbf{v}}_{\nabla^2 \boldsymbol{\omega}}$$

$$\nabla^2 p = 0$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0$$

$$\nabla^4 \psi = 0$$

$$\text{rot grad} = 0$$

$$\text{div rot} = 0$$

$$\text{rot rot} = \text{grad div} - \text{div grad}$$

Fonction de courant

$$\psi(x, y) = -V \delta(y) f(\eta(x, y))$$

Le signe négatif est une fioriture historico-folklorique pour retrouver l'équation usuelle de Blasius

Le facteur « deux » est une fioriture historico-folklorique pour simplifier l'algèbre (hem)

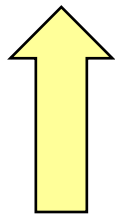
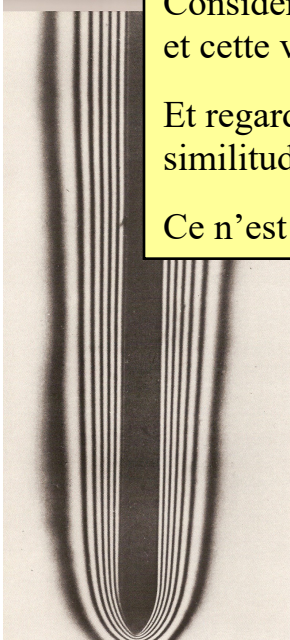
Considérons cette fonction de courant particulière et cette variable de similitude particulière...

Et regardons si il existe une solution de similitude....

Ce n'est pas évident a priori !

$$\eta(x, y) = \frac{x}{\delta(y)} = \frac{x}{\sqrt{\frac{2\nu y}{V}}}$$

Variable
de similitude



V

Solution de Blasius...

10 éé 1

$$\eta(x, y) = \frac{x}{S(y)} = \sqrt{\frac{x}{2yU}}$$

IDEE 2

$$v = V g(\eta)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\psi(x, y) = -V S(y) f(\eta(x, y))$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = V S f' \frac{1}{S} = V f'$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -V \left[S' f + S f' \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] = V S' (f' \eta - f)$$

$\underbrace{-\frac{x S'}{S^2}}_{= -\frac{\eta S'}{S}}$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{V f''}{S}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{V f'''}{S^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = V f'' \frac{\partial \eta}{\partial y} = -V f'' \frac{\eta S'}{S}$$

Ecrire l'équation de quantité de mouvement...

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = V s f' \frac{1}{s} = \boxed{V f'}$$

$$v_y = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -V \left[s' f + s f' \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] = \boxed{V s' (f' \eta - f)}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{-\frac{x s'}{s^2} = -\frac{\eta s'}{s}}$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{V f''}{s}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{V f'''}{s^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = V f'' \frac{\partial \eta}{\partial y} = \boxed{-V \frac{f'' \eta s'}{s}}$$

~~$$\frac{V^2 f'' s' f' \eta}{s} - \frac{V^2 f'' f s'}{s}$$~~

~~$$\frac{V^2 f'' \eta s' f'}{s}$$~~

$$= \frac{V f'''}{s^2}$$

Et obtenir une solution
de similitude !

$$\cancel{\frac{V^2 f'' S' f'}{S} - \frac{V^2 f'' f S'}{S}} - \cancel{\frac{V^2 f'' S' f'}{S}} = \frac{1}{S^2} V f''''$$

$$\cancel{\frac{-V^2}{S}} \frac{1}{VS} f'' f = \frac{1}{S^2} V f''''$$

$$S(\eta) = \sqrt{\frac{2y^{1/3}}{V}}$$

$$S'(\eta) = \frac{1}{3} \frac{1}{V} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\quad}} = \frac{1}{6VS}$$

$$\text{BLASIUS} \quad f f'' + f''' = 0$$

$$f'(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(\eta \rightarrow \infty) = 1$$

$$\psi(x, y) = -V \delta(y) f(\eta(x, y))$$

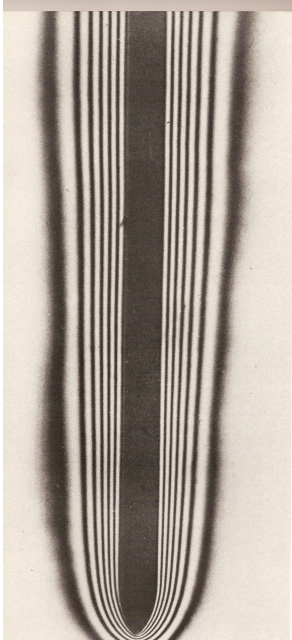
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -V \left(\delta'(y) f(\eta(x, y)) + \delta(y) f'(\eta(x, y)) \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}(x, y)}^{-\eta \frac{\delta'(y)}{\delta(y)}} \right) = V \delta'(\eta f' - f)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = V \delta(y) f'(\eta(x, y)) \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}(x, y)}_1 = V f'$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -V f'' \eta \frac{\delta'}{\delta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = V f'' \frac{1}{\delta}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = V f''' \frac{1}{\delta^2}$$

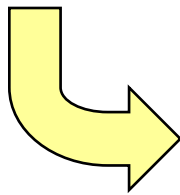


$$\eta(x, y) = \frac{x}{\delta(y)} = \frac{x}{\sqrt{\frac{2\nu y}{V}}}$$

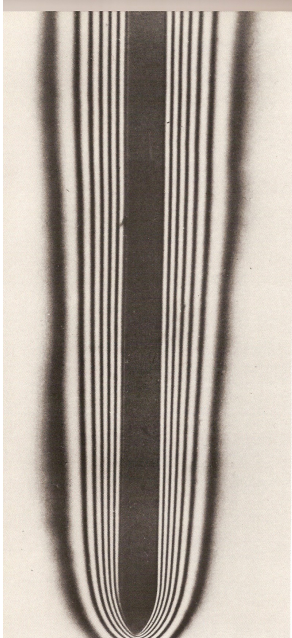
Un peu d'algèbre !

Et voilà l'équation de Blasius :-)

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$



$$\cancel{V^2 \delta' \eta f'} f'' \frac{1}{\delta} - V^2 \delta' f f'' \frac{1}{\delta} - \cancel{V^2 f' f'' \eta} \frac{\delta'}{\delta} = \nu V f''' \frac{1}{\delta^2}$$



$$u = V \delta' (\eta f' - f)$$

$$v = V f'$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -V f'' \eta \frac{\delta'}{\delta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = V f'' \frac{1}{\delta}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = V f''' \frac{1}{\delta^2}$$

$$f f'' + f''' = 0$$

Paul Richard Heinrich Blasius
Student of Ludwig Prandtl
1883 - 1970



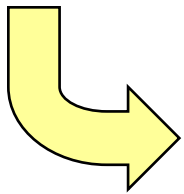
Résolution numérique

$$\begin{cases} f'''(\eta) + f(\eta)f''(\eta) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1 \end{cases}$$

```
function u = blasius(h)
n = 1; nmax = 10;
a = 0; fa = heun(a,h);
b = 1; fb = heun(b,h);
delta = (b-a)/2;
if (fa*fb > 0) error(); end;
while (abs(delta) >= 0.01 && n <= nmax)
    x = a + delta; fx = heun(x,h);
    if (fx*fa > 0)    a = x;    fa = fx;
    else              b = x;    fb = fx;
    end
    delta = (b-a)/2; n = n+1;
end
if (n > nmax) error(); end
[b u] = heun(x,h); u = u(:,1);
end
```

```
function [b u] = heun(a,h)
i = 1; imax = 100; test = 1;
X = [0:imax]*h; U = [[0 0 a] ; zeros(imax,3)];
while (test > 0.01 && i < imax)
    P = U(i,:) + h * f(X(i),U(i,:));
    U(i+1,:) = U(i,:) + h * ( f(X(i),U(i,:)) + f(X(i+1),P) ) /2;
    test = (U(i+1,2) - U(i,2)); i = i+1;
end
if (i == imax) error(); end
b = 1 - U(i,2); u = U(1:i,:);
end
```

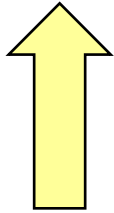
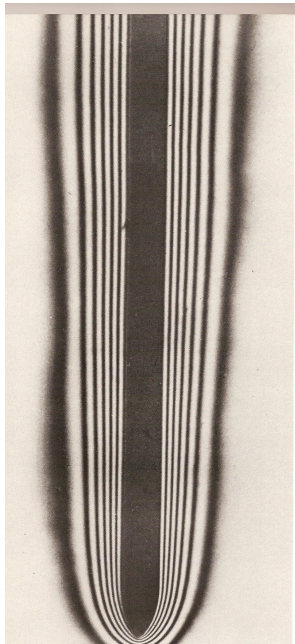
```
function dudx = f(x,u)
dudx = [u(2) u(3) -u(1)*u(3)];
end
```



$$\begin{cases} u'(\eta) = v(\eta) \\ v'(\eta) = w(\eta) \\ w'(\eta) = -u(\eta)w(\eta) \end{cases}$$

Utilisation conjointe de la technique du tir et de la méthode de Heun

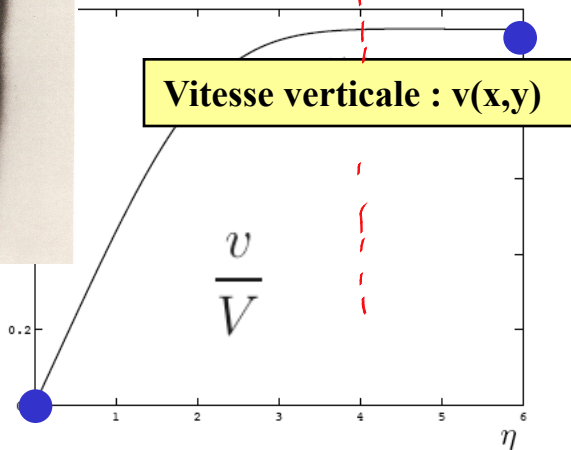
Solution de Blasius



V

$\eta = 4$

Vitesse verticale : $v(x,y)$



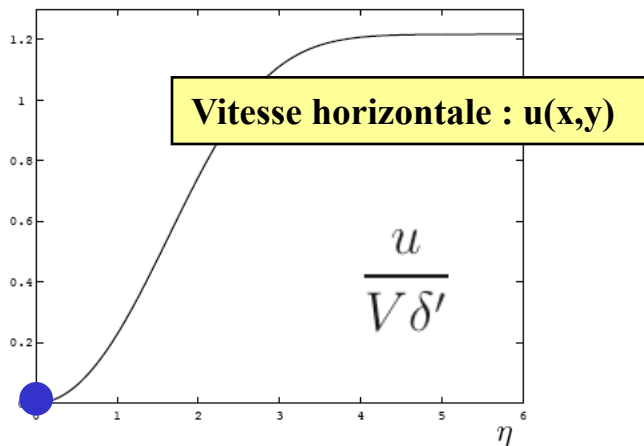
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

L'estimation de l'ordre de grandeur de la couche limite était bien adéquat !



Vitesse horizontale : $u(x,y)$



$$\eta(x, y) = \frac{x}{\delta(y)} = \frac{x}{\sqrt{\frac{2\nu y}{V}}}$$

FROTTEMENT A LA PAROI ?

$$D = \int_0^X \tau_w dx$$

$$= \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

$$= \mu u_e \underbrace{f''}_{0.4696} \Big|_{\eta=0} \underbrace{\frac{1}{s}}_{\sqrt{\frac{\nu_e}{2U_e X}}}$$

$$= 0.664 \frac{\rho u_e^2}{2} \sqrt{\frac{1}{u_e X}}$$

$$= 0.332 \sqrt{\frac{\mu \rho u_e^3}{X}}$$

$$= 0.332 \sqrt{\mu \rho u_e^3}$$

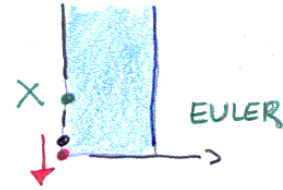
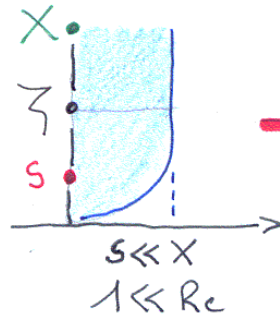
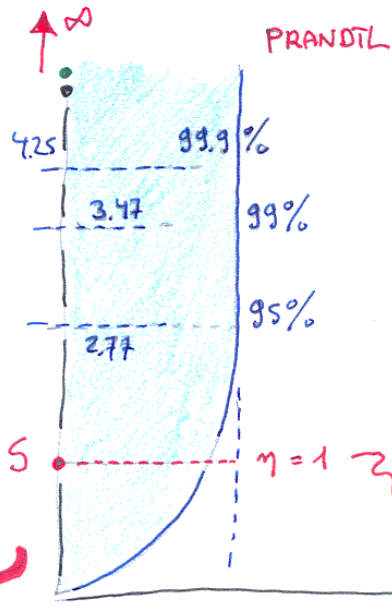
$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$$

$$= 0.664 \sqrt{\mu \rho u_e^3 X} = 1.328 \frac{\rho u_e^2 X}{2} \sqrt{\frac{1}{u_e X}}$$

$$C_f = \frac{\tau_w|_{x=X}}{\rho v_e^2/2} = 0.664 \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

$$C_{f,m} = \frac{D}{\rho v_e^2 X/2} = 1.328 \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

COEFFICIENTS
DE FROTTEMENT
LOCAL ET GLOBAL



$$u_e(\underbrace{\eta=3.47}_{\eta_{0.99}}) = 0.99 u_e$$

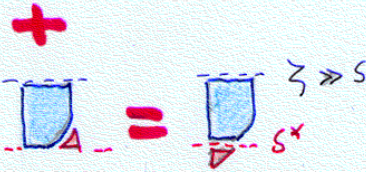
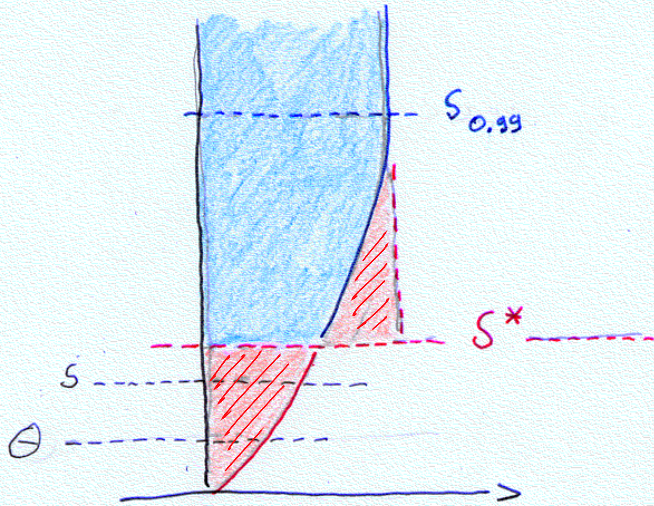
S
CE N'EST QU'UN ORDRE

DE GRANDEUR ADEQUAT !

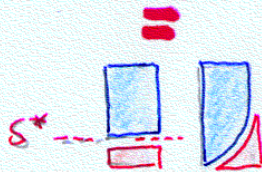
$$\frac{S}{X} \triangleq \sqrt{\frac{2.11}{u_e X}}$$

$\frac{S_{0.95}}{X}$	=	2.77	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{Re}}$	=	3.92	$\frac{1}{\sqrt{Re}}$
$\frac{S_{0.99}}{X}$	=	3.47	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{Re}}$	=	4.91	$\frac{1}{\sqrt{Re}}$
$\frac{S_{0.999}}{X}$	=	4.25	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{Re}}$	=	6.02	$\frac{1}{\sqrt{Re}}$

EPAISSEUR DE DEPLACEMENT δ^*



$$\underbrace{\int_0^{\zeta} u_e dy}_{\delta^*} - \underbrace{S^* u_e}_{\delta^*} = \int_0^{\zeta} u dy$$



$$\delta^* \triangleq \int_0^{\zeta} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$$

CONVERGE si $\zeta \rightarrow \infty$

EPAISSEUR DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

$$\Theta \triangleq \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$$

$u_e = \text{cst}$

$$\frac{\Theta}{X} = 0.664 \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

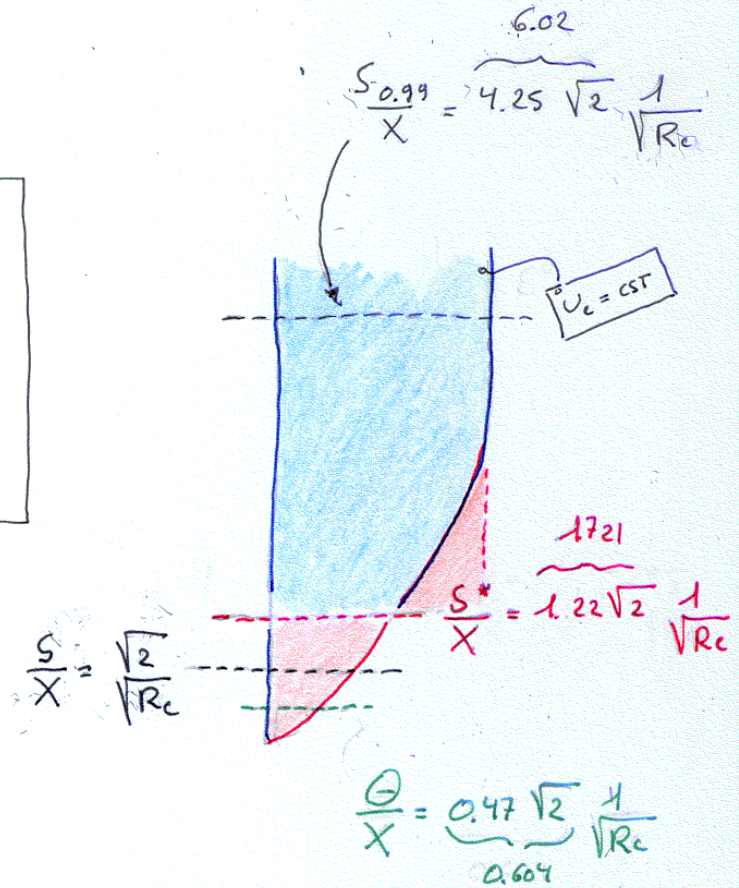
$C_f = \frac{C_{f,m}}{2} = \frac{1}{2} \frac{D}{\rho u_e^2 X}$



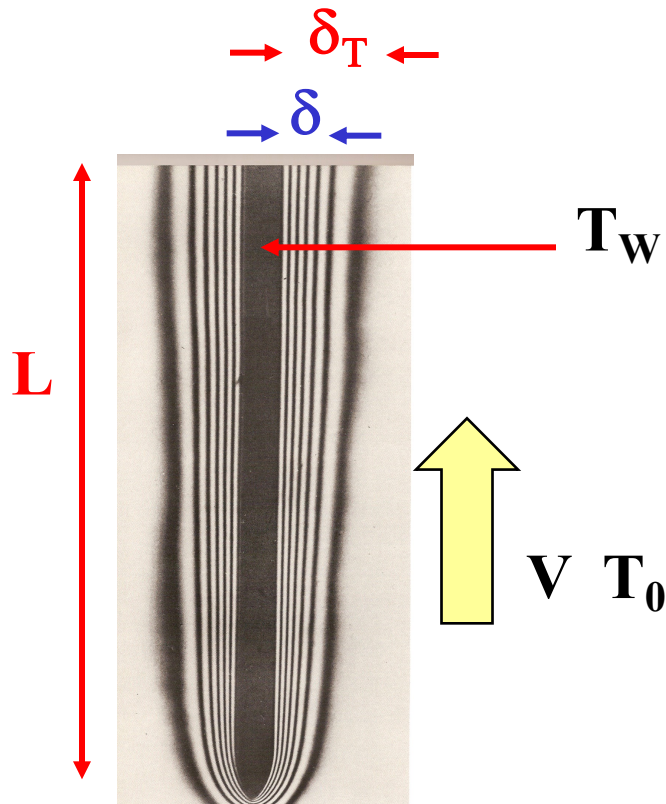
$$\Theta = D / \rho u_e^2$$

DENSITÉ DE FORCE DE TRAÎNÉE NORMALISÉE

EXERCÉE PAR LA PLAQUE SUR LE FLUIDE ENTRE 0 ET X



-ii- problème thermique



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\delta \ll Y$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\delta_T \ll Y$$

Près de la plaque, les effets conductifs sont dominants...

C'est la zone dite de couche limite thermique


Loin de la plaque, la conduction est négligeable

On définit l'épaisseur thermique comme le lieu géométrique où la conduction et la convection sont du même ordre de grandeur.

Un triple diplôme belgo-germano-français ?

perso.uclouvain.be/vincent.legat/

TFMASA News Schedule Documents My profile Hello Vincent Logout

 **TFMASA : Transfers, Fluids and Materials in Aeronautical and Space Applications**
Vincent Legat
TFMASA
Louvain School of Engineering
Université catholique de Louvain

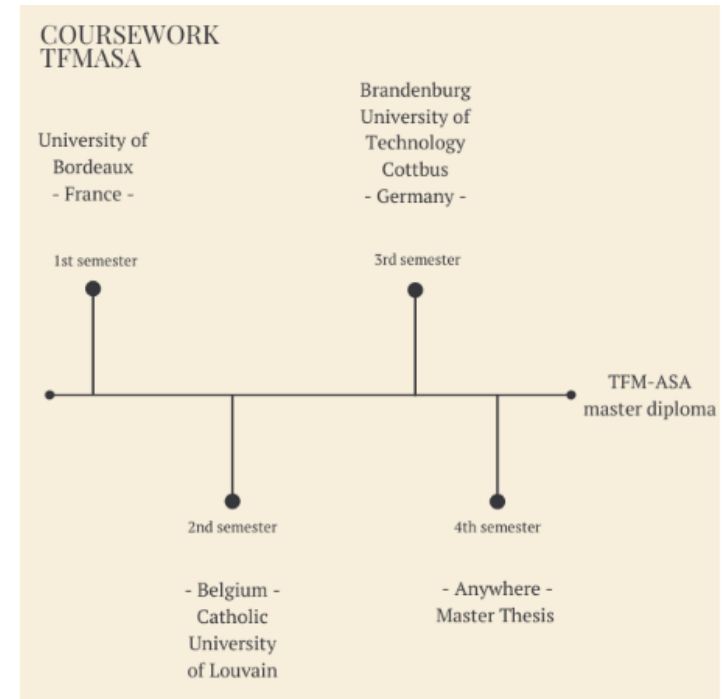
News Students Teaching team Lectures Documents

© 2020 Vincent Legat Contact - Support

TFM-ASA Master Program

The TFM-ASA Master Program is a two-year Master of Science Program taught in English by 3 Universities in 3 different countries (Catholic University of Louvain (Belgium) , Brandenburg University of Technology (Germany) and University of Bordeaux (France)).

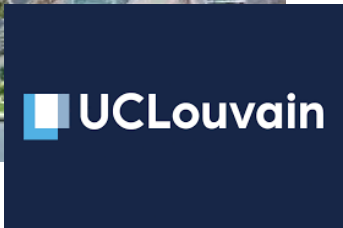
The students will benefit from top quality training in Mechanical and Aerospace Engineering. They will spend an entire semester in each university. Many industrial partners are directly involved through internships for students, conferences and even courses.



Et tout cela
en deux années !



Master in Transferts, Fluids and Materials for Aeronautical and Space Applications



Brandenburg
University of Technology
Cottbus



université
de **BORDEAUX**

